

# ICT als tool voor algebra

## INTERVIEW MET CHRISTIAN BOKHOVE

[ Brechje Hollaardt ]

Christian Bokhove is docent wiskunde en heeft ICT-taken op het St. Michael College in Zaandam én doet een promotieonderzoek aan de Universiteit Utrecht. Zijn onderzoek gaat over de manier waarop je ICT kunt inzetten bij het verwerven van algebraïsche vaardigheden, en wordt gehouden onder vwo-6 leerlingen. Het onderzoek wordt gefaciliteerd binnen Dudoc (zie kadertekst).

### Dudoc: Didactisch Universitair onderzoek van DOCenten naar vernieuwing van de bètavakken

Het Dudoc-programma biedt negentien docenten de mogelijkheid vier jaar lang een onderzoek uit te voeren naar vernieuwingen in de bètavakken. De docenten werken 40% van de tijd op hun school en 60% op een universiteit. Dudoc is ingesteld door het Platform Bèta Techniek met steun van het ministerie van OCW. Het is een uniek experiment in vakdidactisch en onderwijskundig Nederland. Dudoc is onder andere opgezet om het werk te ondersteunen van de bèta-vakvernieuwingscommissies, die de minister van OCW adviseren over nieuwe examenprogramma's. Dudoc is in twee fasen gestart met een groep docenten in 2007 en een groep in 2008. Meer info via « [www.dudocprogramma.nl](http://www.dudocprogramma.nl) ».

In een volgend nummer van *Euclides* leest u een verslag van een rondetafel gesprek met een aantal Dudoc'ers.

onderwijs komen er best wat negatieve geluiden over het niveau van de leerlingen die binnenstromen: ze kunnen slecht vergelijkingen oplossen, ze snappen niet waarom uit een wiskundige som een bepaalde uitkomst heeft. Mijn onderzoek gaat in op zowel inzichten als vaardigheden van leerlingen in 6 vwo, zaken die elkaar kunnen versterken. Ik heb digitale activiteiten voor leerlingen ontwikkeld, die daarop zijn gebaseerd. Tevens wordt ICT gebruikt voor diagnostische toetsen om voortgang te meten bij leerlingen.'

### Voordelen van ICT

Het onderzoek startte met het expliciet maken van de te gebruiken wiskundige tool: wat is er nodig voor een goede tool? Christian Bokhove: 'Ik heb criteria geformuleerd waaraan de tool moet voldoen, zoals gebruikersvriendelijkheid en stabiliteit. Die criteria maakten dat experimentele tools afvielen voor het onderzoek. Een ander belangrijk criterium was het hebben van de juiste auteursomgeving, zodat ik zelf activiteiten en inhoud zou kunnen ontwerpen. Vervolgens heb ik alle mij bekende tools geëvalueerd aan de hand van de criteria. Daarmee kon ik de tool selecteren die het beste zou passen voor het onderzoek. De volgende stap was het ontwerpen en maken. Doordat ik bepaalde uitgangspunten had genomen voor de te gebruiken software, waren er automatisch al pijlers neergezet. Zoals dat feedback belangrijk is: de computer moet de leerling feedback kunnen geven op de stappen die deze maakt in een activiteit.'

Het model waarvoor in het onderzoek is gekozen, is communicatie tussen computer en leerlingen. Christian Bokhove voegt

hier direct aan toe: 'Uiteraard besef ik dat leerlingen prima kunnen leren in groepen en van elkaar. Reden voor dit model vormen een aantal voordelen van ICT, bijvoorbeeld dat een leerling thuis aan wiskunde kan blijven werken, ook al loopt hij ergens in vast. Met een slimme feedback in het programma, kan hij namelijk direct geholpen worden. Voordeel is dat de leerling niet hoeft te wachten tot hij de volgende dag uitleg kan vragen aan een docent. Het gaat hierbij om het inzetten van ICT, aanvullend op lessen in de klas. Dus niet als vervanging.'

### Laagdrempelig

Het in de praktijk uitproberen en werken met het model begon heel kwalitatief en werd steeds meer kwantitatief. Christian Bokhove legt uit: 'Eerst werden er zes één-op-één sessies gehouden met leerlingen die wiskunde B hebben, waarbij ze hardop moesten denken. Zo'n sessie duurde twee uur. Leerlingen werkten met een eerste prototype en ik ging erg de diepte in met een paar cases. Bij de sessies was ik aanwezig als observator. Die eerste sessies waren een soort existentiebewijs: is het mogelijk dat... Aan de tweede ronde deden 31 leerlingen van een school mee. Daarbij werd één module gebruikt die bestaat uit een lessenreeks van ongeveer zes klokuren. Praktische uitgangspunten waren: het moet voor een docent laagdrempelig zijn om te gebruiken en niet lastig zijn om uit te voeren. Het kan natuurlijk niet zo zijn een docent een heel curriculum omver moet gooien om één module te doen. Docenten moeten er intuïtief mee kunnen werken. In deze tweede ronde heb ik een prétest en posttest gehouden, vooral om na te gaan in hoeverre de onderzoeksmethode juist is om het effect te kunnen meten en te gebruiken is voor de data analyse. In de derde ronde heb ik de module getest op vijftien klassen van elf scholen. Op de achtergrond draaiden logfiles mee die alle activiteiten van leerlingen bijhielden.'



Brechje Hollaardt

Christian Bokhove

Het onderzoek van Christian heet voluit: ICT voor het verwerven en toetsen van doorstroomrelevante wiskundige vaardigheden. Hij licht toe: 'Vanuit het hoger



# Digitaal werken aan algebraïsche vaardigheid en inzicht

[ Christian Bokhove ]

Het DUDOC-programma stelt docenten in staat promotieonderzoek te doen op vakdidactisch gebied (zie [www.dudocprogramma.nl](http://www.dudocprogramma.nl)). Christian Bokhove is bezig met een dergelijk onderzoek; hij doet er verslag over.

## Aanleiding

Mijn onderzoek combineert twee actuele thema's: de belangstelling voor algebraïsche vaardigheden en de inzet van ICT in het onderwijs. Door het hoger onderwijs is de afgelopen jaren vaak geklaagd over een gebrek aan algebraïsche vaardigheden bij hun beginnende eerstejaars studenten. Ook in het voortgezet onderwijs was onvrede over het niveau van die vaardigheden bij leerlingen, voornamelijk op havo en vwo. Voor deze schooltypes zijn in reactie hierop allerlei initiatieven genomen met als doel het niveau van de algebraïsche vaardigheden van de leerlingen te verhogen. Voorbeelden hiervan zijn de instaptoetsen van het hoger onderwijs, het toevoegen van extra algebra-hoofdstukken in de diverse methodes, het overleg tussen de NVvW en het hoger onderwijs, de exit-toetsen en de Nationale Kennisbank Basisvaardigheden Wiskunde. Voor wat betreft de inzet van ICT zien we een toenemend gebruik van computers in het onderwijs. Vooral bij afstandslernen en het inoefenen wordt veel gezien in de inzet van ICT. Zou het niet mooi zijn als we deze voordelen van ICT kunnen gebruiken in een omgeving die geen afbreuk doet aan de eisen die we stellen aan het wiskunde-onderwijs, waar nu nog vooral pen en papier worden gebruikt? Het gebruik van ICT kent namelijk wel enkele voordelen, vooral op het vlak van het overal kunnen gebruiken en het geven van feedback. In mijn onderzoek komen beide zaken samen: 'Op welke wijze kan de computer (ICT) ingezet worden bij het verwerven, oefenen en toetsen van doorstroomrelevante algebraïsche vaardigheden.' Ik zal niet op alle onderdelen van de theoretische achtergrond ingaan; ik licht er enkele zaken uit.

## Keuze van de tool

Al in een vroeg stadium werd duidelijk dat het onderzoek het beste langs de lijnen van het ontwikkelingsonderzoek, zogenoemd *design research*, kon plaatsvinden. Door een interventie, een digitale lessenserie te ontwikkelen, zou ik goed kunnen zien welke eigenschappen van een interventie nou echt zouden bijdragen aan verbeterde, algebraïsche expertise, maar vooral ook *waarom* dit zou werken. Dit bracht meteen de eerste keuze ten aanzien van die interventie met zich mee, namelijk welke tool ik daarvoor zou gebruiken. Leek het eerst nog prettig om simpelweg de voor mij meest bekende software te gebruiken, al snel knaagde bij mij het gevoel dat ik ook zou moeten kunnen onderbouwen waarom ik de software gebruik die ik gebruik. En om die vraag te beantwoorden moest eerst duidelijk zijn aan welke criteria dergelijke software moest voldoen. Op basis van de bestaande literatuur (voor een overzicht zie [2]) heb ik een lijst met 27 criteria voor algebra-software opgesteld, en deze gevalideerd door de mening van algebra-, ICT- en toets-experts te vragen. De lijst werd vervolgens gebruikt om ruim 60 verschillende tools voor het leren van algebra te beoordelen. Hierbij werd het resultaat ook nog door een expert beoordeeld. Uit dit vooronderzoek bleek dat de vijf belangrijkste criteria voor goede algebra software de volgende te zijn:

1. Stabiliteit en snelheid;
2. Goed gebruiksgemak voor de leerling (o.a. invoer van formules);
3. Wiskundige formules worden op de juiste manier getoond;
4. De tool moet wiskundig correct zijn;
5. Antwoorden van leerlingen worden opgeslagen.

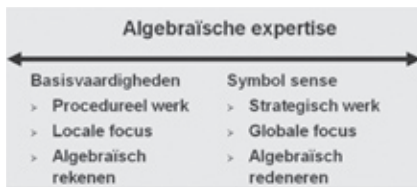
## Vaardigheden versus inzicht

Na keuze van de tool was het zaak om te kijken of het mogelijk was om een rijke, digitale oefenomgeving neer te zetten, waarbinnen genoeg ruimte was voor zowel het ontwikkelen van algebraïsche vaardigheden, als voor het ontwikkelen van inzicht. Als uitgangspunt heb ik het verschil tussen basisvaardigheden en zogenaamde *symbol sense* (Arcavi; zie [1]) genomen. **In figuur 1** wordt algebraïsche expertise voorgesteld als een dimensie die loopt van basisvaardigheden (het procedurele werk met een locale focus, algebraïsch rekenen) tot symbol sense (het strategische inzicht met een globale focus, algebraïsch redeneren). In het kort zou je kunnen zeggen dat onderscheid wordt gemaakt tussen de 'procedures', bijvoorbeeld het vlot kunnen herschrijven en oplossen van expressies, en het daadwerkelijke inzicht in (de structuur van) een formule: vaardigheden versus – of in dit geval juist *naast* – inzicht. Symbol sense wordt door Arcavi niet streng gedefinieerd, maar beschreven in termen van eigenschappen. In de praktijk zal het vaak neerkomen op een combinatie van vaardigheden én inzicht, die op elkaar inwerken. Dat is een belangrijk uitgangspunt: het één sluit het ander niet uit; sterker nog, het één versterkt het ander, en vice versa.

In drie stappen dacht ik te kunnen komen tot een eerste ontwerp.

*Ie stap* – Uitkiezen van relevante opgaven. Daar het doel was om zowel inzicht als vaardigheid te kunnen oefenen, is gekozen voor oefeningen met een van de volgende eigenschappen:

- *Gestalt*, als onderdeel van symbol sense, waarbij het 'zien' van gemeenschappelijke factoren het efficiënt oplossen van een vergelijking een stuk makkelijker kan maken. Dit kan omdat vergelijkingen sneller kunnen worden opgelost, maar



figuur 1 Algebraïsche expertise (gebaseerd op [3])

ook soms omdat vergelijkingen dan wel kunnen worden opgelost, en anders niet. Het eerste praktijkvoorbeeld hieronder laat dit zien.

- Opvallende aandachttrekkende elementen, zoals wortels en kwadraten. In de literatuur wordt dit *visual salience* genoemd. Deze elementen 'roepen' er als het ware om, om aangepakt te worden (zie de paragraaf Tweede praktijkvoorbeeld). Het kan hier ook gaan om een patroon, bijvoorbeeld een expressie met haakjes die 'schreeuwt' om uitwerking.

2e stap – Opgaven in een digitale omgeving zetten.

3e stap – De oefenomgeving uitproberen. In deze uitprobeerfase komen twee zaken samen: symbol sense en het gebruik van ICT. Zes wiskunde-B leerlingen uit 6-vwo zijn in hardop-denken-sessies aan de slag gegaan in de eerder beschreven omgeving. Het betreft hier 'gemiddelde' leerlingen uit de B1-groep, met gemiddeld voor het onderwerp analyse een cijfer tussen de 6 en de 8. Aan de hand van enkele praktijkvoorbeelden wil ik laten zien dat een rijke, digitale omgeving voor algebra gebruikt kan worden om zowel symbol sense (of gebrek er aan) te signaleren. Elke ronde in het onderzoek diende als bouwsteen voor een volgende revisie. Na de één-op-één sessies betrof dit een experiment in twee klassen wiskunde-B op één school, en uiteindelijke negen scholen in den lande.

### Eerste praktijkvoorbeeld

Het eerste voorbeeld gaat over het herkennen van overeenkomstige factoren aan de linker en rechter kant van een vergelijking.

De leerling, bedoeld *in figuur 2*, reageert op het zien van haakjes met de reactie 'die moet ik uitwerken'. Dit doet de leerling – hij staat een 8 gemiddeld – feilloos. Het vervelende in dit geval is dat de opgave eindigt in een derdegraads vergelijking. Hij overweegt nog even of hij de *abc*-formule kan toepassen, maar ziet al snel in dat die alleen voor kwadratische vergelijkingen

figuur 2 De leerling loopt vast bij het oplossen van een vergelijking

geldt. Dan maar herschrijven door een term buiten haakjes te halen. Aan de linker kant is  $5x$  een gemeenschappelijke factor. Nu strandt de leerling toch echt bij deze opgave. De leerling ziet in dat de 300 aan de rechterzijde van het gelijkteken betekent dat de opgave niet verder kan worden opgelost.

Na afloop kijken de leerling en ik terug op de opgave. Ik wijs hem op de gelijke termen aan de linker en rechter zijde. Hij begrijpt dat dit de opgave wel oplosbaar maakt. Eerst nog door te delen door de kwadratische term, maar daardoor gaan twee oplossingen verloren en blijft alleen  $x = 5$  over. Daar de oefenomgeving aangeeft dat oplossingen ontbreken, beseft de leerling dat er door delen oplossingen verloren zijn gegaan. Vervolgens lost de leerling de vergelijking helemaal correct op.

Deze opgave laat zien dat een goede *Gestalt*-vaardigheid kan leiden tot het beter kunnen oplossen van vergelijkingen. Het is mijns inziens ook interessant om te zien dat het stellen van eisen aan ICT het mogelijk maakt om een net zo rijke omgeving aan te bieden als met pen-en-papier, maar met behoud van enkele voordelen van webgebaseerde, digitale middelen.

De vraag is nu of leerlingen door een uitgekende opbouw van verschillende soorten vragen, gestimuleerd kunnen worden om automatisch 'even stil te staan' bij de opgaven die ze doen.

Kijkend naar deze sessie wordt duidelijk dat:

- juist als de leerling tegen een probleem aanloopt, het leren begint;
- problemen expres kunnen worden opgeroepen door 'ongewone opgaven' te gebruiken;
- de leerling dan toch verder kan als er feedback gegeven wordt;
- dit feedback van de docent kan zijn, maar ook feedback van ICT. *In figuur 2* is elke stap gepaard gegaan met een indicatie fout, goed of 'goed op weg', en in sommige gevallen ook feedback die bijvoorbeeld wijst op een onhandige methode;

figuur 3 De expressie wordt eerder ingewikkelder dan makkelijker

- goed ontworpen vragen en reeksen van vragen dit 'even stil staan' kunnen stimuleren.

### Tweede praktijkvoorbeeld

Het tweede voorbeeld is een klassieke opgave van Wenger (zie [5]) en behelst het herschrijven van de expressie  $v \cdot \sqrt{u} = 1 + 2v \cdot \sqrt{1+u}$  in de vorm  $v = \dots$ . De leerlinge die met het probleem *van figuur 3* bezig is, heeft de vorm  $v = \dots$  in gedachten als ze uitspreekt dat ze de wortel links wil kwijtraken. Om die reden vermenigvuldigt ze beide kanten met de '1 gedeeld door' de wortelterm. Hierna herschrijft ze de rechterzijde tot één breuk. Ze merkt op – door langdurig met de muispijl over de term  $2v$  te bewegen – dat rechts nu nog steeds een  $v$  staat. In de volgende stap probeert ze die  $v$  te isoleren. Het is overduidelijk dat de expressie zelf steeds complexer wordt. Op de vraag 'Wat is je strategie?' antwoordt ze onder meer 'Vaak doe ik dat ook om misschien een soort van ingeving te creëren. Dat ik het dan misschien op een andere manier bekijk en dat ik het dan zie: wat beter kan of wat niet.' Aan het einde ziet ze niet hoe ze dit moet 'oplossen'.

Zou ze zich hebben geconcentreerd op het samennemen van de termen met  $v$  en daarna het isoleren, dan had ze de expressie kunnen herschrijven. Wat wel opvallend was dat simpelweg het (foutief) herschrijven van de expressie leidde tot meer inzicht in de structuur van de expressie. Het feit dat de digitale omgeving een willekeurige strategie toelaat, heeft op zichzelf al tot gevolg dat een leerling 'al doende' inzicht opdoet.

Deze cyclus leverde als resultaat op dat een goed ontworpen, digitale oefenomgeving het mogelijk maakt dat leerlingen symbol sense, of een gebrek eraan, laten zien. Dit was vooral van belang om bevestigd te krijgen of de insteek die gekozen was, potentieel zou kunnen leiden tot meer inzicht. Nu dit het geval bleek te zijn, kon gewerkt worden aan een verbeterd prototype.

### Verbeteringen aan het prototype

Na analyse van de één-op-één sessies konden drie verbeterpunten worden geconstateerd: één ten aanzien van de opbouw in de opgaven, één voor wat betreft de feedback en één voor wat betreft *scaffolding* (dit begrip wordt verderop toegelicht).

Ten aanzien van het eerste verbeterpunt is het van belang om een gebalanceerde opbouw van de opgaven te maken, met het accent op symbol sense en variërend van 'oplosbaar met algoritmes' tot 'alleen oplosbaar met inzicht'. Het eerste praktijkvoorbeeld toonde dit principe, waarbij gebruik gemaakt werd van *crises*. Immers, de meeste leerlingen kunnen niet verder met het algebraïsch oplossen van een derdegraads vergelijking. In de opgave na deze crisis krijgt de leerling extra feedback en ondersteuning, onder andere in de vorm van instructiefilmpjes. Het idee is al eeuwen oud. De dichter John Keats (1795-1821) schreef: *'Failure is, in a sense, the highway to success, inasmuch as every discovery of what is false leads us to seek earnestly after what is true, and every fresh experience points out some form of error which we shall afterwards carefully avoid.'* We zullen in onze revisie nog nadrukkelijker gebruik maken van het idee van een 'crisis'.

Bij het verbeteren van de feedback, het tweede verbeterpunt, maken we gebruik van de resultaten van de één-op-één sessies. We zien voordelen in betere computerfeedback: het toevoegen van gedetailleerde stappen, het bepalen van de hoeveelheid feedback en tevens het type feedback (zie [4]). Hierbij hoort uiteraard ook de timing en de kwaliteit van de feedback.

Ten derde scaffolding: eerst de activiteit aanbieden in een gestructureerde opbouw met zelftoets mogelijkheid en veel feedback, later een eenvoudiger modus om transfer te faciliteren. Op deze manier leert een leerling echt 'op eigen benen' te staan. Immers, bij een schriftelijke toets verdwijnen voordelen, zoals feedback, en moet een leerling een opdracht nog steeds kunnen maken.

### Experiment in Enkhuizen

Het tweede prototype van de software *Algebra met inzicht* (zie [www.algebrametinzicht.nl](http://www.algebrametinzicht.nl)) bevatte deze drie verbeteringen, en werd begin 2010 ingezet aan de RSG Enkhuizen in twee groepen wiskunde B in 6-vwo. Kenmerken van de verbeterde module zijn:

- Het samengaan van vaardigheden en inzicht. Leerlingen verwerven inzicht in algebraïsche problemen.
- Het is een digitale lessenserie.
- De serie opgaven kennen qua didactiek een opbouw: eerst worden de leerlingen aan de hand genomen, daarna staan ze op eigen benen.
- Er zijn diverse vormen van feedback opgenomen, met onder andere filmpjes.
- Doordat gebruik gemaakt wordt van *randomisering* zijn er steeds andere opgaven.

Het doorwerken van de module kost een leerling ongeveer zes klokuren. De resultaten van deze ronde laten zien dat zowel het idee van een *crisis* als *scaffolding* bijdragen aan vaardigheden en begrip. Het was interessant om te zien dat de betere leerling relatief minder leek te hebben aan de lessenserie. In de derde en laatste cyclus, waar de korte lessenserie op negen andere scholen werd ingezet, bekijken we of we deze voorzichtige resultaten van de vorige ronde bevestigd kunnen zien of niet.

### Afsluiting

Ik heb een overzicht willen geven van mijn onderzoek op het gebied van algebraïsche expertise. Uit de resultaten volgt dat ICT een rol kan spelen in het oefenen en toetsen van algebraïsche expertise. Het onderzoek beweegt zich van meer kwalitatief naar meer kwantitatief: het is heel mooi dat de gedetailleerde analyse van het gedrag van enkele leerlingen inzichten geeft in het gebruik van ICT bij het verbeteren van algebraïsche expertise, maar nader onderzoek is nodig om algemenere conclusies te trekken.

Ik kan niet het hele onderzoek op deze pagina's uit de doeken doen, maar denk dat u als lezer een beeld heeft gekregen van de wijze waarop ICT bij het leren van algebra kan worden ingezet.

### Noten en literatuur

- [1] A. Arcavi (1994): *Symbol sense, informal sense-making in formal mathematics*. In: *For the Learning of Mathematics*, 14(3); pp. 24-35.
- [2] C. Bokhove, P. Drijvers (2010): *Digital tools for algebra education, criteria and evaluation*. In: *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 15(1); pp. 45-62.
- [3] P. Drijvers, P. Kop: *Katern 1 – Vergelijkingen vergelijken*. In: *Handboek Vakdidactiek Wiskunde*. Digitaal beschikbaar via: [www.fi.uu.nl/elwier/materiaal/handboek/documents/200810-13VergelijkingenVergelijken.pdf](http://www.fi.uu.nl/elwier/materiaal/handboek/documents/200810-13VergelijkingenVergelijken.pdf)
- [4] J. Hattie, H. Timperley (2007): *The Power of Feedback*. In: *Review of Educational Research*, 77(1); pp. 81-112.
- [5] R.H. Wenger (1987): *Cognitive science and algebra learning*. In: A. Schoenfeld (ed.), *Cognitive science and mathematics education*. Hillsdale: Lawrence Erlbaum Associates; pp. 217-251.

### Over de auteur

Christian Bokhove is wiskundedocent en ICT-coördinator op het St. Michaël College in Zaandam. Hij doet sinds 2007 een promotietraject in het DUDOC-programma van het Platform Bèta Techniek.

E-mailadres: [cbokhove@stmichaelcollege.nl](mailto:cbokhove@stmichaelcollege.nl)