Oplossing van een betaalsom - spiegel van onderwijs

A. Noteboom, A. Treffers — Vakgroep OW & OC, RU Utrecht
K. Buys — SLO, Enschede

We legden ruim honderd leerlingen uit begin groep zes de volgende betaalsom voor:

'Sanne koopt een walkman van *f* 189,-
Ze betaalt met een briefje van 250 gulden
Hoeveel krijgt zij terug?'

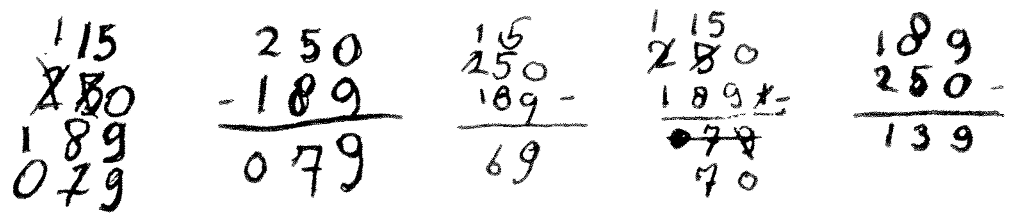
Met elkaar bleken niet minder dan 25 oplossingwegen te worden gevolgd! Globaal zijn ze in drie categorieën te verdelen:

1. Methode(n) van cijferend aftrekken 'onder elkaar'.
2. Methoden van (hoofd-)rekenen naast elkaar' volgens een standaard aanpak.
3. Methoden van handig rekenen met op de context en de getallen afgestemde rekenwijzen..

In het volgende zal kort iets over deze drie categorieën van rekenen worden gezegd. En tevens zullen per categorie enkele kanttekeningen over het achterliggende onderwijs worden gemaakt. Want vaak vinden we in bepaalde oplossingen en de onhandigheden en fouten erin, bepaalde tekortkomingen van het door ons gegeven onderwijs (op basis van een bepaald leerboek) scherp weerspiegeld. Laten we maar eens in de spiegel kijken.

Cijferen

Veertig procent van de door ons onderzochte groep (vier klassen, twee verschillende methoden) loste de walkman-som cijferend op. En veertig procent daarvan maakte hem fout. Dat laatste is op zich misschien niet schokkend, omdat het overeenkomt met het bekende beeld: de helft van de leerlingen in de middenbouw blijkt het aftrekalgoritme nog niet goed te beheersen. En ook de gemaakte fouten zijn bekend: verwisseling van aftrektal en aftrekker, kleinste getal van grootste aftrekken ongeacht de volgorde, en bij het aftrekken van nul consequent verkeerde inwissel-handelingen verrichten (fig.1).



Figuur 1

Maar het eerstgenoemde feit, namelijk dat veertig procent de cijfermethodiek kiest, is wellicht schokkend of in ieder geval onthullend. De oplossing kan immers veel makkelijker via handig doortellen van 189 naar 250 worden gevonden, waarover straks meer. Naar aanleiding van de genoemde feiten stellen we de volgende vragen over het onderwijs:

1. Het aanleren van cijferalgoritmen voor optellen en aftrekken start per traditie begin groep vijf; wordt door dit vroege begin het inzichtelijke hoofdrekenen niet sterk naar de achtergrond gedrongen?

2. Zou het aftrekalgoritme niet wat inzichtelijker onderwezen kunnen worden, zodat de goedscore aanmerkelijk hoger komt dan de huidige vijftig à zestig procent in de middenbouw?

Wat de eerste vraag betreft: de algemene trend in de allernieuwste (herziene) methoden is inderdaad dat in groep vijf de nadruk op het hoofdrekenen wordt gelegd. Wat betekent dat het cijferen helemaal niet of pas aan het einde van dat leerjaar aan de orde wordt gesteld. Naar onze mening een didactisch goed verantwoorde maatregel. Want daarmee is het belangrijkste doel van hoofdrekenen gediend en ook het cijferen kan er van profiteren. We zullen de laatste opmerking nader toelichten en daarmee tevens de tweede vraag beantwoorden.

Hoofdrekenen geeft namlijk goed inzicht in de structuur van de getallenrij en in de orde van grootte van getallen, dus ook inzicht in de positionele schrijfwijze. Met deze kennis gewapend zou de aftrekking 250 minus 189 'onder elkaar' als volgt worden aangepakt.

250	200 (+) 50 (+) 0	200 (+) 40 (+) 10	100 (+) 140 (+) 10
189 –	100 (+) 80 (+) 9 –	100 (+) 80 (+) 9 –	100 (+) 80 (+) 9 –
			60 + 1

De aftrekking van bijvoorbeeld 140 – 80 levert weinig problemen op als het hoofdrekenen behoorlijk wordt beheerst en de uiteenlegging in honderd- en tientallen en eenheden evenmin. Vertrekkend vanaf deze splitsingen kan vervolgens de aftrek-handeling worden verkort en de schrijfwijze eveneens. Een geleidelijk proces dat tenslotte op het standaardalgoritme uitkomt. Voor andere, meer geavanceerde ontwikkelingen van de aftrekprocedure verwijzen we naar de Proeve deel 2.[1]

Ten slotte nog een opmerking over de verwisseling van aftrektal en aftrekker (189–250). Deze is minder ondoordacht dan wellicht op het eerste gezicht lijkt. Vat men namelijk aftrekken op als verschil bepalen dan maakt het immers niet uit vanaf welke kant men dat verschil, die afstand tussen 189 en 250 bepaalt, zoals ook blijkt uit het hoofdrekenende vooruit tellen vanaf 189 of terugtellen van 250. Alleen past deze strategie niet bij de cijferhandelingen van het aftrekken die gebaseerd zijn op de conceptie van aftrekken als eraf nemen.

Standaard-hoofdrekenen

De meest gebruikte vorm van standaard-hoofdrekenen die de leerlingen toepasten, is die als aangegeven in figuur 2.

250–100= 150 – 80=70–9= 61

Figuur 2

Correcter genoteerd met pijlentaal:

$$250 \xrightarrow{-100} 150 \xrightarrow{-80} 70 \xrightarrow{-9} 61$$

Ook dat is een standaardalgoritme, maar dan voor het rekenen 'achter elkaar' en gebaseerd op hoofdrekenen per deel of voor het geheel - vandaar de term standaard-hoofdrekenen, ook wel aangeduid als hoofdrekenen 1.

Ongeveer twintig procent van de leerlingen die wij onderzochten volgde deze weg of een variant ervan. Daarvan maakte twintig procent een rekenfout.

Willen we dat leerlingen vlot op genoemde wijze kunnen rekenen dan is het nodig dat ze

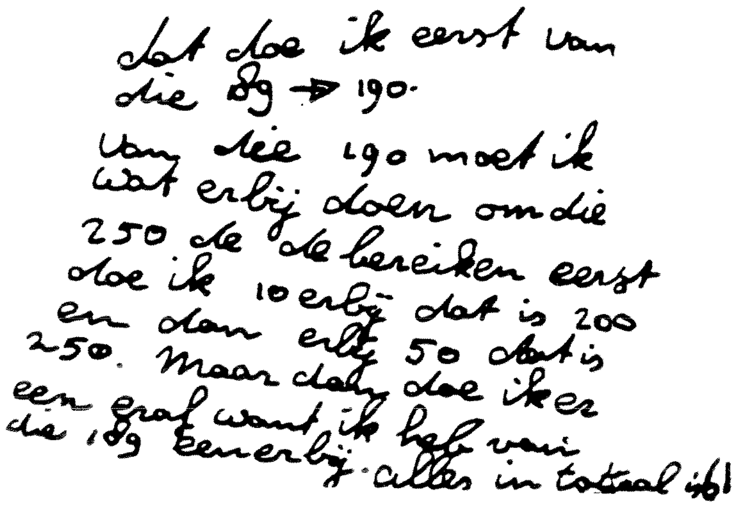
zich vlot over de getallenlijn kunnen bewegen en elementaire optellingen en aftrekkingen moeiteloos en vlug kunnen uitvoeren.
Om deze vaardigheid te oefenen kunnen we leerlingen opgaven als:

- spring met zo weinig mogelijk sprongen van honderd, tien en één naar 189, naar 250, enzovoort;
- spring vanaf 250 met sprongen van honderd, tien en één 189 terug; doe dat ook met zo weinig mogelijk sprongen;
- spring met zo weinig mogelijk sprongen van tien en één vanaf 189 naar 250.

Met deze oefeningen wordt niet alleen de structuur in de getallenlijn heel helder en het standaard-hoofdrekenen beoefend, maar ook het handige, flexibele hoofdrekenen komt hier aan z'n trekken, waarover nu meer.

Handig hoofdrekenen

Handig is het bijvoorbeeld om '250 eraf 189' uit te rekenen via $250 \xrightarrow{-200} 50 \xrightarrow{+11} 61$, dus door twee sprongen van honderd achteruit te maken en één sprong van tien en één sprong van één vooruit. De genoemde sprongsommen lokken deze rekenwijze uit.
Nog handiger is het echter om 250 min 189 als verschil te interpreteren of als een aftrekking van 'onderaf' zodat je de afstand tussen 189 en 250 overhoudt - zie de oplossing uit figuur 3.



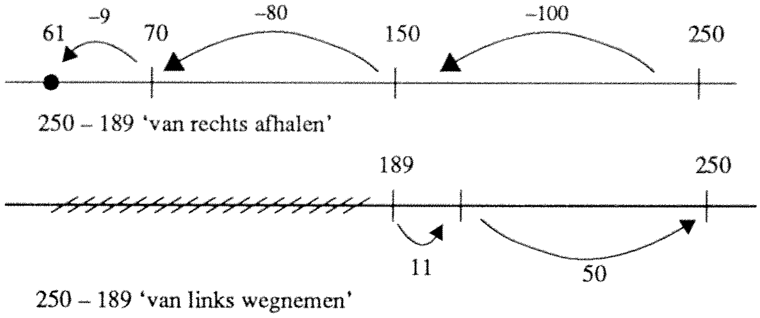
Figuur 3

Ook bij deze oplossing is het nodig om zich vlot over de getallenlijn te kunnen bewegen, om de structuur van de getallenrij goed te kunnen doorzien.
Het is overigens wel zo dat slechts één op de vier kinderen uit de door ons onderzochte groep deze voor de hand liggende winkelmethode toepaste. En het is natuurlijk nog maar de vraag of deze kinderen in het probleem een aftrekking herkennen, wat in moeilijker gevallen en met gebruik van de zakrekenmachine (en later bij het gebruik van letters in de algebra) toch ook van wezenlijk belang is.

Interpretatie van aftrekken

Kortom, het is van belang dat kinderen goed inzicht hebben in twee fundamentele verschijningsvormen van aftrekken. Namelijk 'min' als 'eraf' opgevat of als 'verschil' te duiden.
Of anders gezegd, dat de aftrekhandeling verricht kan worden door de aftrekker van de

onderkant of van de bovenzijde, of zo men wil de linker- of de rechterzijde van de getallenrij die het aftrektal uitbeeldt, af te halen (fig.4).



Figuur 4

Beide vormen kunnen in de context van het betalen worden verantwoord: men kan een en ander naspelen met geld en met de lege getallenlijn als mentaal model op de achtergrond. Stel betalen voor als ruilen, of beter, als eerlijk ruilen, als een evenwichtssituatie (fig.5).

Kopen		**Verkopen**
walkman (*f* 189,--) plus *f* 61,--	=	*f* 250,--

Figuur 5

De waarde van dit balansmodel blijkt indien leerlingen voor de bekende betaaltruc worden gesteld:

'Hebt u er één gulden bij?
Dank u: dat is dus *f* 190,-- als 't u blieft *f* 10,-- + *f* 50,-- dat maakt *f* 250,--.'

Aan de ene kant van de balans staat *f* 189,-- (walkman) min *f* 1,-- plus *f* 60,-- en aan de andere kant *f* 250,-- plus *f* 1,--! Afgezien van mogelijk oplichten is het verhelderen van een betaalsituatie van grote waarde. Vele foute uitkomsten, zoals bijvoorbeeld 169 of 171 kunnen dan trouwens makkelijk worden ontmaskerd.

Didactische moraal

Het geheel van antwoorden en strategieën overziende, en gelet ook op het onderwijs inzake dergelijke aftreksommen als de betaalopgave over de walkman, komen we tot de volgende conclusies een aanbevelingen.

1. Cijferen start te vroeg en is te weinig inzichtelijk gefundeerd.
2. Hoofdrekenen (1 en 2) wordt in groep vijf te zeer door het cijferen verdrongen.
3. Inzicht in de structuur van de getallenrij en in de decimale structuur van de getallen is zowel van belang voor hoofdrekenen als voor cijferen.
4. Naast de tien-groepjesstructuur is ook de rij-structuur van getallen van belang (uit te beelden met positiemateriaal als MAB en de (lege) getallenlijn).
5. Springspelletjes op de getallenlijn kunnen structuur geven aan de getallen en de getallenrij alsmede aan het hoofdrekenen.
6. Aftrekken kan op twee manieren worden geïnterpreteerd; beide vormen zijn van belang voor zowel het hoofdrekenen als het oplossen van contextopgaven.
7. Wat in het voorgaande gezegd is geldt onverkort ook voor het optellen.
8. En indien de twee andere basisbewerkingen - vermenigvuldigen en delen - in beschouwing zouden komen, dan zou blijken dat vergelijkbare opmerkingen gemaakt kunnen worden:

- over de relatie tussen hoofdrekenen en cijferen (eerst hoofdrekenen goed ontwikkelen);
- de cruciale functie van modellen (het rechthoeksmodel en de lege dubbele getallenlijn);
- het belang van basiskennis (inzake 'tafels');
- inzicht in de getallenrij en het positiesysteem (nulregel bij vermenigvuldiging);
- en de betekenis van elementaire contextproblemen om het leren en het onderwijzen te analyseren.

9. Een raad tot slot: wandel verder met de walkman over de getallenlijn en u zult ervaren dat dit loont.

Tot zover een spiegelbeeld van een klein stukje onderwijs.[2]

Noten

1. Treffers, A. en E. de Moor: *Proeve van een Nationaal Programma voor rekenen-wiskunde op de basisschool.* Deel 2. Basisvaardigheden en Cijferen, Zwijsen, Tilburg 1990.
2. Dit artikel sluit enigermate aan op:
   Treffers. A.: Hoofdreken toen en nu, in *Jeugd in School en Wereld*, jrg 75, maart 1991, pag.5-8.