Hoofdrekenen toen en nu*

A. Treffers

Vakgroep OW & OC, RU Utrecht

Inleiding

Eerst schetsen we wat hoofdrekenen is. Vervolgens worden drie vormen van hoofdrekenen onderscheiden en toegelicht met één voorbeeld. Daarna wordt de verbinding tussen hoofdrekenen en cijferen onder de loep genomen. En we besluiten met de stand van zaken op het terrein van het hoofdrekenen.

Vroeger en nu

In het begin van de vorige eeuw rekende men tot hoofdrekenen ook opgaven als:
- $3 \times 26 \times 37 =$
- $7 \times 11 \times 13 \times 611 =$
- 'Indien men van 11 maal het 8^e deel van de helft van 4 maal 8, afneemt 7 maal het 10^e deel van het 5^e deel van 50, en daarbij zeker getal voegt, zoodat de som beloopt 2 maal 2 maal het derde deel van 9 maal 9; hoeveel maal het 7^e deel van 7 maal 7 bedraagt dan dit bijgevoegde getal?'[1]

Om verschillende redenen zijn zulke sommen sindsdien volledig ondergestoft: de eerste twee berusten op trucjes - je moet weten dat $3 \times 37 = 111$ en $7 \times 11 \times 13 = 1001$ - en de derde is een zeer 'talige' stipsom die wel heel erg formalistisch aandoet en ver afstaat van de wereld van alledag.
Vandaag de dag wordt die relatie met de realiteit wel gelegd en fungeren bijvoorbeeld (onjuiste) krantenberichten mede als bron voor hoofdrekenopgaven. Een voorbeeld:

> Zygmunt, een Pool in Nederland, werkt op de bloemenveiling: Hij zegt: 'gemiddeld werk ik 220 uur per week. Dat is goed, want zo verdien je' - de kop bij het artikel luidt 'Polen als harde werkers'.

Maar de volgende sommen uit een rekenboekje van Zijlstra van honderd jaar geleden worden ook nu nog tot het elementaire hoofdrekenen gerekend.[2]

$297 + 25 =$
$74 - 39 =$
$50 \times 5 \times 18 \times 2 =$
$360 : 60 =$

Wat is hoofdrekenen eigenlijk? En wat is er in de loop van de tijd veranderd?
Bij het beantwoorden van deze vragen zal tevens de verhouding tussen hoofdrekenen en cijferen worden besproken.

Wat is hoofdrekenen?

In het begin van deze eeuw definieert Zernicke hoofdrekenen als 'dat rekenen waarbij noch de gegeven getallen, noch de gedeeltelijke, noch de eind-uitkomsten worden opgeschreven'.[3] Hoofdrekenen als *niet-schriftelijk* rekenen derhalve, als rekenen-*uit*-het-hoofd. En hij constateert hoe steeds meer de rekkelijke opvatting van hoofdrekenen in-

*) Dit artikel verscheen eerder in het tijdschrift 'Jeugd in School en Wereld', jrg 75, maart 1991.

gang vindt, waarbij niet alleen de opgaven schriftelijk gesteld worden maar ook zelfs deeluitkomsten genoteerd mogen worden. Het was vooral Versluijs die deze verruiming aan het hoofdrekenen toekende. Meer dan honderd jaar geleden schreef de grondlegger van de rekendidactiek in Nederland:

> 'Een groot verschil tusschen het hoofdrekenen en het cijferen bestaat hierin dat men bij het cijferen gewoonlijk begint met de eenheden van den laagsten rang en bij het hoofdrekenen met de eenheden van den hoogsten rang. Bij de deeling begint men altijd met de eenheden van den hoogsten rang. Verder volgt men bij het cijferen meestal vaste regels, dat wil zeggen: men handelt bij gevallen van dezelfde soort steeds op dezelfde wijze. Bij het hoofdrekenen daarentegen brengt men verschillende bekortingen aan, waartoe de getallen in veel gevallen aanleiding geven.'[4]

Hier is hoofdrekenen *niet-cijferend* rekenen, rekenen-*met*-het hoofd.
En hiermee zijn de twee uiteenlopende interpretaties van hoofdrekenen gegeven die in de rekendidactiek tot vandaag toe opgeld doen – niet alleen in Nederland maar ook daarbuiten.[5] Al moet daar direct aan worden toegevoegd dat in Nederland thans de opvatting van *'niet cijferend* en *met*-het-hoofd' het meest gangbaar is.

Vanwege dit verwarrende gebruik introduceerde Nieland in de jaren zestig de nieuwe termen 'structuurrekenen' en 'eigenschapsrekenen'.[6] En Jansen lanceerde in de jaren zeventig 'flexibel rekenen' en 'handig rekenen'.[7] Maar in plaats van hoofdrekenen te vervangen werden deze aanduidingen in hoofdrekenen gevangen. Het wordt namelijk thans veelal omschreven als handig of flexibel rekenen – dat deze definitie wat eenzijdig is zullen we direct laten zien. Nieland gaat zelfs nog wat verder en betrekt nu ook de andere termen erin: 'hoofdrekenen is handig werken met structuren van getallen en hun eigenschappen'.[8]

POLEN BEKEND ALS HARDE WERKERS

(van onze verslaggever)

Ieder jaar komen tienduizenden Polen naar Nederland om enkele maanden te werken in de bloembollenteelt.(...)

Zygmunt is al voor de vierde keer in Nederland. Hij heeft in bollenvelden en in kassen gewerkt. Nu werkt hij op de transportafdeling van een bedrijf op de bloemenveiling. "Ik laad vrachtwagens in, dat is zwaar werk. Gemiddeld werk ik 22o uur per week. Dat is goed, want zo verdien je", aldus Zygmunt.

Figuur 1

In de 'Proeve van een Nationaal Programma ...' is geen omschrijving van hoofdrekenen gegeven, maar uit de beschrijving blijkt dat daarin twee vormen onderscheiden worden, namelijk een gestileerde en een gevarieerde variant.[9] Bij de strakke vorm van hoofdrekenen wordt net als bij het cijferen één vaste procedure gevolgd en bij de losse gaat het om het handige, flexibele rekenen volgens aangepaste methoden. Deze invulling van hoofdrekenen is dus wat breder dan alleen die van 'handig rekenen': het gaat om rekenen met getallen, in onderscheid tot het rekenen met cijfers, maar dan zowel volgens handige als minder handige, uniforme werkwijzen. Het criterium *uit*-het-hoofd is daarbij niet doorslaggevend. Ook de 'Proeve ...' volgt dus de lijn van Versluijs, zij het dat een nuancering wordt aangebracht die in het vervolg wordt aangeduid met de nummers hoofdrekenen 1 (gestileerd) en hoofdrekenen 2 (gevarieerd). Nog een andere vorm van hoofdrekenen wordt in de 'Proeve ...' apart benoemd als schattend rekenen, zeg hoofdrekenen 3. We zullen hoofdrekenen 3, 2 en 1 met één voorbeeldopgave toelichten. (fig.1)[10]

Hoofdrekenen 3

Er wordt schattend gerekend, of er is althans daartoe een aanzet op basis van een rekenfeit dat zelf wordt aangedragen, namelijk dat een dag (etmaal) 24 uur is. Hoofdrekenen 3, zowel met pure rekenproblemen als in contextsituaties, is van recente datum. Noch in oudere rekenmethoden noch in didactiekboeken van weleer wordt veel werk van schatten, afronden en ongeveer-rekenen gemaakt, een enkele uitzondering daargelaten.[11] En opgaven waarbij gegevens zelf moeten worden aangedragen of benut, ontbreken zelfs geheel.[12]

Kan dat, een werkweek van 220 uur?

Schrijf op waarom je dat denkt.

Nee, want 10 werk-
dagen is al 240
uur, dus 220 werk-
uren zou dan
9 dagen + 4 uur zijn.

Figuur 2

Hoofdrekenen 2

Hoofdrekenen 2, de gevarieerde vorm oftewel het handige rekenen, komt in de oplossing van afbeelding 3 tot uitdrukking. Je weet vlug dat 7 kwartjes 1,75 is en daarmee doe je je voordeel bij het berekenen van 7 × 24.

Kan dat, een werkweek van 220 uur?

Schrijf op waarom je dat denkt.

Een dag heeft
24 uur dan doe
ik 25 x 7 = 175 uur
−7 = 169 uur per
week.

Figuur 3

Dit gevarieerde hoofdrekenen is zo oud als de rekendidactiek zelf. Maar in bepaalde perioden is het toch weinig in praktijk gebracht. In het begin van deze eeuw als reactie op het wat ver doorgevoerde hoofdrekenen ten koste van het cijferen werd - ook door Zernicke - een aparte leergang voor hoofdrekenen betwist.[13] Na 1960 raakte de variatie er door het geïndividualiseerde, schriftelijke rekenen ook wat uit. Vanaf 1980 is echter een duidelijke herwaardering voor hoofdrekenen waar te nemen, mede onder invloed van enkele NOT-programma's, en niet te vergeten van nieuwe methoden te beginnen bij 'Getal in Beeld'.[14] Met name Nieland, Jansen, Scholten, De Moor en Buijs hebben tot deze opleving bijgedragen, plus uiteraard de auteursgroepen van de verschillende realistische methoden.[15]

Hoofdrekenen 1

Volgens hoofdrekenen 1 werken is op een standaard-manier met getallen rekenen als bijvoorbeeld in figuur 4.

Kan dat, een werkweek van 220 uur?

Schrijf op waarom je dat denkt.

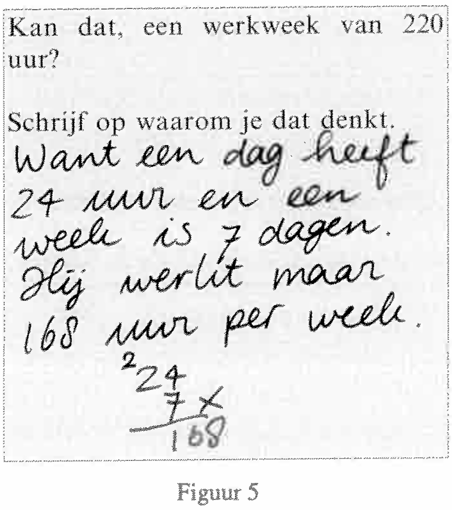
$7 \times 20 = 140$
$7 \times 4 = 28$
168

Dat gaat niet want 7×24 u. is 168 u per week!

Dus denk ik dat dat niet waar is.

Figuur 4

Dit gestileerde hoofdrekenen is van oudsher de meest beoefende vorm van hoofdrekenen in de praktijk van het onderwijs. Ze is door haar strakke vorm verwant met het cijferen dat immers ook volgens één standaardprocedure wordt uitgevoerd. Vaak werd het gestileerde hoofdrekenen dan ook al gauw door het cijferen verdrongen dat qua procedure immers doelmatiger is en voor een deel ook uit het hoofd kan worden voltrokken.



Kan dat, een werkweek van 220 uur?

Schrijf op waarom je dat denkt.

Want een dag heeft 24 uur en een week is 7 dagen. Hij werkt maar 168 uur per week.

24
$7 \times$
168

Figuur 5

Hoofdrekenen 0

Bij hoofdrekenen 0, hoofdcijferen dus, wordt dit soort berekeningen van meet af aan onder elkaar geschreven (fig.5). Er wordt zoals Versluys reeds beschreef, begonnen met de kleine eenheden en er wordt volgens vaste procedures met cijfers gerekend - en niet met getallen zoals bij het hoofdrekenen in welke vorm dan ook.
Cijferen was vóór 1800 *de* methode van rekenen. In het begin van deze eeuw en in de periode 1960-1980 was het de dominerende rekenwijze en het is thans ook vaak *de* methode, *het* algoritme in het speciale onderwijs volgens de ortho-rekendidactiek.
Voor dit moment stellen we samenvattend vast dat hoofdrekenen verschillende kanten kent die in de historie van het rekenonderwijs lang niet altijd belicht werden. En ook dat de laatste tijd nieuwe bestanddelen van hoofdrekenen zijn opgespoord, met name wat hoofdrekenen 3 betreft.

Hoofdrekenen en cijferen

Meestal waren er geen verbindingen tussen de leergangen van cijferen en hoofdrekenen: ze stonden *naast elkaar* en *los van elkaar*. En vaak werden ze ook nog ongeveer *gelijk gestart*, namelijk bij het rekenen onder de honderd voor optellen en aftrekken.
Dat was bijvoorbeeld ruim honderd jaar geleden bij Versluijs zo en ruim vijftig jaar geleden in de beroemde (beruchte?) rekenmethode van Bouman en Van Zelm 'als proeve van toegepaste logica" evenzeer.[16]
De laatste dertig jaar is het echter gebruikelijk om het *hoofdrekenen* in het aanvankelijk rekenonderwijs *voorop* te *stellen*. Als is het dan niet zo strikt doorgevoerd als Van Pelt in de vorige eeuw voorstelde in 'De Nieuwe Rekencursus':

> 'In de eerste 3 leergangen dient bij al het rekenen op het bord en de lei dezelfde weg gevolgd te worden als bij het Hoofdrekenen. Van bewaren, leenen en inspringen mag dus geen sprake zijn'. [17]

Omstreeks 1960 zetten Reijnders en Snijders in de handleiding van hun 'Functioneel Rekenen' helder uiteen waarom hoofdrekenen zo belangrijk is en waarom het aan het cijferen vooraf dient te gaan.
Ze wijzen op het belang van het zien van samenhangen, het leggen van verbanden, het zoeken van relaties en van inzicht in het positiesysteem van het tientallige stelsel. We citeren[18]:

> 'Het is onze nadrukkelijke mening, dat - evenals dit in de vorige deeltjes het geval was - het *hoofdrekenen* bijzonder tot zijn recht moet blijven komen. Langzamerhand wordt in dit deeltje en de daar op volgende overgegaan naar het cijferend rekenen.
> Steunend op dat hoofdrekenen kan inzicht verkregen worden in de cijferbewerkingen. Zolang er niet vlot uit het hoofd gerekend wordt, dient men zich met het cijferen niet te hassten, aangezien het eerste steun moet bieden aan het tweede en er aan moet voorafgaan. In alle leerjaren moet het hoofdrekenen dan ook een belangrijke plaats innemen. Het spreekt van zelf, dat vooral in de eerste helft van dit deeltje voortdurend een beroep op het hoofdrekenen gedaan wordt.
> Begint men te vroeg met cijferen, dan staat dit het *inzicht* in de getallen in de weg. Wie er aandacht aan schenkt zal dat o.m. opmerken bij kinderen die b.v. thuis op het werk der school zijn vooruit gelopen door de cijfer-'kunstjes' te vroeg te leren. Zij zijn daar dan bijna niet meer af te krijgen, omdat het vaak veel eenvoudiger is om het *goede antwoord* te krijgen, dan met hoofdrekenen. Maar wat begrijpen ze van zwat ze doen.'

Deze opvatting over de plaats en de betekenis van hoofdrekenen ten opzichte van het cijferen wordt thans door velen gedeeld en wordt zowel in de 'Proeve van een Nationaal Programma voor rekenen-wiskunde' (deel 2) als in het werk ten behoeve van het Speerpunt Rekenen tot uitdrukking gebracht.[19].

Stand van zaken nu

1. Het belang van de drie vormen van hoofdrekenen wordt onderkend.
2. De basis voor hoofdrekenen wordt gelegd in het getallengebied tot honderd waarin geen plaats is voor cijferen. Dat wil zeggen dat cijferen in de groepen 4 en 5 minder wenselijk wordt geacht en pas in groep 6 geplaatst wordt.
3. Beheersing van de tafels voor optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen is een noodzakelijke, doch niet voldoende voorwaarde voor hoofdrekenen.
4. Ook moeten leerlingen de structuur van de telrij goed kunnen doorzien en zich makkelijk mentaal over die telrij kunnen verplaatsen, daarbij steunend op de (lege) getallenlijn.
5. Tevens is inzicht in het positiesysteem een voorwaarde. Gebruik van positieblokken en een (groot) rekenrek kunnen dat inzicht stimuleren.
6. Algemeen geldt dat enkele krachtige modellen het hoofdrekenen kunnen ondersteunen:
   - de (lege) getallenlijn voor alle bewerkingen;
   - positieblokken en rekenrek voor optellen en aftrekken;
   - het rechthoeksmodel voor vermenigvuldigen en delen.

   Ze vervullen die functie onder meer omdat ze belangrijke eigenschappen van de betreffende bewerkingen zichtbaar maken. Het rechthoeksmodel kan bijvoorbeeld de verwisseleigenschap ($3 \times 9 = 9 \times 3$), de verdeeleigenschap ($12 \times 7 = 10 \times 7 + 2 \times 7$ en $7 \times 12 = 7 \times 10 + 7 \times 2$), het compenseren ($7 \times 19 = 7 \times 20 - 7 \times 1$) en het verdubbelen-halveren ($8 \times 25 = 4 \times 50 = 2 \times 200$) uitbeelden.
7. Ook elementaire contextproblemen kunnen een modelfunctie vervullen. De eigenschap $12 \times 7 = 10 \times 7 + 2 \times 7$ is in de context van 'hoeveel dagen zitten er in 12 weken?' heel makkelijk in te zien. Voorts vormen contextproblemen een belangrijk toepassingsgebied van hoofdrekenen 1, 2 en 3. Geldopgaven, alledaagse probleemsituaties, kranteknipsels en folders, vormen rijke bronnen voor hoofdrekenen.
8. Hoofdrekenen dient niet louter schriftelijk plaats te vinden, maar vooral ook mondeling binnen interactief onderwijs in korte lessen (van een kwartier). Hoofdrekenen in alle genoemde vormen is in zijn meest elementaire gedaante ook geschikt voor moeilijk lerende kinderen.
9. Zogenoemde open problemen als gesteld in kranteknipsels spelen daarbij een essentiële rol.

Noten

1. Geciteerd in:
   Zijlstra, J.G.: *Het Rekenonderwijs in de Lagere School. Eene methodische Schets ten dienste van Kweekelingen en jonge Onderwijzers*, Thieme, Zutphen 1890, pag.135.
2. ibid., p. 51.
3. Zernicke, C.F.A.: *Ons Rekenonderwijs. Handleiding*, Akkeringa, Bussum 1915 (4e druk), pag.8-9.
4. Versluijs, J.: *De methodiek van het rekenen. Ten dienste van Kweekelingen*, Versluijs, Amsterdam 1899 (2e druk), pag.84.
5. Zie bijvoorbeeld de opvatting van hoofdrekenen als niet-schriftelijk uit-het-hoofdrekenen van:
   Hazekamp, D.W.: *Components of Mental Multiplying*, (H.L. Schoen ed.). NCTM, Reston 1986, pag.116.
   Aerts, R. en M. Deckers: *Kinderen Rekenen – een procesmatige benadering*, Acco, Leuven/Amersfoort 1989, pag.196.
6. Zie het voorwoord van:
   Nieland, J.: *Rekenopgaven voor de pedagogische academie*, Stam/Robijns, Culemborg 1970 (3e druk).
7. Jansen, H.: Wat hoofdrekenen is, weet iedereen, *Wiskobasbulletin*, jrg. 2 nr. 3, 1973, pag.784-786.
8. Nieland, J.: Wat was en is hoofdrekenen eigenlijk?, *Tijdschrift voor Nascholing en Onderzoek van het Reken-Wiskundeonderwijs*, jrg. 5 nr. 1, 1986, pp. 3-6.

9. Treffers, A. en E. de Moor: *Proeve van een nationaal programma voor het reken-wiskundeonderwijs op de basisschool. Deel. 2. Basisvaardigheden en cijferen,* Zwijsen, Tilburg 1990.
10. Uit de NRC van 7-7-1990.
11. Eén van de uitzonderingen wat dit aangaat, speciaal voor het aanvangsonderwijs, is de methode Tiemersma, D. en P. Wardekker: *Dit is rekenen,* Wolters, Groningen 1959.
12. Al zitten er in bepaalde methoden, waaronder de zojuist genoemde en die van Rombouts 'Geef acht' en van Reijnders en Snijders 'Fundamenteel Rekenen', wel aanzetten tot het maken van eigen produkties.
13. Zie voor een korte schets:
Rombouts, S.: *Katholieke Pedagogiek. Methode der vakken,* R.K. Jongensweeshuis, Tilburg 1952 (5e druk).
14. En speciaal de boekjes Handig Rekenen bij 'Getal in Beeld' door Tineke Brinkman, Valeer van Achter, Piet de Jong, Jan van Loon, Jan Nieland.
15. We noemen in dit verband 'Pluspunt' van Scholten, Ter Heege, De Moor en anderen, en de NOT-serie 'Rekenwerk' van Buijs, Nieland en Scholten.
16. Onderwijzersboekje II van:
Bouman, P.J. en J.C. van Zelm: *Een rekenmethode voor de Lagere School als proeve van toegepaste logica,* Versluys,. Amsterdam, (z.j.), pag.149.
17. Pelt, D. van: *Overzicht der methode gevolgd in 'De nieuwe rekencursus',* Mijs, Tiel 1912, (4e druk), pag.12.
18. Reijnders, J.M. en J. Snijders: *Functioneel Rekenen. Handleiding,* Versluijs, Amsterdam 1959, pag. 60-61.
19. Treffers, A. en E. de Moor: *Proeve van een nationaal programma voor het reken-wiskundeonderwijs op de basisschool. Deel. 2. Basisvaardigheden en cijferen,* Zwijsen, Tilburg 1990.