Onderzoeksgegevens over oplossingsmanieren bij het rekenen tot honderd

M. Beishuizen en F. Van Mulken — Vakgroep Onderwijsstudies, RU Leiden

Typering van de oplossingsmanieren

In de 'Proeve ...' (Treffers en De Moor, 1990) worden de 'rijmethode' en de 'kolommethode' als de twee kernmethoden bij het hoofdrekenen tot honderd onderscheiden. Wij vinden de termen 'sprongmethode' en 'splitsmethode' een treffender aanduiding. In ons Leidse rekenonderzoek gebruiken we de afkortingen G10 en 1010 (zie tabel 1). Via onderzoek proberen we door te dringen tot essentiële kenmerken van beide rekenstrategieën. Daarbij spelen naar onze mening niet alleen mathematische getalbegrip-aspecten een rol, zoals een meer ordinale (springen) of een meer kardinale (splitsen) getaloriëntatie. Ook meer psychologische kennis- en procesaspecten zijn van invloed, zoals verschillen in declaratieve kennisbasis, in mentale geheugenbelasting, in cognitieve handelingsstructuur, enzovoort.
Daarvan willen wij in deze bijdrage enkele illustraties geven, gebaseerd op theorievorming en onderzoeksgegevens. Wij onderschrijven het standpunt in de 'Proeve ...', dat *beide* methoden meer instructie-aandacht zouden moeten krijgen in groep vier, en wij hebben daar reeds eerder voor gepleit (Beishuizen en Van Mulken, 1988, waarnaar de auteurs in de 'Proeve ...' ook verwijzen op pag.69). Eveneens onderschrijven wij het belang van bijscholing van leerkrachten in het kader van het 'Speerpunt Rekenen' in het herkennen van deze oplossingsmanieren (en varianten), omdat hier veel (diepere) oorzaken liggen voor foutieve antwoorden en gebrekkig oplossingsgedrag. Echter, op diverse punten hebben wij als onderzoekers nog vragen en zijn we minder 'zeker' van de karakterisering van deze rekenstrategieën dan in de 'Proeve ...' wordt geschetst.

1010:	getallen splitsen, *tientallen* bij/van elkaar, daarna eenheden:	
	46 + 24 via 40 + 20 = 60 en 6 + 3 = 9, samen 60 + 9 = 69	
	42 – 15 via 40 – 10 = 30 en 2 – 5 = ?, dikwijls	
	fout:	2 – 5 = 3, samen 30 + 3 = 33
	goed is:	30 → 20, 12 – 5 = 7, samen 20 + 7 = 27, of
	10t aanpassing	zie hierna
10t:	gelijk aan 1010, maar eenheden *met tussenstap* toevoegen/afhalen:	
	46 + 23 via 40 + 20 = 60, 60 + 6 = 66, 66 + 3 = 69	
	42 – 15 via 40 – 10 = 30, 30 + 2 = 32, 32 – 5 = 27	
G10:	eerste *getal* niet splitsen, maar tientallen erbij/eraf, springen:	
	46 + 23 via 46 + 20 = 66, 60 + 3 = 69	
	42 – 15 via 42 – 10 = 32, 32 – 5 = 27	

Tabel 1: verschillende oplossingsmethoden in het getallengebied 20-100, zoals onderscheiden in Leids rekenonderzoek

Vraagtekens bij de gegeven typeringen

Een voorbeeld van zo'n vraagteken betreft de zogenoemde *10t-methode*, die in tabel 1 apart is weergegeven. In de 'Proeve ...' blijft deze oplossingsmanier onderbelicht, terwijl deze in de praktijk toch vrij regelmatig voorkomt (zie ook de klassikale oplossingen bij het eerste voorbeeld 87 – 39 van een groep vijf, in de Speerpuntmodule 'Rekenen tot honderd').

Ter illustratie verwijzen we naar tabel 2 met een overzicht van oplossingsmanieren in negen groepen vijf (231 proefpersonen) uit een vooronderzoek om procedure-vaste 'goede' 1010-ers en G10-ers te selecteren ten behoeve van reactietijdonderzoek (vgl. Beishuizen, Wolters en Broers, 1991).

	Rekenmethode OR (3 scholen, N = 66)				Rekenmethode NCR (3 scholen, N = 82)				Rekenmethode NZR (3 scholen, N = 83)				
Cito deciel-score	G10	10t	1010	comb *)	G10	10t	1010	comb *)	G10	10t	1010	comb *)	
10 –	oo				oo		ooo	o				ooo	– 10
	ooo						o						
9 –	oooo	•		o⊘	oooo	⊘	ooo⊘		ooo⊘		⊘	o	– 9
8 –	ooo		oo	o	oo		o		oo		o	⊘	– 8
							o						
7 –	oo			o	oo		ooo⊘		o⊘	o	o		– 7
6 –	ooo⊘				o		o•		oo		⊘	o⊘	– 6
							oo						
5 –	o	•			o		oo⊘⊘		o⊘	o	o	oo	– 5
							⊘						
4 –	oo	o	•			⊘	⊘⊘••	o	oo	⊘	•	o⊘	– 4
							o						
3 –	oooo		•	⊘•	⊘		o⊘••	o	⊘	o⊘⊘•	o⊘⊘	o•	– 3
							o⊘⊘						
2 –	⊘		⊘	⊘		•	⊘•••			o⊘•	•		– 2
							o						
1 –	⊘						⊘•••			••	••		– 1
Niveau **)													
o = +	24	1	2	3	12	0	21	3	11	4	4	9	
⊘ = ±	3	0	1	3	1	2	12	0	4	4	4	3	
• = –	0	2	2	1	0	1	11	0	0	4	4	1	
Totaal consis-tent	27	3	5	7	13	3	44	3	15	12	12	13	
	42/66 = 64%				63/82 = 77%				52/83 = 63%				

* Comb: combinaties van oplossingsprocedures zoals 1010/G10, 10t/G10, 1010/10t.
** Niveau: procedurele beheersing onderverdeeld in drie niveaus, volgens scores op twee toetsen.
(Eigen Opl. Proc. Aftrekken en Tempotoets Af + tp) bij eerste/tweede afname, dus vier scores:
o = vier voldoende scores (+ +/+ +)
⊘ = één of twee onvoldoende scores (+ +/+ – of + –/+ –)
• = drie of vier onvoldoende scores (+ –/– – of – –/– –)
criterium 'onvoldoende' = < 67% goed gemaakte antwoorden

Tabel 2: overzicht vier typen consistente oplossingsprocedures, gerelateerd aan Cito-rekenniveau en onderscheiden in drie procedurele beheersingsniveaus, bij drie rekenmethoden OR, NCR en NZR, in groepen vijf

Naast de reeds eerder door ons onderzochte materiaal-effecten (meer G10 bij 'Operatoir Rekenen' (OR) ten gevolge van het 100-veld, meer 1010 bij 'Niveau Cursus Rekenen' (NCR) ten gevolge van rekenstaven), zien we ook het veelvuldig voorkomen van de 10t-variant vooral bij de methode 'Naar Zelfstandig Rekenen' (NZR). Naar onze mening moet aan deze 10t-oplossingsmethode meer bijzondere betekenis worden toegekend, als (sequentiële, reconstructieve) aanpassing of niveauverhoging van de 1010-splitsmethode (zie tabel 1 en verderop in dit artikel, vgl. ook Beishuizen, Beishuizen en Felix, 1989).

Sterke vraagtekens hebben we verder bij de geschetste *didactische volgorde* in de 'Proeve ...' van de (G10-)sprongmethode naar de (1010-)splitsmethode in groep vier. Tegenover de mathematische-vakdidactische argumentatie, dat de rij- of sprongmethode aansluit bij de (ordinale) telalgoritmen uit groep drie, terwijl de kolom- of splitsmethode anticipeert op het (kardinale, cijferende) positierekenen in groep vijf - met welke typering we het op zichzelf eens zijn - plaatsen wij andere argumenten op basis van empirisch onderzoek en meer psychologische theorievorming. Veel kinderen vinden begin groep vier de G10-sprongmethode een 'moeilijke' manier, en geven spontaan de voorkeur aan de 'gemakkelijker' 1010-splitsmethode als (informele) strategie (vgl. Beishuizen en Van Mulken, 1988). In termen van (psychologische) kennisontwikkeling lijkt eerder de *omgekeerde volgorde* voor de hand te liggen: van 1010 naar G10. Eerst 1010, omdat kinderen daarbij gebruik kunnen maken van hun *bestaande* voorkennis van de basiscombinaties: 30 + 20 = 50 naar analogie van 3 + 2 = 5. Later G10, omdat daarvoor *nieuwe* declaratieve kennisuitbreiding van de 10-sprongen moet worden aangeleerd met behulp van honderdveld of getallenlijn: 35, 45, 55, 65, enzovoort en ook achteruit! Omdat het verschil tussen de methoden 1010 en G10 pas echt kritisch wordt bij grotere aftreksommen met tientalpassering (vgl. tabel 1), zou een 'latere' introductie van de G10-sprongmethode in groep vier uit curriculum-oogpunt weinig bezwaren geven.
Over deze 'vraagtekens' vanuit ons onderzoek valt nog veel meer te zeggen, dan nu mogelijk is (vgl. ook Beishuizen en Broers, 1990). Voor praktijkmensen is dit 'onderzoekersstandpunt' misschien onbevredigend, omdat we (voorlopig) met meer 'vraagtekens' dan 'oplossingen' komen. Omdat echter de 'Proeve ...' en het Speerpunt Rekenen met name ook een diepere doordenking van het rekenen tot honderd beogen, hopen we dat onze constructief bedoelde kanttekeningen toch aandacht en respons zullen ontvangen. Daarom inhoudelijk in deze bijdrage iets meer vanuit het recente (dissertatie-)onderzoek van Van Mulken bij onze vakgroep. Hierin staan eveneens (varianten van) de hier besproken rekenstrategieën centraal, maar dan zoals zij toegepast worden bij opgaven met een groter probleemkarakter dan routine-opgaven, namelijk stipsommen. Deze onderzoeksgegevens werpen met name meer licht op *zwakke en sterke* varianten van de 1010-splitsmethode.

De 1010-splitsmethode: weak model, strong strategy?

In verband met een standpuntbepaling omtrent de didactische volgorde waarin de oplossingsmethoden aangeboden zouden kunnen worden, lijkt het van belang meer informatie te verkrijgen omtrent de splitsmethode. Wat maakt de toch cognitief belastende methode van het splitsen zo aantrekkelijk voor sommige kinderen? Deze vraag spitsen we toe op kinderen die uitsluitend en consequent opteren voor de 1010-splitsmethode voor het oplossen van gewone formuleopgaven. Beschikken deze procedurevaste kinderen over 'weak conceptual models and strong strategies' (Lesh, 1985b); is de keuze voor de belastende methode van het splitsen in vergelijking met het springen werkelijk een 'zwaktebod', een blijk van weinig flexibel handelen? Of hebben we hier te maken met een oppervlaktever- schijnsel: deze kinderen beschikken wèl over een sterk model, zijn toch flexibel, maar kiezen de 1010-procedure bij vertrouwde opgaven consequent uit routine of uit gewoonte?

Onderzoek

1 Verwachtingen

Een kind dat beschikt over een sterk model kan zijn methode indien noodzakelijk bij een gewijzigde situatie aanpassen. Flexibiliteit, variabiliteit van het handelen zien wij als blijk van beschikbaarheid van stabiele conceptuele modellen (Krutetskii, 1976); Lesh, 1985a). In lijn met het voorgaande veronderstellen we dat het springen (G10) als methode later tot ontwikkeling komt dan de splitsmethode (1010). Het beheersen van de sprongmethode, lijkt een krachtigere, flexibelere methode dan het splitsen. Concreet, waren onze verwachtingen de volgende.

Ten eerste, dat procedurevaste G10-ers (zie hierna), geconfronteerd met moeilijkere opgaven, *niet* zullen overstappen naar de (ons inziens belastende) methode van het splitsen. Ten tweede, dat procedurevaste en flexibele 1010-ers *wel* zullen overstappen naar de methode van het springen. Ten derde, dat minder flexibele 1010-ers *vasthouden* aan het splitsen. En ten vierde, in het verlengde van voorgaande verwachtingen: de rekenvaardiger splitsers steunen bij het oplossen van vertrouwde opgaven op routine.

2 Proefpersonen

Uit een totaal van 261 kinderen uit groep vijf die onderwijs kregen met de methode 'Naar Zelfstandig Rekenen', selecteerden we 91 procedurevaste leerlingen van verschillend rekenvaardigheidsniveau. De geselecteerde kinderen zijn zeer stabiel in de keuze van een procedure voor het oplossen van gewone optellingen en aftrekkingen met en zonder tientalpassering: ze kiezen *uitsluitend* voor hetzij een 1010-, hetzij een G10-procedure. De niveauindeling werd verkregen door de kinderen in te delen met behulp van een Tempotoets Aftrekken (specifieke rekenvaardigheid) en de Cito-score (algemene rekenvaardigheid). Uitgangspunt bij de selectie was om de verschillen tussen de vaardigheidsniveaus zo groot mogelijk (significant) te maken, en de verschillen binnen een vaardigheidsniveau zo klein mogelijk (niet-significant) te houden. Tabel 3 geeft de verdeling van de proefpersonen over de verschillende vaardigheidsniveaus.

Vaardigheidsniveau		**Procedurevoorkeur**	
		1010	G10
Hoog	(++)	0	21
Gemiddeld	(+)	24	24
Laag	(–)	21	0

Tabel 3: verdeling van de proefpersonen (N = 91) over de vaardigheidsniveaus en procedurevoorkeur

Twee opmerkingen naar aanleiding van deze tabel. In verband met de discussie omtrent de *didactische volgorde* van introductie van oplossingsmethoden, stellen we vast dat de rekenaars met een relatief hoog vaardigheidsniveau geneigd zijn de voorkeur te geven aan de G10-procedure. Terwijl omgekeerd in het laagste rekenvaardigheidsniveau voornamelijk kinderen werden aangetroffen met een voorkeur voor de 1010-procedure. Een soortgelijke verdeling vonden Beishuizen, Wolters & Broers (1991) in een eerder vooronderzoek ten behoeve van reactietijdmeting (zie tabel 2). Dit gegeven lijkt te bevestigen dat de G10-sprongmethode eerder dan de 1010-splitsmethode een eindstadium in het hoofdrekenonderwijs vertegenwoordigt.

Ten tweede stelden we op grond van deze uitkomst vier nieuwe onderzoeksgroepen samen. Zeer rekenvaardige 'springers' (G++ groep, N = 21), gemiddeld rekenvaardige 'springers' (G+ groep, N = 24) en 'splitsers' (T+ groep, N = 24), en laag rekenvaardige 'splitsers' (T- groep, N = 22).

3 Instrument

Om routinematig handelen tegen te gaan boden we de onderzochte kinderen 'stipsommen' van een complex karakter aan. De 'stip-sommen' - de naam werd vermeden - werden geïntroduceerd als 'gewone sommen waar een inktvlek is opgevallen'. De opgaven

noemen we complex omdat niet alleen de onbekende op een weinig vertrouwde plaats staat (vgl. de inktvlek), maar ook het tiental telkens overschreden moet worden. Alle aangeboden toetsopgaven (N = 12) waren van het type a + . = c of . + b = c. Gegeven de semantische functie van de getallen vóór het gelijkteken (namelijk symmetrisch, vgl. De Corte c.s., 1990), kunnen de opgaven toch ook weer niet als al te moeilijk beschouwd worden. In vergelijking met 'gewone' sommen (type a + b =) vragen de 'stipsommen' tenminste een moment van bewuste aandacht omdat op de plek van de vlek geen getal meer staat. Ze moeten daar met andere woorden eenheden *denken*.
Kortom, de groepsindeling is tot stand gekomen door kinderen in te delen op grond van vertrouwde opgaven. De 'stipsommen' beschouwen we nu als een toepassingssituatie. Een situatie waarin kinderen hun handelen flexibel moeten aanpassen overeenkomstig de 'open' probleemsituatie en de regels van het principe van tientalligheid van ons getallensysteem.

4 Afhankelijke variabele

De gekozen oplossingsweg voor iedere aangeboden opgaven gold als afhankelijke variabele. Deze bestond uit vier categorien (tabel 4).

Categorie	Opgave 27 + . = 65 voorbeeld 1	voorbeeld 2
1. Splitsen	20 + 40 → 60 40 – 10 → 30 7 + 8 → 15 30 + 8 → 38	20 + 30 → 50 7 + 8 → 15 30 + 8 → 38
2. Reconstruerend splitsen	20 + 40 → 60 60 + 7 → 67 67 – 2 → 65 40 – 2 → 38	20 + 30 → 50 50 + 7 → 57 57 + 8 → 65 30 + 8 → 38
3. Springen	27 + 30 → 57 57 + 8 → 65 30 + 8 → 38	27 + 40 → 67 67 – 2 → 65 40 – 2 → 38
4. Aanvullen	27 + 3 → 30 30 + 30 → 60 60 + 5 → 65 30 + 5 + 3 → 38	27 + 3 → 30 30 + 35 → 65 3 + 35 → 38

Tabel 4: categorieën en voorbeelden bij de variabele oplossingsmethode

5 Resultaten

Voor het analyseren van de gegevens maakten we gebruik van de HOMALS-techniek. HOMALS staat voor homogeneity analysis by alternating least squares (Van der Geer, 1988). Met deze techniek kunnen structuren in de data geëxploreerd worden. Het resultaat is een grote mate van datareductie. De uitkomsten van bovenstaande HOMALS-oplossingen zijn in tabel 3 samengevat. De antwoordprofielen van de leerlingen zijn nu uitgedrukt in termen van de meest gekozen handelingsstructuur (categorie) voor het oplossen van de 'stipsommen'.
Tabel 5 laat zien dat het handelen van de kinderen het best getypeerd kan worden als een gecombineerde keuze van handelingsstructuren: meerdere handelingsstructuren worden gekozen waarbij één handelingsstructuur de boventoon voert. Wordt de dominante handelingsstructuur als criterium gekozen, dan blijkt er sprake te zijn van een duidelijke volgorde. Aan de ene kant leerlingen met antwoordprofielen waarin het splitsen dominant is. Aan de andere kant leerlingen waarin het springen en aanvullen de meest gekozen handelingsstructuur is.

Zijn onze verwachtingen omtrent de flexibiliteit van de 'splitsers' en 'springers' uitgekomen? Op de eerste plaats blijkt de methode van het splitsen vooral gekozen te worden in de T+ en de T- groep; de leerlingen die geneigd zijn veelal te springen vooral in de G10-groep. De procedurevaste 'springers' handhaven in de regel de door ons efficiënt en effectief genoemde sprongmethode bij het oplossen van de stipsommen en laten deze niet los ten gunste van de splitsmethode (vgl. verwachting 1).

Groep		**Antwoordprofiel***			
		SPL	**RSPL**	**SPR**	**AAN**
G++	(N = 21)	0	0	17	4
G+	(N = 24)	0	0	21	3
T+	(N = 24)	4	2	17	1
T–	(N = 22)	14	0	8	0

* De antwoordprofielen zijn uitgedrukt in termen van de dominant voorkomende handelingsstructuur
SPL = splitsen; *RSPL* = Reconstruerend splitsen;
SPR = springen; *AAN* = aanvullen.

Tabel 5: onderzochte leerlingen (N = 91) ingedeeld naar groep en antwoordprofiel

In de groepen van procedure-vaste 'splitsers' zien we een heel ander beeld. De T-ers splitsen veelvuldig: 65 procent tegenover slechts 25 procent in T+ groep. De meeste rekenaars binnen de T+ groep laten bij de 'stipsommen' de splitsmethode vallen. Er lijkt sprake te zijn van een samenhang tussen flexibiliteit in de zin van aanpassingen in de richting van de sprongmethode en rekenvaardigheidsniveau. Inderdaad lijken de kinderen uit de T+ groep flexibeler dan de kinderen uit de T- groep. Vergelijk de verwachtingen 2 en 3. Ten slotte lijkt in het oplossinghandelen van de kinderen toch enige gewoontevorming te zijn opgetreden. Dat blijkt uit de aanpassingen in alle groepen: bijvoorbeeld van splitsen naar springen, van springen naar aanvullen.
Opmerkelijk is, dat de methode van het 'aanvullen' alleen bij de springers op hoger vaardigheidsniveau werd gevonden (tabel 5). Ook dat roept vragen op met betrekking tot de voorgestelde rijmethodevarianten in de 'Proeve ...', waarop wij nu niet verder ingaan.

Discussie

Mag nu de conclusie getrokken dat de flexibele 'T-ers' inderdaad beschikken over stabiele conceptuele modellen? Op basis van voorgaande gegevens zou deze conclusie opgaan voor de kinderen die *wisselen* van methode. Echter flexibiliteit kan in de context van voorgaande studie ook betekenen dat het kind zijn *vertrouwde* splitsmethode *aanpast*. Bijvoorbeeld door bij de opgave 27 + . = 65 niet twintig en zestig als steunpunten te kiezen, maar twintig en vijftig. Door *simultaan* in te wisselen ontstaat een aanzienlijk minder omvangrijke handelingssequens. Dit zou kunnen verklaren waarom sommige rekenaars ondanks het groter probleemkarakter van de opgaven blijven vasthouden aan de 1010-procedure.
Voor de constructie van een dergelijke 1010-variant is net als bij de G10-procedure een dieper begrip van het principe van tientalligheid noodzakelijk namelijk dat dit ook in de volgorde van getallen ('ordinaal') een rol speelt. De vraag naar de instabiliteit van het conceptuele model kan daarom niet zeker beantwoord worden als het criterium van wendbaarheid verruimd wordt van inruilen naar aanpassen.
Daarnaast is er nog geen uitsluitsel gegeven over de *kwaliteit* van de handelingsstructuur: leidt deze tot het goede antwoord? Ook een kwaliteitscriterium in termen van de succes- graad lijkt opgenomen te moeten worden in het criterium van wendbaarheid.

Ten slotte kan er gediscussieerd worden over de aard van de aangeboden opgaven met name het realiteitsgehalte ervan. Als deze kinderen nu gevraagd wordt een probleem in een realistische context op te lossen, is hun handelen dan wellicht wendbaarder?

Het zal duidelijk zijn dat het veelvuldig kiezen van de splitsmethode bij gewone formule-opgaven wel kan wijzen op een 'strong strategy' maar niet noodzakelijk hoeft te berusten op een 'weak model'. We stellen vast dat het op zich zelf niet belangrijk lijkt volgens welke *methode* - splitsen of springen - kinderen een opgave oplossen, als wel dat de *grondslag* waarop dat handelen berust er toe lijkt te doen: flexibel of niet. De onderzoeksbevindingen die we hiervoor presenteerden lijken er op te wijzen dat een een belangrijke stap in de ontwikkeling van het (gevarieerd) hoofdrekenen hierin lijkt te bestaan dat kinderen leren het principe van tientalligheid ook sequentieel of ordinaal te interpreteren. De flexibele splitser geeft hiervan in meerdere (inruilen) of mindere mate (aanpassen) blijk. Ook duidelijk is dat verder onderzoek naar het vraagstuk van de flexibiliteit, of ruimer variabiliteit en rigiditeit, noodzakelijk is. In de toekomst hopen we enkele onderzoeksgegevens te kunnen presenteren die meer informatie verschaffen over de hiervoor aangestipte kwesties.

Literatuur

Beishuizen, J.J., M. Beishuizen, en E.J.H.M. Felix: Leren optellen en aftrekken: een longitudinaal onderzoek, *Tijdschrift voor Onderwijsresearch*, 14, 1989, pag.91-102

Beishuizen, M. en F. van Mulken: Twee veelgebruikte oplossingsmanieren bij hoofdrekenen: de 1010- en de G10-procedure, *Tijdschrift voor nascholing en onderzoek van het reken-wiskundeonderwijs*, 6(3), 1988, pag.32-36.

Beishuizen, M. en G. Broers: Leren rekenen: inzicht of routinevorming? *Psychologie*, 10, 1990, pag.36-40.

Beishuizen, M., G. Wolters en G. Broers: Mentale rekenprocedures in het getallengebied 20-100 onderzocht met reactietijdmeting en tempotoetsen, *Tijdschrift voor Onderwijsresearch*, 1991 (in druk).

Corte, E. de, L. Verschaffel, en V. van Coillie: Invloeden van getalskenmerken, semantische structuur en antwoordvorm op het oplossen van vraagstukken over vermenigvuldigen, P. Span, E. de Corte en B. van Hout Wolters (red.), *Onderwijs-Leerprocessen: strategieën voor de verwerking van informatie*, Bijdragen aan de Onderwijsresearch; no. 22, Swets en Zeitlinger, Lisse 1990, pag.183-190.

Geer, J.P. van der: *Analyse van kategorische gegevens*, Van Loghum Slaterus, Deventer 1988.

Krutetskii, V.A.: *The Psychology of Mathematical Abilities in Schoolchildren*, The University of Chicago Press, Chicago 1976.

Lesh, R.: Conceptual Analysis of Problem-Solving Performance, E.A. Silver (ed.), *Teaching and Learning Mathematical Problem solving: multiple research perspectives*, Lawrence Erlbaum Associates, Hillsdale, New Jersey 1985a, pag.309-329).

Lesh, R.: Conceptual Analysis of Mathematical Ideas and Problem-Solving Processes, E. Streefland (ed.), *Proceedings of the ninth International Conference for the Psychology of Mathematics in Education*, volume II, Utrecht 1985b, pag.73-96.

Treffers, A. en E. de Moor: *Proeve van een nationaal programma voor het reken-wiskundeonderwijs op de basisschool*. Deel 2: Basisvaardigheden en cijferen, Zwijsen, Tilburg 1990.