Wat maakt het oplossen van vermenigvuldigingsvraagstukken met decimale getallen zo moeilijk?

L. Verschaffel Centrum voor Instructiepsychologie en -technologie, KU Leuven

Het vermenigvuldiger-effect

Het is algemeen bekend dat leerlingen vaak grote moeite hebben met het vinden van de juiste rekenoperatie bij vraagstukken over vermenigvuldigen en delen. Het gemak waarmee de juiste rekenoperatie gevonden wordt, is onder meer afhankelijk van een aantal kenmerken van het vraagstuk. Een taakkenmerk dat de laatste tijd heel wat aandacht gekregen heeft, is de aard van de getallen die in de opgave vermeld staan. Zo is zowel door Mangan (1986) als door De Corte, Verschaffel en Van Coillie (1988) aangetoond dat er veel meer correcte rekenoperaties gekozen worden bij vraagstukken met een geheel getal als vermenigvuldiger, dan bij opgaven met een decimale vermenigvuldiger groter dan 1; opgaven met een decimale vermenigvuldiger kleiner dan één blijken veruit het moeilijkst. De meest voorkomende fout bij deze laatste soort van opgaven is steevast het kiezen van een deling in plaats van een vermenigvuldiging met de twee gegeven getallen. De aard van het vermenigvuldigtal daarentegen blijkt geen betekenisvolle invloed uit te oefenen op de moeilijkheidsgraad van een vraagstuk. Dit noemen we het *vermenigvuldiger-effect*. In tabel 1 wordt dit effect geïllustreerd aan de hand van gegevens afkomstig uit het onderzoek van De Corte e.a. (1988), waarin een groep van honderdzestien zesdeklassers (elf- tot twaalfjarigen) twee papier-en-potloodtoetsen bestaande uit 24 vraagstukken aangeboden kreeg.

V-er	Voorbeeld*	% correct**
Geheel	De prijs van spinazie is 85 fr. per kg. An koopt 3 kg. Hoeveel moet zij betalen?	94
Dec > 1	De prijs van spinazie is 85 fr. per kg. An koopt 1,65 kg. Hoeveel moet zij betalen?	89
Dec < 1	De prijs van spinazie is 85 fr. per kg. An koopt 0,65 kg. Hoeveel moet zij betalen?	71

* In de drie voorbeeldopgaven gaat het steeds om een geheel vermenigvuldigtal. In het onderzoek werden echter ook opgaven met decimale vermenigvuldigtallen groter en kleiner dan één aangeboden.

** Dit percentage duidt op het percent juiste operatiekeuzen; rekentechnische fouten worden derhalve als correct beschouwd.

Tabel 1: moeilijkheidsgraad van opgaven met een gehele vermenigvuldiger (V-er) en een decimale vermenigvuldiger groter en kleiner dan 1 (De Corte e.a., 1988)

Dit vermenigvuldiger-effect blijkt overigens erg 'onderwijsweerstandig' te zijn; het wordt immers ook aangetroffen bij mensen die nochtans heel wat instructie in het leren oplossen van vermenigvuldigingsopgaven en -problemen met decimale getallen achter de rug hebben.

Bij wijze van voorbeeld verwijs ik naar het reeds genoemde onderzoek van Mangan (1986), maar ook naar dat van Graeber en Tirosh (1988), waarin aangetoond is dat ook aspirant-leerkrachten en universiteitsstudenten ontstellend zwak presteren op vermenigvuldigingsvraagstukken met een decimale vermenigvuldiger kleiner dan één.

Het vermenigvuldiger-effect nader bekeken

De Corte e.a. (1988) toonden echter aan dat dit vermenigvuldiger-effect op twee belangrijke punten genuanceerd moet worden.
Ten eerste doet het zich niet bij alle soorten van vermenigvuldigingsvraagstukken voor. Het treedt enkel op bij opgaventypes waarin men duidelijk onderscheid *kan* maken tussen het getal dat de rol van vermenigvuldiger speelt en het getal dat de functie van vermenigvuldigtal vervult. Greer (1988) spreekt in dit verband van asymmetrische opgaven. De vraagstukken vermeld in tabel 1 behoren tot deze categorie. Symmetrische opgaven daarentegen zijn vraagstukken waarin de twee gegeven getallen een verwisselbare rol vervullen, zoals bij vraagstukken over combinatoriek ('drie soorten brood en vier soorten beleg; hoeveel mogelijke combinaties?') of oppervlakteproblemen ('lengte drie meter en breedte vier meter; hoeveel is de oppervlakte?'). De Corte e.a. (1988) toonden aan dat de aard van de gegeven getallen geen invloed uitoefent op de keuze van de juiste rekenoperatie voor symmetrische vraagstukken over de oppervlakte van een rechthoek.
Uit hetzelfde onderzoek van De Corte e.a. (1988) kwam ook nog naar voren dat het vermenigvuldiger-effect veel sterker is wanneer de opdracht luidt om de correcte bewerking met de twee gegeven getallen te schrijven (of te kiezen uit een reeks alternatieven), dan wanneer er 'gewoon' gevraagd wordt om het vraagstuk op te lossen. Met andere woorden, het verschil in moeilijkheidsgraad tussen vraagstukken met een gehele vermenigvuldiger en opgaven met een decimale vermenigvuldiger groter en kleiner dan één, bleek veel groter wanneer de leerling de formeel-rekenkundige bewerking moest geven, dan wanneer hij z'n oplossingsweg zèlf mocht bepalen (= open-antwoordvorm).

Voorbeeldopgave	Antwoordvorm	% correct*
De prijs van spinazie is 85 fr. per kg. An koopt 0,65 kg. Hoeveel moet zij betalen?	Meerkeuze	43
De prijs van spinazie is 85 fr. per kg. An koopt 0,65 kg. Hoeveel moet zij betalen?	Open	74

* De percentages hebben betrekking op alle asymmetrische opgaven met een decimale vermenigvuldiger kleiner dan één.

Tabel 2: moeilijkheidsgraad van een opgave met een decimale vermenigvuldiger kleiner dan 1 in de meerkeuze- en in de open-antwoordvorm (De Corte e.a., 1988)

In tabel 2 wordt deze interactie tussen vermenigvuldiger en antwoordvorm geïllustreerd. Een kwalitatieve analyse van de antwoordprotocollen uit de open-antwoordvorm suggereerde dat de meeste correcte antwoorden op de moeilijke opgaven met een decimale vermenigvuliger kleiner dan één, over het algemeen niet het resultaat waren van een rechtstreekse vermenigvuldiging van de twee gegeven getallen, maar van andere meer informele en indirecte oplossingsstrategieën (zie verder).

Alvorens over te stappen naar een verklaring voor het beschreven vermenigvuldiger-effect, bespreek ik nog enkele onderzoekingen waarin meer procesmatige gegevens werden verzameld over de manier waarop dergelijke verkeerde operatiefouten op vraagstukken met een decimale vermenigvuldiger precies tot stand komen (Greer, 1988; Lecoutere, 1990).

Greer (1988) legde een aantal twaalf- tot zestienjarigen individueel vraagstukken voor waarin de beide getallen onder een flap waren weggestopt. Nadat de leerling antwoord gegeven had op de vraag welke bewerking hij of zij op de zakrekenmachine zou intikken om de uitkomst op dit vraagstuk (met ontbrekende getallen) te bekomen, werden de flappen verwijderd zodat de twee getallen zichtbaar werden en werd opnieuw gevraagd de juiste bewerking op de zakrekenmachine in te tikken. Hierna volgt een uittreksel uit een prototypisch protocol.

I: 'Een ruimteschip reist met een snelheid van ... km. per sec.; hoeveel km. legt het af in ... sec.?' Welke bewerking zou je hier uitvoeren?'
L: 'Als ik weet hoeveel km. het per sec. aflegt, zou ik.. dat getal vermenigvuldigen met het getal dat hieronder (wijst naar tweede flap) staat.'
I: 'Laat ons eens kijken welke de getallen zijn'. I. verwijdert de twee flappen en de getallen 16 (km. per sec.) en 0,85 (sec.) komen te voorschijn. 'Heb je enig idee hoeveel de uitkomst zal bedragen?
L: 'Het is iets minder dan 1 sec., dus moet de uitkomst iets minder zijn dan 16 km... Wacht eens, 0,85 is zowat acht tienden van een seconde... Ik weet het niet precies, maar het antwoord is zeker minder dan 16 km.'
I: 'Kan je de exacte uitkomst vinden met behulp van deze zakrekenmachine?'
L: 'De exacte uitkomst... Het is minder dan 1 sec... Eens kijken... 16 delen door 0,85... Dat moet de juiste uitkomst geven.'
I: 'Zou je niet eerder moeten vermenigvuldigen?'
L: 'Neen... 16 maal 0,85, dat zou zeker niet juist zijn... Je zou teveel uitkomen...'
I: 'Wacht eens. Voor ik de flappen wegnam, zei je me dat je de twee getallen zou vermenigvuldigen en nu je éénmaal de getallen gezien hebt, zeg je: delen. Is dat niet een beetje raar?'
L: 'Eh... Ja.'
I: 'Wanneer je 16 zou vermenigvuldigen met 0,85, zou je dan een getal bekomen groter of kleiner dan 16?'
L: 'Groter dan 16... En het moet kleiner zijn.'
I: 'Wel, tik jouw bewerking dan maar in op de zakrekenmachine.'
L: Tikt 16 gedeeld door 0,85 en ziet -tot z'n verbazing- het getal 18 verschijnen... 'Het is groter, en het moest kleiner zijn.'

In een gelijkaardige, doch meer systematisch opgezette studie, bood Lecoutere (1990) 38 zesdeklassers individueel onder meer de volgende gelijkaardige opgave aan:

'Een raket scheert door de ruimte en legt per seconde 32,15 km. af. Hoeveel km. legt de raket af in 0,65 seconde?'

Op de eerste vraag, namelijk 'zal de uitkomst groter, kleiner of gelijk zijn aan 32,15?' antwoordden vrijwel alle leerlingen correct. Hun argumentatie luidde steevast dat 'de raket minder dan 1 seconde vliegt'.
Op de daaropvolgende vraag welke bewerking ze met de twee gegeven getallen op de zakrekenmachine zouden intikken, antwoordden slechts zes van de achtendertig leerlingen: 'vermenigvuldigen'; acht dachten 'delen', tweeëntwintig beschreven een alternatieve, indirecte oplossingsweg en twee gaven geen duidelijk antwoord. Een nadere analyse van deze tweeëntwintig alternatieve oplossingswegen, bracht de volgende twee varianten aan het licht:

- elf leerlingen zeiden: 'om van 1 naar 0,65 te gaan heb ik eerst 1 gedeeld door 100 en daarna vermenigvuldigd met 65; dus ga ik 32,15 eveneens eerst delen door 100 en dan vermenigvuldigen met 65.
- acht leerlingen zeiden: 'om aan 0,65 te komen heb ik 1 gedeeld door 'iets'; om de uitkomst op het vraagstuk te bekomen moet ik die 32,15 eveneens delen door 'iets'; de meesten hadden echter behoorlijk wat moeite om dat 'iets' nader te bepalen.

Toen de interviewer er bij de tweeëntwintig leerlingen die ongevraagd een alternatieve, indirecte oplossingsweg voorgesteld hadden, achteraf nogmaals op aandrong een antwoord te geven op de vraag welke rekenkundige bewerking met de twee gegeven getallen de juiste uitkomst zou opleveren, kozen er slechts vijf daarvan voor een vermenigvuldiging; de overige opteerden voor een deling of bleven halstarrig weigeren één bepaalde rekenkundige bewerking aan te duiden (respectievelijk vijftien en twee).

Het verklaringsmodel

Dit brengt me bij de vraag hoe de beschreven fenomenen te verklaren. Hierna geef ik het meest algemeen aanvaarde verklaringsmodel, namelijk dat van Fischbein, Deri, Nello en Marino (1985).

In een oplossingsproces waarbij een enkelvoudige redactie-opgave vertaald wordt in een rekenkundige bewerking, spelen volgens Fischbein e.a. (1985) zogenoemde *primitieve modellen* van de bewerkingen bij de oplosser een beslissende rol. Zo'n model kan men opvatten als een interne voorstelling van een bepaalde formeel-rekenkundige operatie, gegroeid uit de concrete, dagelijkse omgang met hoeveelheden. Volgens Fischbein e.a. (1985) is het primitief model voor de vermenigvuldiging 'herhaald optellen': een aantal groepen (= de vermenigvuldiger) bestaande uit eenzelfde aantal gelijke objecten (= het vermenigvuldigtal) worden samengevoegd.
Een eerste rechtstreeks gevolg van dit model is dat de vermenigvuldiger een geheel getal moet zijn; het vermenigvuldigtal daarentegen kan om het even welk getal zijn. Zo kan men zich intuïtief gemakkelijk '3 keer 0,63' voorstellen (namelijk 0,63 plus 0,63 plus 0,63), terwijl dit veel moeilijker kan bij '0,63 keer 3'.
Ten tweede, aangezien in het primitief 'herhaald optel'-model de vermenigvuldiger noodzakelijkerwijs een geheel getal is, levert de vermenigvuldiging binnen deze visie altijd een product op groter dan het vermenigvuldigtal.
Op analoge wijze beschikken vele leerlingen over een primitief model van de operatie 'delen', dat onder meer de misvatting inhoudt dat het resultaat van een deling altijd een resultaat oplevert dat kleiner is dan het deeltal.

Laten we aan de hand van dit verklaringsmodel de beschreven fenomenen nogmaals bekijken.
Neem vooreerst het vermenigvuldiger-effect. Bij vraagstukken met een vermenigvuldiger kleiner dan één, zoals 'koffie kost 250 fr. per kg. An koopt 0,8 kg. Hoeveel moet zij betalen?', leidt de tussenkomst van de beschreven primitieve modellen voor de bewerkingen vermenigvuldigen en delen steevast tot de keuze van een foutieve rekenoperatie. Concreet komt deze fout als volgt tot stand. Na het lezen van de opgave heeft de leerling weliswaar op de één of andere manier door dat de uitkomst kleiner moet zijn dan 250, doch bij de keuze van de vereiste rekenkundige bewerking ('moet ik om aan dat getal te komen de twee gegeven getallen nu optellen, aftrekken, vermenigvuldigen of delen?') kiest hij voor een deling, omdat z'n primitief model van de vermenigvuldiging hem zegt dat deze bewerking een getal zou opleveren dat groter is dan 250; een deling daarentegen zal volgens hem resulteren in een getal dat kleiner is dan het deeltal.
Bij opgaven waarin het decimale getal kleiner dan één de rol van vermenigvuldigtal vervult, zoals 'zand kost 0,8 fr. per kg. An koopt 250 kg zand. Hoeveel moet zij betalen?', spelen dezelfde misvattingen de leerling geen parten, omdat de vermenigvuldiging hier inderdaad tot een product leidt dat groter is dan het vermenigvuldigtal.
Aan de hand van het model van Fischbein e.a. (1985) kan men tot slot ook verklaren waarom dat het negatief effect van een decimale vermenigvuldiger kleiner dan één veel sterker is wanneer de leerling de juiste rekenkundige bewerking moet aanduiden uit een reeks alternatieven, dan wanneer hem gewoon gevraagd wordt de uitkomst te geven. Immers, deze laatste antwoordvorm laat toe om de cruciale hindernis - namelijk de keuze van dè geschikte rekenoperatie met de twee gegeven getallen - te omzeilen door z'n toevlucht te nemen tot meer indirecte en/of meer informele oplossingswegen.

Implicaties voor de onderwijspraktijk

Welke praktische lessen vallen er uit het voorafgaande te trekken voor het onderwijzen van de operaties vermenigvuldigen en delen in het algemeen en voor het leren oplossen van vraagstukken met decimale getallen in het bijzonder? Verscheidene auteurs hebben zich uitvoerig met deze vraag beziggehouden (zie onder meer Greer, 1988; Fischbein e.a., 1985).

Daarbij wijzen ze vooreerst op de noodzaak van een goed gekozen gevarieerd opgavenaanbod. Het spreekt immers vanzelf dat, wanneer men leerlingen enkel opgaven aanreikt die hun misvattingen (bijvoorbeeld 'een vermenigvuldiging levert steevast een groter getal op') bevestigen, deze misconcepties zich in hun geest ook steeds sterker zullen verankeren. Het is derhalve geraadzaam om hen geregeld oefeningen voor te schotelen waarvoor de misconcepties niet opgaan.

Een andere belangrijke raad die we bij de genoemde auteurs terugvinden is de begripsvorming van de bewerkingen vermenigvuldigen en delen niet uitsluitend vanuit het herhaald-optel- resp. herhaald-aftrek-model te laten geschieden, doch daarnaast ook andere betekenisvolle situaties en modellen te gebruiken.
Zelf zou ik daar nog willen aan toevoegen dat het van cruciaal belang is dat leerkrachten op de hoogte zijn van deze typische fouten op vermenigvuldigingsopgaven en van hun procesmatig ontstaan. Alleen op deze manier zullen zij in staat zijn efficiënt te reageren op moeilijkheden van leerlingen. Hoe belangrijk dit wel is, blijkt fraai uit onderstaande situatieschets.

Peter, een twaalfjarige, heeft de opgave 'koffie kost 250 fr. per kg. An koopt 0,6 kg. Hoeveel moet zij betalen?' foutief beantwoord; hij heeft als bewerking 250 : 0,6 gekozen. Willem, z'n leerkracht, raadt hem - bij wijze van 'heuristische' hulp - aan om de moeilijke getallen te vervangen door eenvoudigere. 'Door deze waardevolle heuristiek toe te passen zal Peter vanzelf z'n fout ontdekken en op het juiste spoor komen', zo denkt Willem. Doch dit blijkt geenszins het geval. Door met eenvoudigere getallen te werken - bijvoorbeeld respectievelijk 20 fr. per kg. en 5 kg. - slaagt Peter er weliswaar in de juiste rekenoperatie te bepalen voor de vereenvoudigde opgave ('Ik moet 20 vermenigvuldigen met 5'), doch wanneer daarna naar het oorspronkelijk probleem wordt teruggekeerd, kiest Peter weerom voor een deling in plaats van een vermenigvuldiging.

Wat Willem over het hoofd gezien heeft, is dat het voor Peter allesbehalve vanzelfsprekend is dat de oorspronkelijke opgave met de moeilijke, decimale getallen en de vereenvoudigde opgave met gehele getallen dezelfde rekenoperatie vereisen.
Tot slot kan er door de leerkracht tijdens het leren oplossen van dergelijke opgaven nuttig gebruik gemaakt worden van een aantal technieken die in het recente onderzoek zijn aangewend, zoals het werken met opgaven met verborgen getallen, met de zakrekenmachine, enzovoort.

Literatuur

Corte, E. de, L. Verschaffel en V. van Coillie: Influence of number type, problem structure, and response mode on children's solutions of multiplication word problems, *The Journal of Mathematical Behavior*, 7, 1988, pag. 197-216.

Fischbein, E., M. Deri, M. Nello en M. Marino: The role of implicit models in solving verbal problems in multiplication and division, *Journal for Research in Mathematics Education*, 16, 1985, pag. 3-17.

Greer, B.: Nonconservation of multiplication and division: Analysis of a symptom, *The Journal of Mathematical Behavior*, 7, 1988, pag. 281-289.

Graeber, A. en D. Tirosh: Multiplication and division involving decimals: Preservice elementary teachers' performance and beliefs, *The Journal of Mathematical Behavior*, 7, 1988, pag. 263-280.

Mangan, C.: *Choice of operation in multiplication and division word problems*, Unpublished doctoral dissertation, Queen's University, Belfast 1986.

Verschaffel, L.: Enkele kanttekeningen bij de 'Proeve van een nationaal programma voor het reken-wiskunde-onderwijs op de basisschool (3)', *Tijdschrift voor nascholing en onderzoek van het reken-wiskundeonderwijs*, 6(4), 1986, pag. 11-16.