

Computers en alle andere apparaten waar een chip in zit hebben onze wereld ingrijpend veranderd. Ze hebben onder andere gemaakt dat kwantitatieve gegevens een veel grotere rol spelen dan vroeger. We hoeven minder zelf te rekenen – dat kunnen we aan de computer overlaten – maar we moeten wel kunnen redeneren over verbanden binnen al die gegevens. Dit vraagt om aanpassingen in het onderwijs, ook in het basisonderwijs.

In dit boekje worden onderwijsactiviteiten beschreven rond grafieken voor de bovenbouw van het basisonderwijs. De computer functioneert daarin als onderzoeksinstrument. Voorbeelden van vragen die onderzocht worden zijn: Hoe verandert de temperatuur van een kopje thee dat je laat afkoelen? Hoe verandert de lengte van een kind dat groeit? Hoe zie je in een grafiek dat een trein snel, of juist langzaam optrekt? Wat gebeurt er met de opbrengst van een zonnecel wanneer je de hoek ten opzichte van het licht verandert? De onderwijsactiviteiten combineren rekenen-wiskunde met het vak wetenschap en techniek.

# Dynamische grafieken op de basisschool

Frans van Galen  
Koeno Gravemeijer



**FISME**

**VERVERS**  
foundation  
evolution in education

## **Dynamische grafieken op de basisschool**

Frans van Galen  
Koeno Gravemeijer

Frans van Galen is wetenschappelijk medewerker aan het Freudenthal Instituut voor Didactiek van Wiskunde en Natuurwetenschappen van de Universiteit Utrecht. Hij houdt zich bezig met de rol van ICT in het reken-wiskunde-onderwijs en is onder andere projectleider van het Rekenweb ([www.rekenweb.nl](http://www.rekenweb.nl)).

Koeno Gravemeijer is hoogleraar science- en techniekeducatie aan de Technische Universiteit Eindhoven, waar hij nauw betrokken is bij de professionalisering van leraren basisonderwijs. Eerder was hij als hoogleraar op het gebied van het reken-wiskundeonderwijs verbonden aan de Universiteit Utrecht en VanderBilt University (VS).

Een overzicht van alle onderwijsmaterialen die in dit boekje beschreven worden is te vinden op [www.fi.uu.nl/rekenweb/grafiekenmaker](http://www.fi.uu.nl/rekenweb/grafiekenmaker). De opdrachten voor leerlingen zijn ook beschikbaar via [www.rekenweb.nl](http://www.rekenweb.nl) en via [www.webquests.nl](http://www.webquests.nl)

De beschreven computerprogramma's zijn ontwikkeld door Wim van Velthoven en Frans van Galen.

Heel wat leerkrachten en heel wat leerlingen hebben bijgedragen aan de ontwikkeling van de in dit boekje beschreven materialen. Wij zijn hen daarvoor zeer dankbaar.



[www.verversfoundation.nl](http://www.verversfoundation.nl)



Freudenthal Instituut voor Didactiek van Wiskunde en Natuurwetenschappen  
[www.fi.uu.nl](http://www.fi.uu.nl)

## Voorwoord

De Ververs Foundation – opgericht in juli 1999 – heeft als doel het bevorderen van vernieuwingen in het onderwijs door het ontwerpen, ontwikkelen en verspreiden van innovatieve leermiddelen. Het basisonderwijs en de lerarenopleiding vormen de primaire doelgroep van de activiteiten. Vooral de toepassing van multimedia en/of internet staat daarbij in de belangstelling van de stichting vanuit de overtuiging dat het onderwijs van de toekomst door uitgekiend ICT-gebruik nieuwe vorm en inhoud kan krijgen.

Het boekje 'Dynamische grafieken op de basisschool' vormt de opbrengst van een samenwerkingsproject met het Freudenthal Instituut. Er wordt een aantal veranderingen beschreven die ons inziens nodig zijn in het curriculum voor rekenen-wiskunde van de basisschool, namelijk dat leerlingen moeten leren omgaan met 'dynamische representaties' van grootheden en samenhangen tussen grootheden. In het kader van dit project is de tool Grafiekenmaker ontwikkeld waarmee leerlingen zelf (al dan niet online) veranderingen en samenhangen kunnen analyseren. De concrete voorbeelden van projecten die leerlingen met de Grafiekenmaker kunnen uitvoeren illustreren de innovatieve aspiraties van de Ververs Foundation.

Andere recente projecten van de Ververs Foundation zijn het WebQuests-project, een verzameling educatieve speurtochten voor leerlingen waarbij web-based informatie centraal staat, en het WIT-project (Wereldoriëntatie, ICT en Taalonderwijs) – uitgevoerd door het Expertisecentrum Nederlands aan de Radboud Universiteit Nijmegen – dat een multimediale leeromgeving biedt voor taal en wereldoriëntatie.

In 2010 verricht de Ververs Foundation tezamen met de SLO – het nationaal expertisecentrum leerplanontwikkeling – een toekomstgerichte verkenning van de wenselijke doelen van het reken-wiskundeonderwijs gericht op het beantwoorden van de vraag welke reken-wiskundebagage in principe alle leerlingen in het funderend onderwijs zich eigen zouden moeten maken opdat zij goed voorbereid zijn voor vervolgstudies, voor beroepen en voor hun rol als burger in een informatiesamenleving.

Wij hopen dat leraren, pabo-docenten en studenten door dit boekje zicht krijgen op een voor de informatiesamenleving relevant aspect van de wiskunde.

Tjeerd Plomp, voorzitter Ververs Foundation

# 1 Leerlingen voorbereiden op de toekomst

## Met inzicht de computer gebruiken

Schrijven doen we haast nooit meer op papier, we communiceren via mobiel-tjes, e-mail en chatten, en we zoeken dingen eerder op via Google dan in een boek. De computer en alle andere apparaten waar een chip in zit, hebben onze wereld ingrijpend veranderd. Iedereen zal het er over eens zijn dat we leerlingen voor moeten bereiden op een maatschappij waarin de computer een belangrijke rol speelt, maar wat betekent dat precies? Wat moeten leerlingen later kunnen? Eén ding is duidelijk, het zal niet voldoende zijn wanneer ze computerprogramma's alleen als een soort kookboek kunnen gebruiken; ze zullen flexibel en creatief met computers om moeten kunnen gaan.

In dit boekje zullen we betogen dat het kunnen redeneren over variabelen een belangrijke vaardigheid is waar al op de basisschool ruimte voor moet worden gemaakt. Dat kan door kinderen vragen te laten onderzoeken als: hoe verandert de temperatuur van een kopje thee dat je laat afkoelen? hoe verandert de lengte van een kind dat groeit? hoe zie je in een grafiek dat een trein snel, of juist langzaam optrekt? wat gebeurt er met de opbrengst van een zonnecel wanneer je de hoek ten opzichte van het licht verandert? Redeneren over veranderende grootheden helpt kinderen te begrijpen wat computers voor ons doen; die kunnen van alles voor ons regelen, maar we moeten wel doorzien hoe ze beslissingen nemen.

Bij het redeneren over variabelen zijn grafieken een krachtig hulpmiddel. In hoofdstuk 2 en 3 beschrijven we onderwijsactiviteiten rond verschillende versies van het computerprogramma Grafiekenmaker. De onderwijsactiviteiten zijn in te zetten als een combinatie van het vak rekenen-wiskunde en het vak wetenschap en techniek. Op de basisschool is het mogelijk om deze vakken op een vanzelfsprekende manier te integreren. Een belangrijk argument om de computer in te zetten in het onderwijs rond grafieken is dat de computer dynamische grafieken kan bieden. Waar een boek alleen maar statische plaatjes heeft, kan de computer meting voor meting een grafiek laten ontstaan.

We beschrijven in dit eerste hoofdstuk waarom er veranderingen nodig zijn in het curriculum (zie ook Gravemeijer, 2009) en waarom we meer aandacht moeten geven aan grafieken. In hoofdstuk 2 worden kenmerken van het computerprogramma Grafiekenmaker beschreven. Hoofdstuk 3 bespreekt de ontwikkelde onderwijsactiviteiten.

## Als we onze welvaart willen behouden zal het onderwijs moeten veranderen, ook het basisonderwijs

In de huidige discussies over het onderwijs op de basisschool wordt weinig rekening gehouden met de wereld buiten de school. Zo is er bij het vak rekenen-wiskunde een fel debat over de wenselijkheid om terug te gaan naar het 'rekenen van opa', maar er is nauwelijks discussie over de vraag wat onze kinderen en kleinkinderen aan kennis nodig hebben.

Het basisonderwijs moet leerlingen voorbereiden op de maatschappij waarin zij over tien of twintig jaar zullen leven. We weten natuurlijk niet precies hoe die eruit zal zien, maar het is waarschijnlijk dat informatietechnologie een nog belangrijkere rol zal spelen dan nu al het geval is. Banen veranderen daardoor ingrijpend. Ook nu speelt de computer al een grote rol in bijna ieders werk; denk aan een manager van een kledingwinkel die een softwarepakket gebruikt om de vraag naar kleding te voorspellen, of een bakker die de productie in de gaten houdt met digitale meterstanden. De gecomputeriseerde systemen doen het eigenlijke werk, maar degene die ze gebruikt moet het onderliggende model begrijpen, want wie dat niet doet is kwetsbaar voor beoordelingsfouten.

We weten ook dat de globalisering zal doorzetten. We zien nu al dat er op grote schaal sprake is van outsourcing, waarbij werk wordt uitbesteed naar lagelonenlanden. De tijd dat alleen simpel productiewerk verplaatst werd naar andere landen ligt inmiddels achter ons, het gaat nu ook om het werk van bijvoorbeeld boekhouders en computerprogrammeurs. Zelfs hooggekwalificeerd werk als het analyseren van röntgenfoto's wordt al uitbesteed. Onze kinderen en kleinkinderen zullen wat kennis en vaardigheden betreft dus moeten concurreren met de rest van de wereld. Volgens de Amerikaanse economen Levy en Murnane (2004) is het effect van informatisering en globalisering dat taken die kunnen worden opgedeeld in routines uit de westerse economieën zullen verdwijnen. Voorzover die taken niet worden overgedragen aan computers gaan ze naar werknemers in lagelonenlanden.

Om het dreigende banenverlies op te vangen is het niet voldoende leerlingen hoger op te leiden, want ook landen als India en China beschikken over grote aantallen hoogopgeleide werknemers. We zullen onze leerlingen zo moeten opleiden dat hun opleiding een toegevoegde waarde biedt. Ze zullen later in staat moeten zijn om werk uit te voeren dat niet routinematig is, werk dat vraagt om creativiteit en flexibiliteit. In een maatschappij die gedomineerd wordt door wetenschap en techniek betekent dat dat ze op een flexibele ma-

nier om moeten kunnen gaan met computers, want computers en gecomputeriseerde apparaten fungeren steeds meer als intermediair tussen de mens en de fysieke omgeving. Om daar flexibel en creatief mee om te gaan is inzicht nodig in de processen die de computer beschrijft, bestuurt of analyseert.

We moeten leerlingen voorbereiden op deze toekomst en daarom zal het onderwijs moeten veranderen, ook het basisonderwijs. Doorzien van modellen en redeneren in termen van modellen worden essentiële vaardigheden. In het basisonderwijs zal daarvoor een fundament gelegd moeten worden. Het vak science en techniek kan hier samen met het vak rekenen-wiskunde een belangrijke rol bij spelen. Science en techniek is een klein vak op de basisschool, maar de combinatie met rekenen-wiskunde biedt mogelijkheden voor substantiële veranderingen in het curriculum.

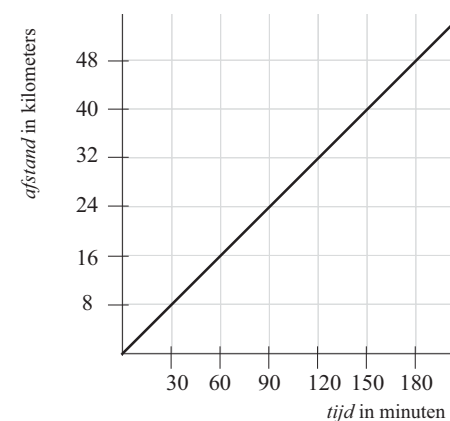
## Samenhang tussen grootheden

Op de basisschool wordt veel aandacht besteed aan verhoudingen en aan het gebruik van de verhoudingstabel. Met een verhoudingstabel kun je bijvoorbeeld uitrekenen hoe lang je op de fiets over 40 km zal doen als je gemiddeld 16 km per uur rijdt.

km	16	32	8	40
uur	1	2	$\frac{1}{2}$	$2\frac{1}{2}$

Een dergelijke verhoudingstabel is echter alleen bruikbaar bij een evenredig verband tussen grootheden, dus bij een vaste verhouding. Wanneer je de samenhang tussen de grootheden in een grafiek zou weergeven krijg je een rechte lijn. In wiskundige termen: er is sprake van een lineair verband. Zie figuur 1.

Het is terecht dat in het onderwijs zoveel aandacht wordt be-



figuur 1: een lineair verband

steed aan lineaire verbanden, maar het kan er ook toe leiden dat leerlingen evenredige verbanden veronderstellen waar die er niet zijn. Dit wordt wel de 'lineariteitsillusie' genoemd (De Bock et al., 2002).

Voorbeelden zijn:

- 'Als een kaartje voor een treinreis van 40 km € 7,- kost, dan zul je voor een reis van 80 km wel € 14,- moeten betalen.'
- 'Als de kans op winnen 1 op 10 is en je speelt drie keer dan heb je een kans van 3 op 10 om minstens één keer te winnen.'
- 'Als de zijden van een vierkant twee keer zo groot worden, verdubbelt de oppervlakte.'

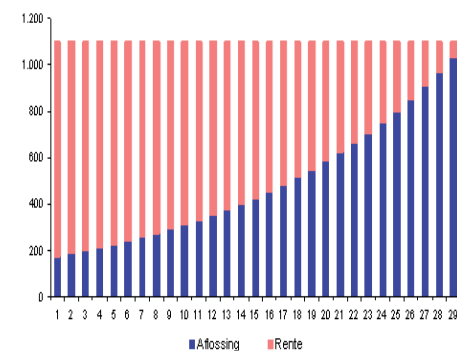
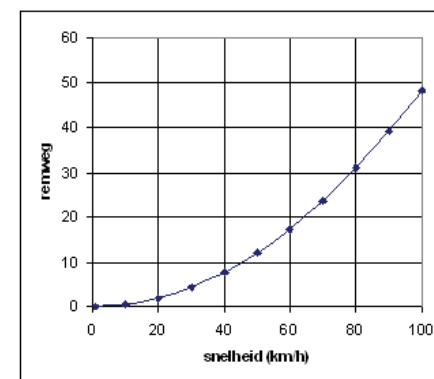
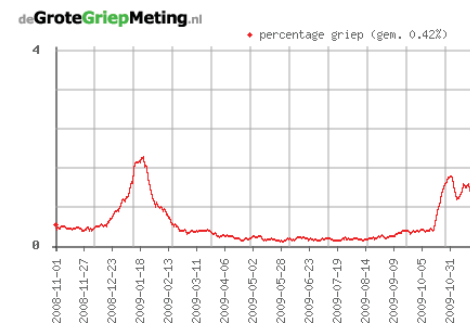
Er zijn veel situaties waarbij het verband tussen twee grootheden niet lineair is. Denk aan:

- Het aantal mensen per week dat ziek wordt bij een griep epidemie.
- Spaargeld dat je op de bank laat staan; bij gelijkblijvende rente komt er elk jaar een hoger bedrag bij.
- De remweg van een auto bij 100 km/uur is niet twee keer die van 50 km/uur, maar veel langer.
- Het brandstofverbruik van een auto neemt sterk toe bij hogere snelheden.
- Wanneer de lengte en breedte van een foto twee keer zo groot worden gemaakt, wordt de oppervlakte van de foto vier keer zo groot; voor een blokkenbouwsel van twee keer zo hoog, twee keer zo breed en twee keer zo diep heb je acht keer zoveel blokjes nodig.
- Een kopje thee koelt in het begin veel sneller af dan later.

Wanneer een dergelijke samenhang in een grafiek wordt uitgezet levert dat plaatjes op zoals in figuur 2. Redeneren met zulke verbanden is lastig. Dat voor kinderen het rekenen met oppervlakte en inhoud moeilijk is, is bekend, maar ook volwassenen hebben moeite om de consequenties van niet-lineaire verbanden te overzien. Denk bijvoorbeeld aan een annuïteitenhypothek. Het lijkt zo eenvoudig: je betaalt 30 jaar in totaal hetzelfde bedrag aan rente plus aflossing. Uitgezet in een plaatje – zie figuur 2 onderaan – blijkt echter dat het aandeel van de rente op een gegeven moment erg snel gaat afnemen. Wie moet beslissen over een hypothek zal rekening moeten houden met het verminderen van de belastingaftrek.

Een ander voorbeeld is de verwarring die er vaak is over het afnemen of constant blijven van de economische groei. Als de groei elk jaar even groot zou moeten zijn houdt dat een exponentieel verband in, zoals in figuur 3, voor een groei van 5% per jaar. Het is duidelijk dat een dergelijke groei op termijn irreeel is. Er kan in feite heel goed sprake zijn van economische groei, terwijl het feitelijke groeipercentage afneemt. Een toename van 100 naar 102 is 2% groei, maar als de groei daarna toeneemt van 102 naar 104 is dat minder dan 2% groei.

Omdat het redeneren over samenhang zo'n belangrijke vaardigheid is, pleiten wij ervoor dit al in het basisonderwijs een veel grotere plaats te geven. Niet op de manier zoals het in het voortgezet onderwijs aan de orde komt, waarbij groei en afname al heel gauw beschreven worden met exponentiële functies, maar op een meer intuïtieve manier, waarbij we kinderen leren om veranderingen te beschrijven als: 'toenemen', 'afnemen', 'sterk stijgen', 'langzaam afnemen', 'gelijk blijven', enzovoort.



figuur 2: voorbeelden van niet-lineaire verbanden

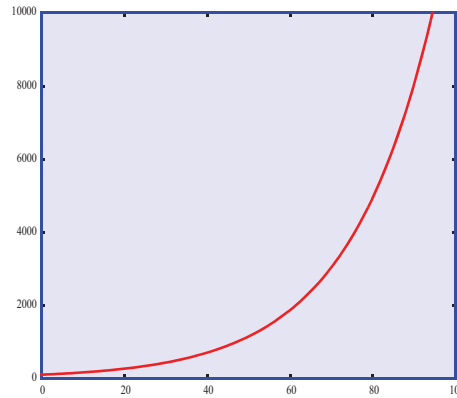
## Variabelen

In plaats van te spreken over de samenhang tussen veranderende grootheden kunnen we beter spreken over de samenhang tussen variabelen. Met de term 'variabele' geven we aan dat een grootheid een waarde kan doorlopen binnen een bepaald bereik.

Denken in termen van variabelen is iets wat kinderen moeten leren. Neem als eenvoudig voorbeeld een kopje thee dat afkoelt wanneer iemand vergeet de thee op te drinken. Wanneer een jong kind constateert dat de thee eerst heet is en daarna lauw wil dat niet zeggen dat 'temperatuur' voor dat kind al een variabele is. Het is pas een variabele als het kind weet dat je temperatuur kunt meten, en dat dat getallen oplevert binnen een hele range. Meten betekent in dit geval dat we een thermometer gebruiken om getallen toe te kennen aan de verschillende toestanden. Daarmee wordt 'hoe warm de thee is' een punt op een temperatuurschaal, een variabele.

Dat leerlingen er moeite mee hebben om een eigenschap te zien als een variabele blijkt onder andere uit het werk van Hancock, Kaput & Goldsmith (1992), die experimenten deden met het computerprogramma *Tabletop*. Dat programma biedt allerlei mogelijkheden om onderzoeksgegevens te analyseren in een vorm die aansluit bij de conceptuele ontwikkeling van kinderen van tien tot veertien jaar. Een van hun constatering was dat leerlingen vaak groepen probeerden te maken op basis van een enkele, specifieke waarde van een eigenschap en niet op een bepaald bereik aan waarden. Wanneer leerlingen in een databestand zochten naar kinderen die grote stappen konden maken zochten ze bijvoorbeeld naar kinderen met stappen van 50 feet ('stapgrootte = 50'), en niet bijvoorbeeld naar kinderen met 'stapgrootte > 45'.

Een ander voorbeeld is een groepje kinderen dat op een gegeven moment bezig was met een onderzoek naar de voorkeur voor typen sportschoenen. Een volwassene suggereerde dat ze ook 'geslacht' als een variabele zouden kunnen



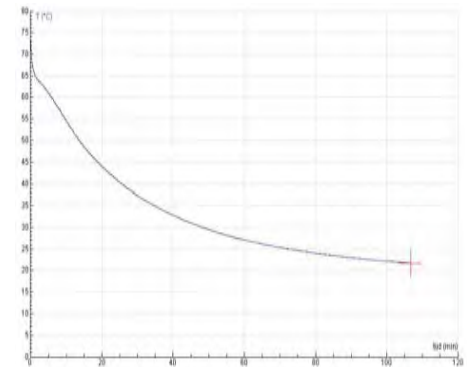
figuur 3: een exponentieel verband; 5% groei per jaar

opnemen in hun gegevensbestand. De leerlingen protesteerden echter en zeiden dat dat overbodig was, omdat ze aan de namen van de ondervraagde kinderen al konden zien wie een jongen was en wie een meisje. Blijkbaar was 'geslacht' voor hen nog steeds een eigenschap van individuele kinderen, en niet een variabele die twee waarden kan hebben en die je ook als zodanig in het bestand kunt opnemen.

In het tweede en derde hoofdstuk van dit boekje richten we ons op het onderwijs rond grafieken. Een belangrijk argument waarom op de basisschool meer gerichte aandacht moet worden besteed aan grafieken, is dat kinderen via het werken met grafieken leren om in termen van variabelen te redeneren. Wanneer leerlingen temperatuur in een grafiek zetten wordt temperatuur een *meetgetal*. In plaats van 'water van 5 graden is erg koud', '35 graden is warm' en '70 graden is heet', wordt temperatuur een eigenschap die tussen bepaalde grenzen kan variëren. Via grafieken leren kinderen te redeneren over veranderingen, bijvoorbeeld: 'de temperatuur neemt eerst *sterk* af en daarna daalt hij veel *langzamer*.'

## Grafieken

Gegevens over één enkele variabele zijn zelden interessant; meten wordt vooral nuttig als we de *samenhang tussen variabelen* gaan onderzoeken. Eerder noemden we al het voorbeeld van het afkoelen van een kopje thee. Wie iets over dat afkoelen wil zeggen moet ook het tijdstip vastleggen waarop de temperatuur gemeten werd. Pas wanneer de twee variabelen – temperatuur en tijd – tegen elkaar worden afgezet levert dat kennis op. Dan kun je bijvoorbeeld constateren dat het afkoelen van de thee niet lineair verloopt, maar dat de afkoeling aan het begin veel groter is dan later. Je kunt daar vervolgens een verklaring voor proberen te zoeken. Blijk-



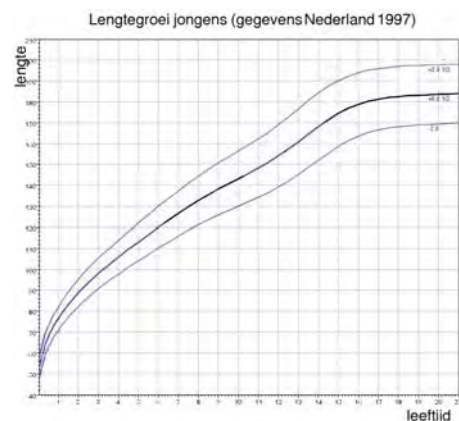
figuur 4: afkoelen van een kopje thee

baar hangt de afkoelsnelheid samen met de grootte van het verschil tussen de temperatuur van de vloeistof en de omgevingstemperatuur.

Om het verband tussen variabelen in kaart te brengen hebben we een krachtig hulpmiddel in grafieken. Een tabel met meetresultaten zegt ons minder dan een visuele voorstelling van die meetresultaten. We realiseren het ons waarschijnlijk nauwelijks omdat we zozeer aan grafieken gewend zijn, maar in een grafiek worden lengte en afstand gebruikt als een metafoor. Variabelen als temperatuur, tijd, snelheid, enzovoort kunnen zelf niet in millimeters worden uitgedrukt, maar het is wel mogelijk om lengte te gebruiken voor het representeren van zo'n variabele. Een punt in de grafiek van figuur 4 bijvoorbeeld geeft de tijd die verlopen is weer als de horizontale afstand en de temperatuur als de verticale afstand.

Dat het werken met grafieken kinderen leert om in termen van variabelen te denken komt onder andere door de lengtemetafoor. Bij *lengte* weten kinderen al vrij vroeg dat je meet op een schaal, omdat je lengte zo makkelijk kunt afpassen. Dat je achter temperatuur of snelheid, of welke andere variabele dan ook, eveneens een schaal kunt denken is veel minder vanzelfsprekend. Uitdrukkingen als 'positie op de schaal' laten, tussen haakjes, goed zien hoe sterk we bij het meten leunen op lengte als metafoor.

Door te meten kunnen we niet alleen veranderingen in kaart brengen, maar ook *spreiding* of *variantie*. We kunnen bijvoorbeeld een grafiek maken van hoe een kind groeit, maar kinderen groeien niet allemaal op dezelfde manier.



figuur 5: groei van jongens in Nederland

Jongens worden tegenwoordig gemiddeld 1,83 m; daar zijn jongens bij die meer dan 2 meter worden, en jongens die juist erg klein blijven. De grafiek in figuur 5 zegt iets over de groei van jongens in Nederland. De middelste lijn geeft een gemiddelde, de lijnen eromheen geven aan wat er nog binnen de normale variatie valt. Dergelijke verschillen zijn er overal, bij alles wat we meten. Net zoals een serie metingen in de tijd ons meer zegt dan één enkele meting, zo zegt een

meting aan een individu ons meer wanneer we ook gegevens hebben over andere individuen.

In het basisonderwijs komen grafieken ook op dit moment al aan de orde, maar een duidelijke leerstofopbouw ontbreekt meestal. Bij verschillende vakken worden leerlingen geconfronteerd met heel diverse vormen van grafieken en het interpreteren van zulke grafieken gaat erg ad hoc. Wij pleiten voor het ontwikkelen van heldere leergangen rond het werken met grafieken. De materialen die besproken worden in hoofdstuk 2 en 3 zijn daarbij bedoeld als een aanzet. Bij het pleiten voor systematischer onderwijs rond grafieken gaat het ons echter niet zo zeer om die grafieken op zich, maar om wat daarachter ligt: kinderen moeten leren redeneren in termen van variabelen, en moeten leren nadenken over verbanden tussen variabelen.

## De rol van ICT

Computers zijn overal en iedereen krijgt er in zijn werk mee te maken. Niet alleen de bedrijfsleider die met een spreadsheet moet kunnen omgaan, maar ook de automonteur met het diagnostische programma op zijn laptop. Ook de bakker die zijn kneedmachines of oven instelt gebruikt computers, al zien ze er niet uit als een standaard-pc. Computers helpen ons om grote hoeveelheden kwantitatieve gegevens te verzamelen en helpen ons beslissingen te nemen op grond van verbanden tussen gegevens. Computers maken die grote stromen gegevens ook hanteerbaar, door ons bijvoorbeeld een gemiddelde te geven in plaats van de ruwe data, of door de gegevens in een grafiek weer te geven.

Computers hebben gemaakt dat kwantitatieve gegevens een nog veel grotere rol zijn gaan spelen in de maatschappij dan vroeger. Het is daarom belangrijk dat leerlingen vertrouwd raken met een kwantitatieve benadering van de werkelijkheid. Een kwantitatieve benadering houdt in dat eigenschappen of kenmerken worden onderscheiden en gekwantificeerd. Dit vraagt om inzicht in het werken met een meeteenheid en inzicht in wat een variabele is.

Een belangrijk aspect daarbij is dat kwantitatieve gegevens dynamisch kunnen worden opgevat. Het gaat enerzijds om als-dan-relaties: 'Als de temperatuur in de kamer boven de 20 graden komt, dan slaat de thermostaat af'; en anderzijds om dynamische samenhangen tussen veranderlijke grootheden: 'Hoe zwaarder iets is, des te meer energie kost het om het te verplaatsen.' Meestal is het ook belangrijk om te weten hoe een samenhang er precies uitziet.



Een specifiek aspect van het werken met een kwantitatieve beschrijving van de werkelijkheid is tenslotte dat er altijd onnauwkeurigheid en onzekerheid is. Je hebt steeds te maken met meetfouten en met variantie. Leerlingen realiseren zich in het algemeen niet dat er altijd een zekere meetfout is en dat een tweede meting daarom soms een iets andere uitkomst op zal leveren. Ze realiseren zich meestal ook niet dat bij productie in een fabriek een bepaalde variantie onvermijdelijk is, al kennen ze wel het verschijnsel van variantie binnen een populatie: niet alle mensen zijn even lang.

Het is belangrijk dat leerlingen zulke inzichten ontwikkelen, want veel getallen die we tegenkomen zijn in feite gemiddelden, en meestal zelfs gemiddelden gebaseerd op een steekproef. Uiteindelijk moeten leerlingen gaan begrijpen dat er bij onzekerheid en onnauwkeurigheid ook sprake is van voorspelbaarheid. We beschrijven die bijvoorbeeld met begrippen als 'spreiding' en 'foutenmarge'.

Samenvattend gaat het dus om competenties als:

- Een kwantitatieve bril kunnen opzetten en in een situatie kijken naar de variabelen/grootheden die daar een rol spelen.
- Meetgetallen die daarbij een rol spelen zien als waarden op een variabele, en ze in die zin tot op zekere hoogte losmaken van de concrete situatie.
- Een situatie dynamisch kunnen opvatten en nadenken over de samenhangen tussen de variabelen die in de situatie een rol spelen. Ook nadenken over wat de consequenties van een bepaalde ingreep of keuze zullen zijn.
- Niet alleen letten op de richting – versterken of tegenwerken – maar ook op de vorm van de samenhang.
- Elementair statistisch inzicht waar het gaat om spreiding en variatie.

Wanneer we leerlingen willen voorbereiden op de toekomst zullen we hen moeten leren op een inzichtelijke manier om te gaan met de mogelijkheden van de computer. De consequentie daarvan is volgens ons dat die computer ook een belangrijke rol moet spelen in het onderwijs. Dat onderwijs moet geen kookboekgebruik van de computer zijn, maar onderzoekend leren, met gebruik maken van speciaal daarvoor ontworpen, didactisch verantwoorde computertools.

In het project 'Reken-wiskundeonderwijs voor de informatiemaatschappij' hebben we onderwijsactiviteiten ontwikkeld waarin de computer een belangrijke rol speelt. Omdat het project bedoeld was als een pilotproject werd geko-

zen voor een brede aanpak: de ontworpen onderwijsactiviteiten hebben uiteenlopende onderwerpen, en er is niet alleen een computertool ontwikkeld – het programma Grafiekenmaker – maar er zijn ook computersimulaties gemaakt. Het uitlijnen tot een meer omvattende leerang ligt nog voor ons. Het project 'Science and technology for the future' (Steff) van de Eindhoven School of Education probeert op dit punt een volgende stap te zetten<sup>(1)</sup>.

In het volgende hoofdstuk bespreken we de kenmerken van het computerprogramma Grafiekenmaker. In het derde hoofdstuk beschrijven we de inmiddels ontwikkelde onderwijsactiviteiten rond dit computerprogramma.



figuur 6: leerlingen aan het werk met het computerprogramma Grafiekenmaker

## 2 Grafiekenmaker

### Een grotere rol voor de computer

Om handen en voeten te geven aan de discussie over hoe het curriculum op de basisschool moet worden aangepast, zijn binnen het project 'Reken-wiskunde-onderwijs voor de informatiemaatschappij' een aantal computerprogramma's en webquests ontwikkeld. De nadruk ligt op het leren werken met grafieken, met name op de mogelijkheid om met grafieken de relatie tussen veranderende grootheden in kaart te brengen. Ook nu al leren kinderen op de basisschool over grafieken, maar het onderwerp krijgt veel minder aandacht dat het in onze ogen zou moeten krijgen. We pleiten er bovendien voor dat het onderwijs rond grafieken anders wordt ingericht.

Een eerste bezwaar is dat er in de bestaande rekenmethoden geen sprake is van een duidelijke leergangopbouw. Het werken met grafieken komt aan de orde als een verzameling losse activiteiten, die niet gebaseerd lijkt op een analyse van de basisconcepten die kinderen moeten leren.

Een tweede bezwaar is dat grafieken op dit moment bijna altijd kant-en-klare plaatjes in het schoolboek zijn en dat het onderwijs bestaat uit het leren interpreteren van zulke representaties. Zelden wordt kinderen gevraagd om zelf een grafiek te tekenen, en nog minder wordt hen gevraagd om zelf een geschikte grafiek te bedenken. Het bezwaar daarvan is dat de fundamentele concepten achter zulke representaties zo niet expliciet aan de orde komen. We zullen in hoofdstuk 3 voorbeelden geven van de discussies die ontstaan als kinderen zelf hun grafieken mogen ontwerpen.

Een derde bezwaar is dat grafieken in de schoolboeken vaak gebaseerd zijn op mooie, ronde getallen. Er zijn bijvoorbeeld 120 kinderen ondervraagd over de inrichting van een speelplaats en precies 40 kiezen voor plan *a*, terwijl 30 voor plan *b* kiezen. Dergelijke getallen maken het rekenwerk eenvoudig en zorgen ervoor dat kinderen snel de relatie met breuken leggen, maar in de echte wereld komen zulke grafieken zelden voor. Een andere benadering lijkt logischer: geef kinderen echte gegevens – misschien gegevens die ze zelf verzameld hebben – en laat hen de computer gebruiken om die gegevens grafisch weer te geven. Het rekenwerk is in dat geval geen probleem, want dat neemt de computer van hen over.

Het is opvallend dat de computer in het huidige onderwijs rond grafieken nauwelijks wordt ingezet. Kranten, televisie en internet bieden ons een overvloed aan gegevens die via de computer zijn verzameld en bewerkt, dus de beste manier om kinderen te leren met zulke gegevens om te gaan lijkt om hen zelf achter de computer te zetten. Als de computer zo'n belangrijke rol gaat spelen in hun latere leven, dan kunnen we niet vroeg genoeg beginnen om die computer ook in het onderwijs een plaats te geven.

## Grafiekenmaker

Grafiekenmaker is de verzamelnaam van een serie computerprogramma's voor groep 7 en 8 van het basisonderwijs. In feite gaat het om verschillende versies van hetzelfde programma. We zullen in dit hoofdstuk de belangrijkste kenmerken van het programma bespreken (zie ook van Galen 2008a en 2008b). In hoofdstuk 3 gaan we in op de onderwerpen die met het programma kunnen worden onderzocht.

Grafiekenmaker heeft een didactisch doel: leerlingen kunnen zich via het programma de basisconcepten van grafieken eigen maken. Het is in dat opzicht heel anders dan een programma als Excel, want Excel is vooral geschikt voor gebruikers die de concepten al beheersen en daardoor beredeneerde keuzes kunnen maken bij alle opties die het programma biedt.

## Losse staafjes representeren afzonderlijke metingen

Een eerste kenmerk van Grafiekenmaker is dat het programma een keuze biedt uit representaties die dicht bij de concrete meetsituatie liggen. We nemen als voorbeeld het meten van temperatuur met een sensor die via de usb-ingang aan de computer is verbonden. Het bovenste plaatje van figuur 7 geeft het scherm tijdens een meetsituatie. Het staafje in het venster rechtsonder geeft de temperatuur van het moment aan. Om de zoveel tijd maakt het computerprogramma als het ware een foto van dat metertje en plaatst die foto in de strook erboven.

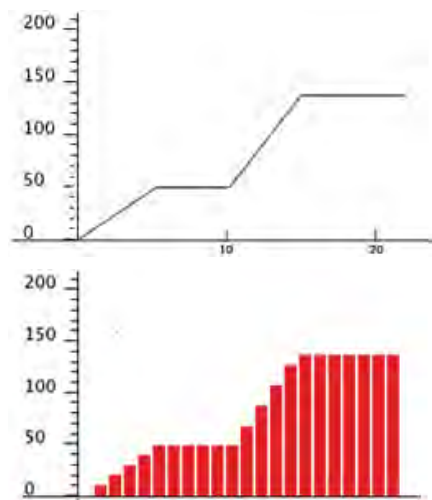
De fotostrook die zo ontstaat biedt een heel directe weergave van het meetproces. Je kunt als gebruiker door de strook heenscrollen en van alle meetmomenten de temperatuur opzoeken. Als weergave van de temperatuurverandering is de fotostrook echter nogal onoverzichtelijk en daarom is het mogelijk ook voor een strook te kiezen waarin de staafjes direct naast elkaar staan (zie het tweede plaatje). De computer kan tenslotte ook een lijngrafiek tekenen (zie het derde plaatje in figuur 7). Zo'n lijngrafiek is abstracter omdat de meetmomenten niet meer apart worden aangegeven.

In de fotostrook en de staafjesgrafiek verschijnt elke meting als een los staafje. Wanneer de gebruiker met de cursor over de staafjes gaat laat de computer zien welke twee getallen bij elk staafje horen. Bij warmte meten zijn dat de temperatuur en het tijdstip van de meting, dat wil zeggen het aantal seconden na het begin. Strikt genomen is er nog geen indeling van de horizontale as; alle metingen worden simpelweg achter elkaar geplaatst.



figuur 7: afkoelen in Grafiekenmaker

We kozen voor een weergave van metingen als losse staafjes omdat het leerlingen houvast geeft bij het redeneren. We kunnen dit toelichten aan de plaatjes uit figuur 8. Het tweede plaatje is gemaakt met het computerspel Treinmachinist dat we later zullen bespreken. De staafjes geven de snelheid van de trein weer en de metingen zijn in het spel om de seconde gemaakt. Het eerste plaatje is een lijngrafiek voor dezelfde situatie.



figuur 8: hoe zie je dat de trein eerst langzaam optrekt en daarna sneller?

Bij beide plaatjes kan de vraag worden gesteld hoe je kunt zien dat de trein eerst langzaam optrekt en daarna snel. Bij het bovenste plaatje is dat lastig onder woorden te brengen. Je hebt een formulering nodig als:

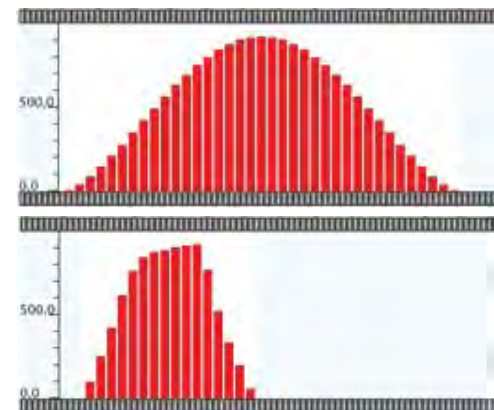
‘De lijn is steiler in het tweede stuk, en dat betekent dat de snelheid van de trein daar in dezelfde tijd meer toeneemt dan aan het begin.’

Bij het onderste plaatje is het veel makkelijker, want je kunt aan het lengteverschil van de staafjes zien hoeveel snelheid er in die ene seconde bijgekomen is. Bij een lijngrafiek moet je weten dat de lijn is gebaseerd op afzonderlijke metingen die je als zodanig niet terugziet in de grafiek. Je moet bovendien ook zelf een tijdseenheid kiezen om iets over steilheid te kunnen formuleren.

Wanneer het gaat om de verandering van een grootheid in de tijd ligt het nogal voor de hand om steeds na hetzelfde tijdsinterval een meting te doen. Het is echter ook mogelijk om met een andere grootheid dan tijd te werken. Een voorbeeld geeft het project over zonne-energie dat we in het derde hoofdstuk zullen bespreken. In dat project onderzoeken leerlingen de relatie tussen de hoek waarin het licht op een zonnecel valt en de stroomopbrengst. Leerlingen meten de stroomsterkte bij verschillende hoeken en voeren die gegevens in op de computer. Wanneer ze meten met een vast interval – bijvoorbeeld om de 5 graden een meting – levert dat een goed te interpreteren grafiek, zie het bovenste plaatje van figuur 9.

Het is echter ook mogelijk om metingen te doen met vrij willekeurig gekozen hoeken, wat een staafjesgrafiek oplevert als die van het onderste plaatje.

Omdat het computerprogramma de meetwaarden simpelweg achter elkaar plaatst kan het kiezen van de meetmomenten een expliciet discussiepunt worden.

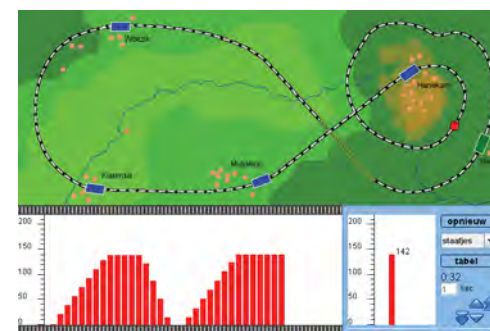


figuur 9: stroomopbrengst en stand van de zonnecel; gemeten om de 5 graden en bij willekeurige standen.

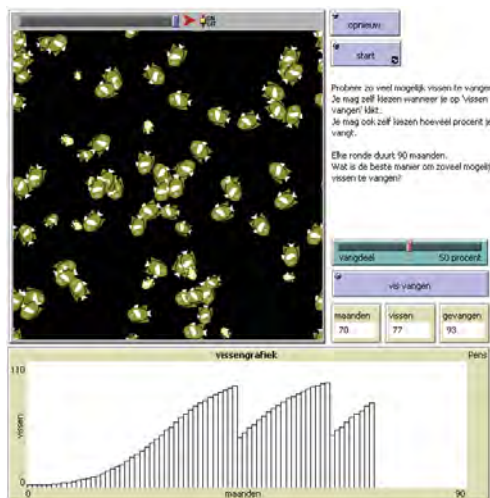
### Dynamische grafieken

Het voorbeeld van de temperatuurmeting laat zien dat de grafiek op een dynamische manier tot stand komt: elke temperatuurmeting zorgt tijdens het meten voor een nieuw staafje in de grafiek. Datzelfde is het geval bij andere versies van het computerprogramma. Het plaatje van figuur 10 komt uit de webquest ‘Treinmachinist’. Boven in het scherm geeft een bewegende rode punt aan hoe een trein over het spoor rijdt. De leerlingen kunnen met de pijltjesknoppen onderaan rechts de trein harder en zachter laten rijden. Het venster rechtsonder toont de snelheidsmeter in de bestuurderscabine, met een staafje dat groter en kleiner kan worden. Bij elke meting – in dit geval om de seconde – wordt een kopie van dat staafje in de grafiek geplaatst.

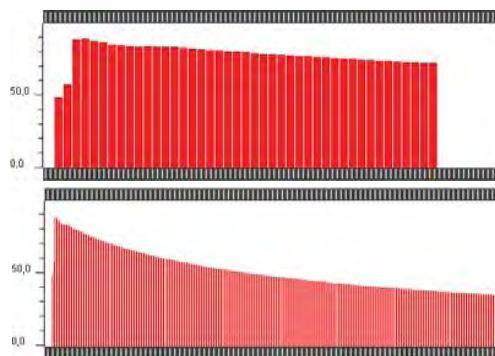
Het plaatje van figuur 11 geeft een scherm uit het spel ‘Visvangst’, waarin het aantal vissen met een wisselende snelheid toeneemt. Het doel van het spel is om binnen de gegeven tijd zoveel mogelijk vissen te vangen. De grafiek onderaan wordt getekend terwijl de leerling het spel speelt en geeft het aantal vissen van elk moment.



figuur 10: het spel Treinmachinist.



figuur 11: het visvangst-spel.



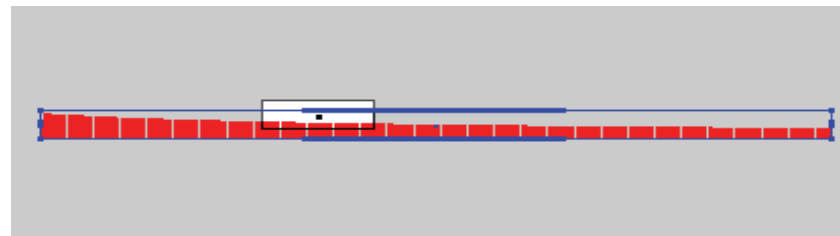
figuur 12: afkoelen; start van de metingen en het totaal van alle metingen na herschalen

De 'zaagtanden' in het voorbeeld zijn ontstaan omdat de leerling drie keer een deel van de vissen heeft weggevangen.

### Inzoomen

Een belangrijke vraag bij gebruik van een grafiekenprogramma is altijd welk deel van de grafiek men in beeld wil krijgen. Soms kiezen computerprogramma's automatisch passende schaalwaarden, maar meestal kan de gebruiker de schaalwaarden ook zelf kiezen. Dat laatste veronderstelt echter nogal wat inzicht. In de leerlijn die ons voor ogen staat is het essentieel dat leerlingen leren nadenken over de schaling van gegevens en daarom gebeurt het inzoomen op een bepaald stuk van de grafiek – dus het veranderen van de schaling – op een heel expliciete manier.

In Grafiekenmaker hebben de staafjes in het begin steeds dezelfde breedte, wat betekent dat leerlingen gedwongen zijn om de schaling te veranderen wanneer er meer dan 50 metingen zijn. De plaatjes in figuur 12 zijn van het afkoelen van een kopje thee. Tijdens het meten van de temperatuur verschijnen er rechts steeds nieuwe



figuur 13: het venster voor het herschalen

staafjes in het venster, terwijl de andere staafjes opschuiven. Op het moment dat alle metingen verzameld zijn is het mogelijk om de schaling zo te veranderen dat alle metingen binnen het venster passen.

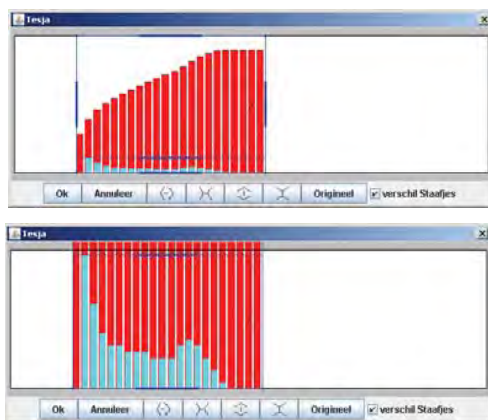
Het herschalen speelt een belangrijke rol in het leerproces dat wij leerlingen willen laten doorlopen. Door hun ervaringen met het indikken van een serie staafjes moeten leerlingen gaan begrijpen dat een lijngrafiek als het ware bestaat uit een oneindig aantal datapunten. De aanname is dat leerlingen door hun ervaringen met de staafjesrepresentatie later in staat zullen zijn om onder een lijngrafiek in gedachten diezelfde staafjes te zien. Dit zal hen helpen in hun redeneringen over de veranderingen die de grafiek weerspiegelt.

We kozen voor een interface die het herschalen voorstelt als indikken en uitrekken. Wanneer de leerling kiest voor inzoomen verschijnt er een extra venster waarin het oorspronkelijke grafiekvenster wordt voorgesteld als een kleine, witte rechthoek. Ook de staafjes worden verkleind weergegeven, maar wel op zo'n manier dat de totale verzameling van meetstaafjes zichtbaar is. Om de staafjes samen staat een rechthoek getekend waar de leerling aan kan trekken en duwen.

Figuur 13 geeft de staafjes van een afkoel experiment weer. De 360 staafjes (een uur lang gemeten, 1 meting per 10 seconden) kunnen smaller worden gemaakt door de rechthoek om de staafjes kleiner te maken, ze passen dan samen in het witte rechthoekje. Wanneer de leerling tevreden is over de herschaling klikt hij of zij op 'OK' en dan wordt de gekozen schaling overgenomen in het gewone grafiekvenster. Op dezelfde manier kan ook de verticale schaling worden aangepast, bijvoorbeeld om beter te zien hoe de staafjes in grootte verschillen.

## Verschilgrafiek

Het is mogelijk om met Grafiekenmaker een verschilgrafiek te tekenen. Het schalingsvenster heeft een knop waarmee verschillen tussen opeenvolgende staafjes worden afgebeeld als staafjes in een andere kleur. De verschilstaafjes komen niet in de plaats van de lengtestaafjes, maar staan ervòr. Wie de verschillen goed wil zien kan de schaling veranderen. In figuur 14 staat het aparte schalingsvenster dat laat zien hoe de verschilstaafjes na herschalen uitvergroot in het normale grafiekvenster zichtbaar kunnen worden gemaakt. De bovenkant van de oorspronkelijke staafjes raakt daarmee buiten beeld, maar het feit dat die staafjes er nog steeds achter staan geeft aan waar de verschilstaafjes vandaan komen, en laat ook zien dat verschilstaafjes het mogelijk maken om preciezer – op een andere schaal – naar verschillen te kijken.



figuur 14: verschilgrafiek

Een onderwerp dat een discussie kan uitlokken over de betekenis en de zinvolheid van zo'n grafiek van verschillen is bijvoorbeeld de 'groeisput' in de puberteit. Vergeleken met de groeisput van baby's en kleuters is die spurt veel geringer, dus om er iets over te kunnen zeggen moeten leerlingen heel precies naar de groeisnelheid kijken.

## 3 Onderwijsactiviteiten

### Opdrachtenseries en webquests

In dit hoofdstuk bespreken we de onderwijsactiviteiten die ontwikkeld zijn binnen het project 'Reken-wiskundeonderwijs voor de informatiemaatschappij'. Alle materialen zijn te vinden op de website <http://www.fi.uu.nl/rekenweb/grafiekenmaker/>

Met het computerprogramma Grafiekenmaker als kern zijn opdrachten ontworpen rond verschillende onderwerpen. Deze hebben deels de vorm van webquests, dat wil zeggen een serie opdrachten met een specifieke opbouw die leerlingen in principe zelfstandig kunnen doorwerken. De webquests zijn te vinden op [www.webquests.nl](http://www.webquests.nl) en [www.rekenweb.nl](http://www.rekenweb.nl). De vragen bij het computerprogramma kunnen worden gedownload en afgedrukt op papier. De webquests zijn geschikt als extra stof voor leerlingen die hun gewone rekenwerk af hebben, maar ze kunnen ook heel goed activiteiten uit het rekenboek rond grafieken vervangen. Naar ons idee leren kinderen het meest als ze de computeropdrachten in tweetallen maken en als de leerkracht vervolgens ruim de tijd neemt voor het bespreken.

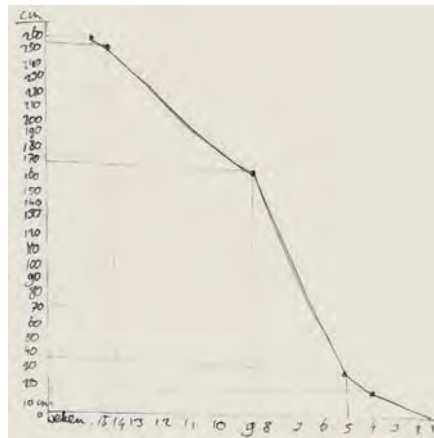
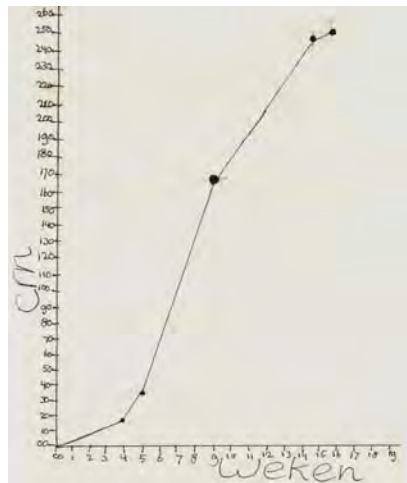
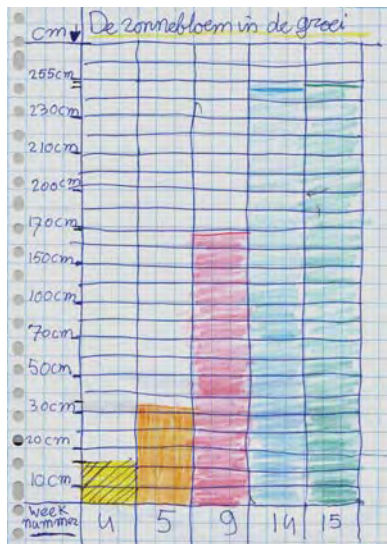
Op dit moment zijn er opdrachten rond de volgende onderwerpen:

- Webquest Treinmachinist. Grafieken van snelheid en afstand.
- Webquest Groeien. Grafieken van lichaamsgroei.
- Opdrachtenserie Afkoelen. Meten van temperatuur.
- Opdrachtenserie Zonnecel.
- Webquest Vissen en Konijnen. Simulaties van populatiegroei.

Voordat we de onderwijsactiviteiten rond de computerprogramma's beschrijven geven we eerst een aantal voorbeelden van wat het oplevert als kinderen zelf een grafiek mogen ontwerpen. De lessen die we bespreken werden gegeven voordat de leerlingen computeropdrachten gingen maken.

### Zelf een grafiek ontwerpen: de groei van een zonnebloem

Leerkracht Lia Oosterwaal begint de les met te vertellen over een zonnebloem die ze geplant heeft in haar volkstuinje. Ze heeft de zonnebloem een aantal keren opgemeten: na 4, 5, 9, 14 en 15 weken. Ze vraagt de leerlingen om een plaatje te bedenken dat de groei van die zonnebloem op een duidelijke manier weergeeft.



figuur 15: door leerlingen gemaakte grafieken van de groei van een zonnebloem; de lengte van de zonnebloem was slechts op vijf momenten gemeten

De leerlingen werken in groepjes en komen uiteindelijk met heel verschillende grafieken. Een paar van hun grafieken staan in figuur 15.

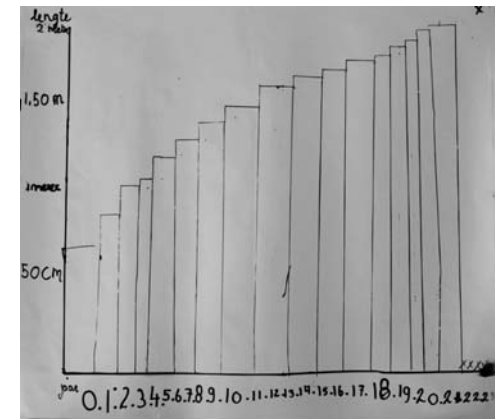
Het vergelijken van de gemaakte grafieken leidde tot een discussie over de vraag wat je aanmoet met het feit dat de lengte van de zonnebloem op een heleboel tijdstippen onbekend is. Hij leidde ook tot een – vrij felle – discussie over het verschil tussen een staafgrafiek en een lijngrafiek, waarbij de kinderen hun eigen keuze met vuur verdedigden. De grafiek van het vierde groepje riep bovendien de vraag op of je de weken per se van links naar rechts moet ordenen, of dat dat alleen maar een afspraak is.

In deze open discussie kwam bijna alles aan de orde waar het bij grafieken om gaat:

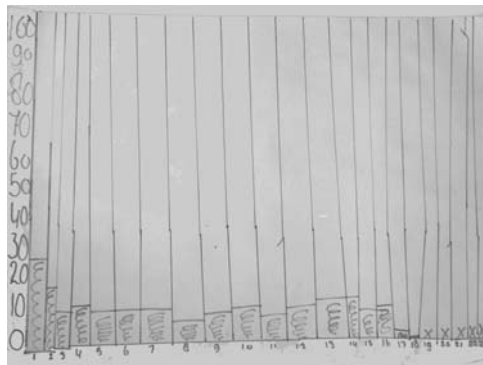
- Je kunt van een staafgrafiek een lijngrafiek maken door de toppen te verbinden.
- Je kunt in een lijngrafiek voor elk punt een waarde aflezen.
- Het probleem dat je bepaalde waarden niet weet blijft ook in een lijngrafiek bestaan, want eigenlijk zou je de gegevens per dag moeten hebben, nee per uur, nee per minuut ...

### Zelf een grafiek ontwerpen: lichaamslengte

Leerkracht Peter Biemans doet in zijn groep 7 een project over hoe je lichaamslengte verandert in de loop van de jaren. Het enige wat hij zijn leerlingen de eerste les in handen geeft is een tabel waarin staat hoe lang hij zelf was bij zijn geboorte en op zijn verjaardagen, tot en met zijn 22e. Nadat de leerlingen in groepjes de tabel onderzocht hebben vraagt de leerkracht of ze een grafiek kunnen tekenen. Ze krijgen in tweetallen een groot vel en mogen zelf beslissen hoe ze hun grafiek vormgeven.



figuur 16: grafiek van de lengte van Peter op zijn verjaardagen



figuur 17: door leerlingen bedachte grafieken van de groei per jaar

elkaar geplakte vellen paste. In de discussie blijkt dat de klasgenoten ook deze grafieken duidelijk vinden. Ze kunnen in ieder geval goed aangeven wat je er uit af kunt lezen.

Net als in de zonnebloemes blijkt de open vraag om de groei van leerkracht Peter in een plaatje weer te geven aanleiding tot een vruchtbare discussie. Met een dergelijke open opdracht dwingen we leerlingen om na te denken over zaken die anders impliciet blijven. Een dergelijke activiteit is een prima voorbereiding op het werken met een computerprogramma, want in een computerprogramma moeten allerlei opties al vooraf ingebouwd zijn en daardoor zijn computeropdrachten soms minder open dan een ontwikkelaar eigenlijk zou

Vanzelfsprekend komen veel groepjes met de lengtegrafiek die je zou verwachten, waarbij sommige tweetallen een staafgrafiek tekenen en andere een lijngrafiek. In figuur 16 is een voorbeeld gegeven. De plaatjes in figuur 17 zijn echter van twee minder voor de hand liggende grafieken. Het zijn beide verschilgrafieken: de leerlingen hebben de lengte bij de geboorte afgetrokken van de lengte op de eerste verjaardag, enzovoort. De eerste van de twee is een normale staafgrafiek. In zo'n grafiek kun je heel direct aflezen in welke jaren leerkracht Peter veel gegroeid is. De onderste grafiek is ook een verschilgrafiek, maar deze leerlingen hebben de verschillen niet naast elkaar gezet, maar achter elkaar. Dat de lijn slingert is simpelweg omdat de lijn anders niet op de twee aan

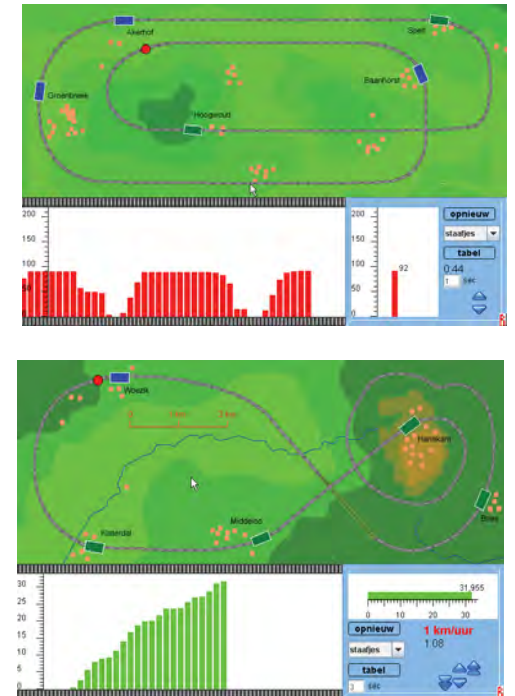
willen. Het programma Grafiekenmaker heeft bijvoorbeeld de optie om de computer een verschilgrafiek te laten tekenen. Een les zoals hierboven is beschreven bereidt daar goed op voor.

### Webquest Treinmachinist

In de webquest Treinmachinist experimenteren leerlingen met een computerspel waarin ze zelf de snelheid van een trein kunnen regelen, en waarbij de snelheid van de trein wordt gerepresenteerd als een in lengte variërend staafje. Het programma is zo ingericht dat er elke seconde een 'foto' van het snelheidsstaafje wordt gemaakt en dat deze staafjes achter elkaar gezet kunnen worden als een soort grafiek (zie figuur 18).

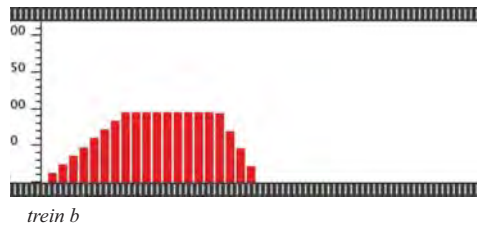
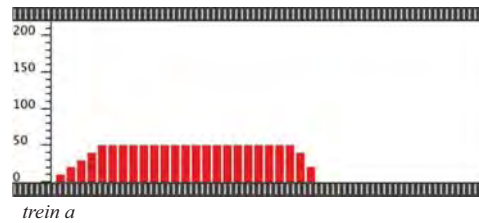
De webquest begint met een spel waarin het er om gaat de trein zo snel mogelijk een rondje te laten rijden. De trein moet bij elk station op tijd stoppen en mag de maximumsnelheid niet overschrijden. Na deze introductie volgen vragen over de snelheidsgrafieken die het programma tekent. De leerlingen kunnen bij deze vragen experimenteren op een simpele baan zonder tussenstops.

Bij de laatste opdrachten van de webquest tekent de computer niet meer een grafiek van de *snelheid*, maar van de *afstand* die de trein aflegt. De vragen gaan in op de verschillen met een snelheidsgrafiek.



figuur 18: Het spel Treinmachinist. Bovenaan met een grafiek van de snelheid, onderaan met een grafiek van de afgelegde afstand.





figuur 19: welke trein reed langer?  
en welke trein reed verder?

Bij het testen van de webquest bleek dat de staafjesrepresentatie leerlingen hielp om onder woorden te brengen wat er precies gebeurt bij optrekken en afremmen (van Galen en Gravemeijer, 2008). Interessant was verder vooral hoe leerlingen reageerden op de lastige vragen bij de twee plaatjes in figuur 19. De eerste vraag was welke trein het *langst* gereden had, de vraag daarna welke trein het *verste* gereden had. Dat trein *a* het *langst* gereden had zag iedereen, maar over de vraag welke trein het *verste* reed waren de

leerlingen het niet eens. Er waren kinderen die kozen voor *a*, want 'als je langer rijdt kom je ook verder'. Er waren ook kinderen die kozen voor *b*, want 'die trein reed harder, en als je hard rijdt kom je verder'. Een meisje uit groep 8 woog de twee argumenten heel netjes tegen elkaar af. Ze koos voor *b*, 'want het scheelt maar 4 seconden, en hij rijdt twee keer zo snel!'.

Het probleem zette leerlingen aan het denken hoe je een precies antwoord zou kunnen vinden. In verschillende groepen kwamen kinderen met het voorstel om de lengtes van de staafjes bij elkaar te nemen. 'Je kunt misschien alle staafjes boven op elkaar zetten', zei een leerling. Dat is een goede oplossing, want elk staafje is ook een maat voor de afstand die de trein aflegt.

Redeneren over verschillen tussen staafjes en over de som van een reeks van staafjes, loopt vooruit op bewerkingen als differentiëren en integreren die pas in het voortgezet onderwijs aan de orde komen. Natuurlijk staan de redeneringen van deze basisschoolleerlingen nog ver af van zulke wiskundige operaties, maar hun ontdekkingen zijn wel stappen in die richting.

## Webquest Groeien

Groei je als kind altijd even hard? Wanneer stop je met groeien? Groei je in de puberteit inderdaad extra hard? Groeien alle kinderen op dezelfde manier? Kun je voorspellen hoe lang iemand gaat worden? Deze vragen komen aan de orde in de webquest Groeien. Leerlingen onderzoeken met het computerprogramma de groei van twee meisjes en twee jongens. Ze vergelijken hun groei met de 'gemiddelde' groeicurve van kinderen in Nederland. Figuur 20 laat een scherm van de webquest zien. In figuur 21 staat het werk van twee meisjes, Manouk en Rosa.



figuur 20: webquest Groeien

3. fenna groeit heel hard. veel harder dan tesja.  
Toen tesja <sup>ongeveer</sup> 17 jaar was stopte ze ongeveer met  
groeien.  
fenna stopte pas met 17. fenna is nu ook veel  
groter 13cm.  
abdell en bas groeiden ongeveer gelijk on  
maar ~~bas~~ bas bleef steeds iets groter  
abdell is nu 21 184  
bas is nu 22 188

figuur 21: Manouk en Rosa vergelijken de groei van de vier kinderen in de webquest Groeien

## Metten van temperatuur

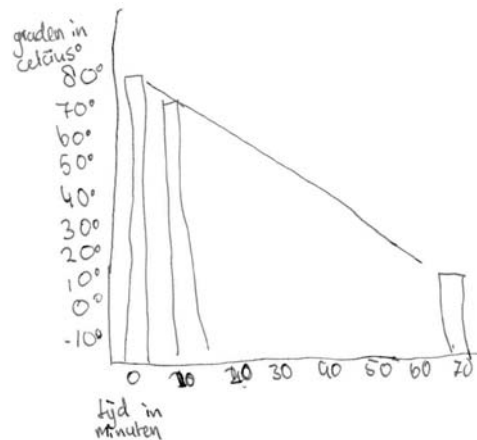
De 'Eurosense' (figuur 22) is een sensor waarmee temperatuur, lichtsterkte en geluidsterkte kan worden gemeten. Hij is speciaal ontwikkeld voor het basisonderwijs<sup>(2)</sup>. De Eurosense wordt via de usb-ingang aan de computer gekoppeld. Een goed onderwerp voor een grafiekenleergang is kinderen te laten onderzoeken wat er gebeurt wanneer een kopje thee afkoelt. Wanneer we kinderen vooraf vragen te voorspellen wat er zal gebeuren, tekenen de meeste kinderen een grafiek waarin de temperatuur lineair afneemt, zoals in de grafiek in figuur 23. In feite koelt thee in het begin sneller af dan later, dus volgens een gebogen lijn.

Leerkracht Rein van Bavel deed eerst in zijn klas – groep 7 – het experiment met het kopje thee en vroeg daarna de leerlingen in groepjes een eigen experiment te bedenken en uit te voeren. De opdracht was om twee situaties met elkaar te vergelijken. De kinderen bedachten onder andere de volgende experimenten:

- Koelt een beker heet water die je in zand zet minder snel af dan een beker water die je gewoon op tafel zet?
- Koelt heet water in een thermosfles met ijs eromheen toch langzamer af dan in een gewone, maar dichtgeplakte beker?



figuur 22: de Eurosense sensor voor het meten van temperatuur, geluidsvolume en hoeveelheid licht



figuur 23: hoe zal een kopje thee afkoelen, denk je?

- Maakt het verschil of het water afkoelt in een ijzeren beker of in een stenen beker? De bekers werden allebei eerst in de vriezer gezet.
- Gaat het afkoelen anders als je een heleboel zout in het water doet?

Bij die laatste vraag wisten ook de leerkracht en de begeleider vooraf niet wat er zou gebeuren. Zout in het water bleek in feite geen verschil te maken, behalve dat het water wat extra afkoelde op het moment dat er zout in het water werd gegooid.

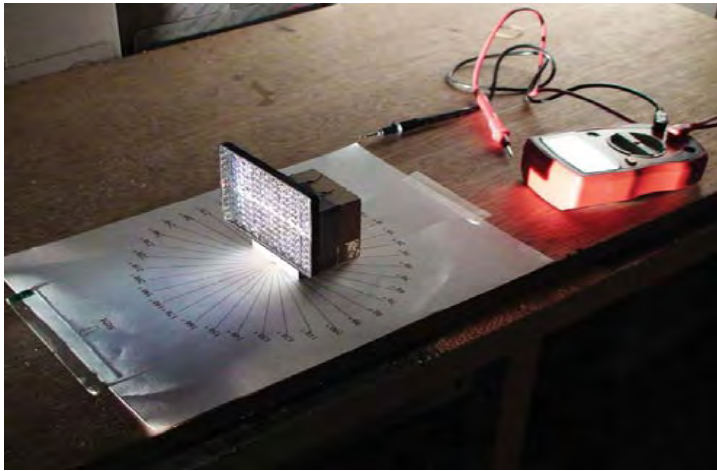
Het doorspreken van mogelijke experimenten laat mooi zien welke ideeën kinderen hebben over warmte en warmteverlies. Kinderen dachten bijvoorbeeld dat warmte alleen aan de bovenkant van een beker zou verdwijnen, omdat de beker daar open is. De leerlingen die een beker van ijzer en een stenen beker met elkaar wilden vergelijken dachten dat de ijzeren beker het water langer warm zou houden, omdat ijzer zelf ook sneller warm wordt.

Wat betreft de grafieken werd duidelijk dat afkoelgrafieken steeds gekromd zijn: in het begin gaat het afkoelen snel, en later gaat het langzamer. Ook werd duidelijk dat de temperatuur daalt totdat het water even warm is als de kamer; er waren leerlingen die eerst dachten dat het water bijvoorbeeld ook tot 5 of 0 graden kon afkoelen.

## Zonnecel

In dit klassenproject is de vraag hoe je een zonnecel zo kunt neerzetten dat hij zoveel mogelijk energie opwekt. Leerlingen voeren een experiment uit waarbij ze de hoek ten opzichte van de lichtstralen variëren en dan de stroomsterkte meten. Ze doen dat zowel met een echte zonnecel, als in een computersimulatie. We kozen dit onderwerp om een aantal redenen:

- De onderwijsactiviteiten die we hiervoor beschreven hadden steeds de tijd als één van de variabelen. Bij de zonnecelopdrachten gaat het om de relatie tussen andere variabelen, namelijk de stand van een zonnecel en stroomopbrengst.
- Het gaat om een actueel onderwerp – alternatieve energiebronnen – en een onderwerp dat kinderen interessant vinden.
- Het onderwerp heeft naast het grafiekenaspect een directe relatie met wetenschappelijke begrippen als oppervlakte en hoek.
- Vanuit het experiment met de zonnecel kan een relatie gelegd worden met vragen als: waarom is het bij ons minder warm dan op de evenaar?, waarom is het bij ons in de zomer warmer dan in de winter?

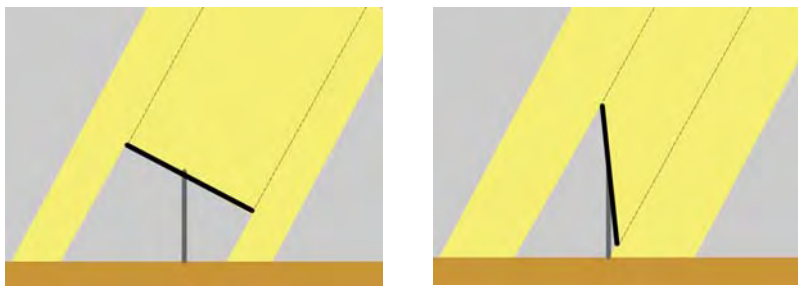


figuur 24: opstelling voor het meten van de stroomopbrengst van een zonnecel bij verschillende invalshoeken van het licht

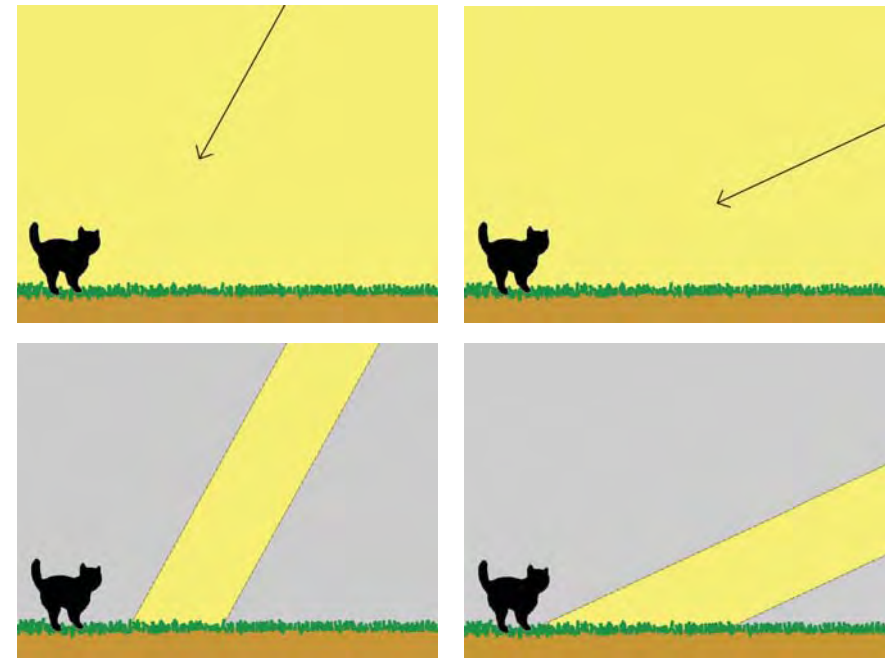
Eén van de doelen is dat leerlingen gaan begrijpen welke rol hoek en oppervlakte spelen. Als de zonnecel loodrecht op de richting van het licht staat, profiteert de cel maximaal van het licht, maar als de cel gedraaid staat wordt een smallere lichtbundel benut. De plaatjes van figuur 25 illustreren dat.

Het linkerplaatje van figuur 25 is een bundel licht getekend met de zonnecel loodrecht op de baan van het licht. Met lijnen is aangegeven welk deel van de lichtbundel op de zonnecel valt. In het rechterplaatje is de zonnecel gedraaid. De zonnecel vangt nu een kleiner deel van de lichtbundel.

Bij vragen als waarom het aan de evenaar warmer is, en waarom het in de zomer warmer is hoort een soortgelijke verklaring. Kinderen en volwassenen



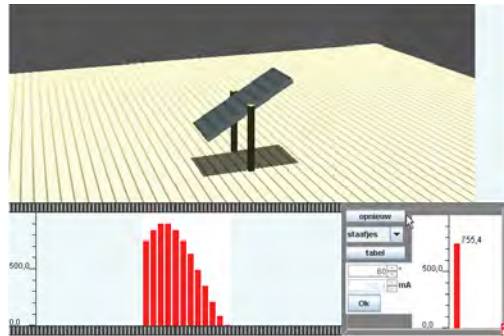
figuur 25: de hoeveelheid licht op de zonnecel varieert met de invalshoek



figuur 26: pas wanneer je uit het zonlicht in gedachten een bundel isoleert zie je het effect van de hoek van inval.

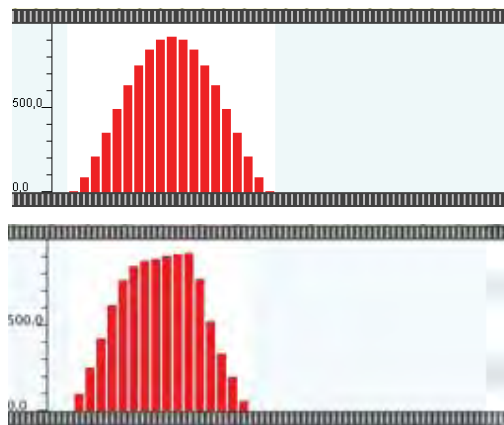
zullen vaak niet verder komen dan dat het te maken heeft met de stand van de zon (van Galen 2010). Lastig voor een meetkundige verklaring is dat de zon onze omgeving helemaal belicht, hoe hij ook aan de hemel staat. Pas wanneer we uit al dat zonlicht in gedachten een bundel isoleren zien we het verschil. De plaatjes links in figuur 26 geven de stand van de zon op 21 juni, de plaatjes rechts op 22 december. Als we een bundel zonlicht tekenen die op beide dagen even breed is, zoals in de onderste plaatjes in figuur 26, dan zien we in de onderste plaatjes dat diezelfde bundel op midwinter een veel groter stuk aarde verlicht.

De leerlingen doen eerst zelf een experiment met een zonnecel, een lamp en een voltmeter. De foto in figuur 24 laat de opstelling zien. De hoek van de zonnecel kan veranderd worden door het blok hout waar hij op geplakt is, te draaien. In de situatie van de foto werd het experiment gedaan in een opslagruimte zonder ramen; een diaprojector was de lichtbron. De verzamelde gegevens kunnen met een versie van Grafiekenmaker in een grafiek worden gezet.



figuur 27: de zonnecelsimulatie.

Het experiment wordt herhaald in de computersimulatie die hiernaast staat afgebeeld. De zonnecel kan in verschillende standen worden gezet en de stroomsterkte die dat oplevert varieert mee. Door op de OK-knop te klikken wordt een meting als staafje toegevoegd aan de grafiek. De grootte van de schaduw onder de zonnecel heeft een directe relatie met de opbrengst van de cel, want de schaduw laat zien welk deel van het zonlicht door de cel wordt opgevangen.



figuur 28: metingen in de zonnecelsimulatie; het bovenste plaatje is gemaakt met metingen om de 10 graden, het onderste plaatje bij willekeurige standen

Een van de argumenten om het experiment eerst in het echt te doen en daarna in een simulatie is dat de simulatie een situatie biedt zonder ruis. De grafiek die het experiment met de echte zonnecel opleverde kan vergeleken worden met de ideale grafiek van de simulatie. Een ander argument is van organisatorische aard: wanneer leerlingen niet gewend zijn om een dergelijk experiment zelfstandig uit te voeren kan het klassikaal worden gedaan. De leerlingen herhalen daarna, als het ware, het experiment op de computer.

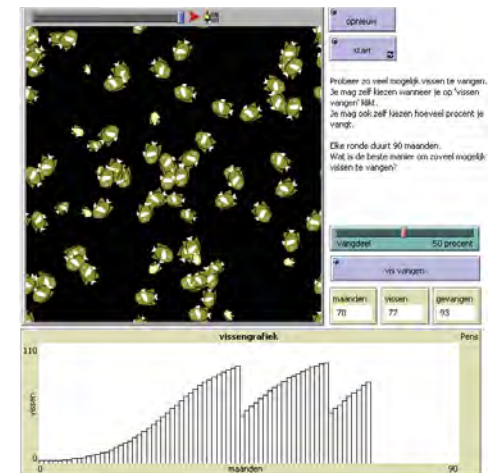
In de simulatie worden leerlingen vrijgelaten om zelf te kiezen hoeveel 'metingen' ze doen, en bij welke hoeken. De grafiek in het bovenste plaatje van figuur

28 is gemaakt met hoeken van 0, 5, 10, 15 graden, enzovoort. Wanneer je willekeurige metingen doet krijg je een grafiek die slecht te interpreteren valt (onderste plaatje). Een belangrijk punt in de klassikale discussies zal zijn of het verschil maakt welke hoeken je kiest.

### Simulaties populatiegroei

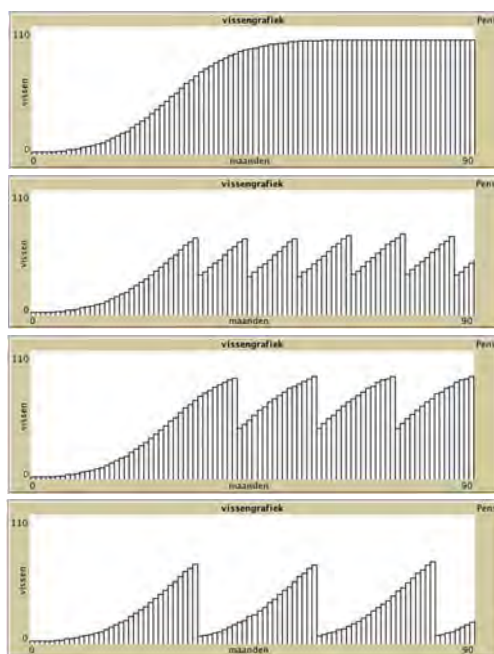
In de webquest Vissen en Konijnen staan twee simulaties centraal. De eerste simulatie heeft de vorm van een spel: je moet zoveel mogelijk vissen zien te vangen binnen een bepaalde tijd. Telkens wanneer je vissen hebt gevangen herstelt de visstand (populatie) zich weer. De tweede simulatie gaat over konijnen en gras. De konijnen hebben voedsel nodig om in leven te blijven en om zich voort te kunnen planten, maar als het gras niet snel genoeg aangroeit eten de konijnen al het gras op en sterven daarna. In beide simulaties kunnen de leerlingen het effect van hun keuzes onderzoeken via de grafieken die de computer tekent.

De webquest begint met een spel dat 'Visvangst' heet en een simulatie is van de groei van een vissenpopulatie. De bedoeling van het spel is om zoveel mogelijk vissen te vangen binnen 200 'maanden'. Je vangt ze door op zelfgekozen tijdstippen op de vangknop te klikken, waarbij je als speler ook de grootte van het vangdeel mag bepalen. In de grafiek van het plaatje van figuur 29 is als voorbeeld te zien dat een kind inmiddels een paar keer op de knop 'vis-vangen' heeft geklikt. Het spel begint steeds met een paar vissen. Na elke vangst herstelt het aantal vissen zich weer. Wat de leerlingen in feite moeten ontdekken is dat de snelheid waarin de visstand zich herstelt, afhangt van het aantal vissen dat in de zee is overgebleven. Na het spel beantwoorden de leerlingen vragen over de snelheid waarin het aan-



figuur 29: het spel Visvangst

tal vissen toeneemt en over hoe je de snelheid van die verandering kunt aflezen in de grafieken.



figuur 30: Grafieken bij het spel Visvangst. De eerste grafiek laat zien wat er gebeurt als er geen vissen gevangen worden.

Bij het zoeken naar een goede strategie gaat het om de vraag of het tijdstip waarop je vissen vangt ertoe doet, en de vraag wat het effect is van het groot of klein maken van het vangdeel. Een fout die leerlingen in het begin vaak maken is dat ze te snel beginnen met vissen te vangen. Ze houden dan weinig vissen over en weinig vissen krijgen weinig jongen. Uiteindelijk vang je op deze manier niet veel. Soms maken leerlingen zelfs de fout om alle vissen weg te vangen.

Om een goede strategie te ontwikkelen moeten leerlingen op de grafiek gaan letten. Sommige kinderen zijn zo verstandig ook een keer een ronde te doen waarin ze helemaal niets vangen. De grafiek die je dan krijgt is het bovenste plaatje in figuur

30. Te zien valt dat het aantal vissen eerst langzaam toeneemt, dan steeds sneller en aan het eind neemt de groei ook weer af. Een dergelijke groeicurve komt in de natuur veel voor. Niet alleen groeien populaties vaak op deze manier, maar hij is ook typerend voor de groei van planten.

De bedoeling is dat leerlingen uiteindelijk tot redeneringen komen als:

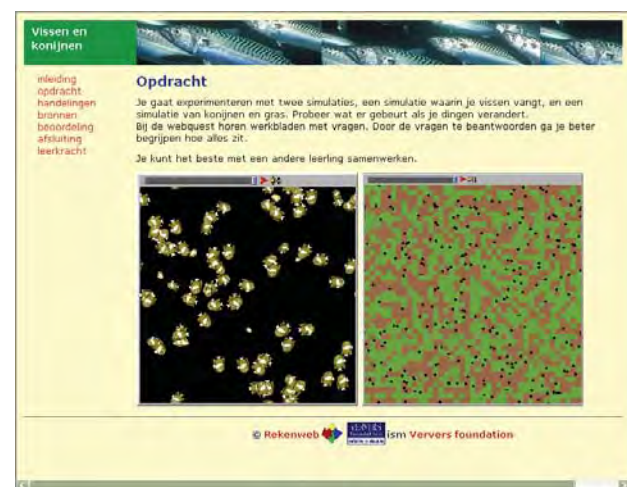
‘Als er weinig vissen zijn, komen er ook weinig vissen bij. Je kunt het beste wachten tot er veel vissen zijn en dan zorgen dat er nog behoorlijk wat overblijven. Het heeft echter geen zin om heel lang te wachten, want later komen er weer minder snel vissen bij.’

De drie grafieken waarbij vissen zijn weggevangen zijn voorbeelden van grafieken die kinderen krijgen als ze een consequente strategie volgen, zoals: ‘50

procent vangen als het aantal vissen gegroeid is tot 70’ (het tweede plaatje). Niet alle strategieën zijn even effectief. Voor een optimale vangstrategie moet je in de buurt van het omslagpunt blijven, want dat is het punt waarin de toename van het aantal vissen het grootst is.

Nadat de kinderen het spel hebben gespeeld volgen vragen over vangstrategieën, steeds aan de hand van plaatjes van de grafiek. Het gaat ons er vooral om dat kinderen de grafiek leren interpreteren in termen van langzame en snelle verandering.

Een andere simulatie binnen dezelfde webquest gaat over konijnen en gras. Konijnen eten het gras, maar het gras heeft tijd nodig om zich te herstellen. Ook hier draait alles om het interpreteren van grafieken. Die grafieken zijn bij een dergelijke simulatie geen statische plaatjes, maar een representatie die kinderen staafje voor staafje zien ontstaan..



figuur 31: de webquest Vissen en konijnen

## 4 Tenslotte

De hiervoor beschreven onderwijsactiviteiten zijn ontwikkeld binnen het project 'Reken-wiskundeonderwijs voor de informatiemaatschappij.' Het doel van het project was om voorbeelden te ontwikkelen van reken-wiskundeonderwijs rond het representeren van verandering. De computer diende een centrale rol te spelen in die activiteiten.

In het project is gekozen voor het ontwikkelen van wat onderwerp betreft nogal uiteenlopende activiteiten. Het zijn op zichzelf staande webquests geworden, met een of meer lessen om de webquest in te leiden. De activiteiten zijn in hun huidige vorm direct bruikbaar in de onderwijspraktijk, maar kunnen ook als bouwstenen worden ingezet voor een nog te ontwikkelen meer systematische leergang. Het project 'Science and Technology for the Future' van de Eindhoven School of Education (ESoE) is in dat opzicht een voortzetting van het nu afgeronde project. Binnen het ESoE-project wordt in eerste instantie gewerkt aan een leergang rond het onderwerp snelheid.

Zoals de naam al aangeeft - 'Reken-wiskundeonderwijs voor de informatiemaatschappij' - was het verder liggende doel van het project een bijdrage te leveren aan de discussie over het curriculum van de basisschool. De snelle en ingrijpende veranderingen door de informatie- en communicatietechnologie vragen om substantiële veranderingen in het onderwijs, ook in het basisonderwijs. De ontwikkelde onderwijsactiviteiten laten, hopen we, zien hoe de computer voor kinderen als onderzoeksinstrument kan functioneren. Leerlingen doen daarmee ervaringen op die hen voorbereiden op een toekomst waarin ze de computer met inzicht in kunnen zetten.

## Literatuur

- De Bock, D., Van Dooren, W., Janssens, D., & Verschaffel, L. (2002). Improper use of linear reasoning: an in-depth study of the nature and irresistibility of secondary school students' errors. *Educational Studies in Mathematics*, 50, 311-334.
- Galen, Frans van & Koeno Gravemeijer (2008). Experimenteren met Grafieken. *JSW - Jeugd in School en Wereld*, jrg 93, 16-21.
- Galen, Frans van (2008a). *A tool for analysing change*. Paper ISDDE conferentie, Egmond aan Zee, Juni 2008.
- Galen, F. van (2008b). Ontwerpbeslissingen bij het ontwikkelen van het computerprogramma 'Grafiekenmaker'. *Panama - Post; Reken-wiskundeonderwijs: onderzoek, ontwikkeling, praktijk*, 27, 3/4, 33-41.
- Galen, Frans van (2010). Waarom is het in Marokko warmer? *Volgens Bartjens* jrg. 29, 5.
- Gravemeijer, K. (2009) Leren voor later; toekomstgericht science- en techniekonderwijs voor de basisschool. Introerede ESoE, Eindhoven, 20 maart 2009.
- Hancock, C., Kaput, J.J., & Goldsmith, L.T. (1992). Authentic inquiry with data: Critical barriers to classroom implementation. *Educational Psychologist*, 27, 337-364.
- Levy, Frank & Dick Murnane (2004). *The new division of labor: How computers are creating the next job market*. Princeton University Press.

## Noten

- (1) Het project 'Science en technology for the future' (Steff) wordt uitgevoerd binnen het Kenniscentrum Wetenschap en Techniek Zuid (KWTZ), waarvan de Eindhoven School of Education (ESoE) de penvoerder is. Doel is het ontwikkelen en onderzoeken van innovatieve onderwijseenheden wetenschap en techniek in het basisonderwijs, met daarbij passende modules voor pabo-onderwijs en professionalisering.
- (2) Informatie over de EUROsense vindt u op de website van CMA: <http://www.cma.science.uva.nl>, onder 'hardware' en 'interfaces'.