Rekenvaardigheid Pabo-studenten

F. Brandt

Domstad akademie Utrecht

1 Student fietst van P(abo) naar Q(ualiteit)

In januari 1986 onderzocht Corrie Jacobs voor haar doctoraalscriptie de rekenvaardigheid van ruim driehonderd studenten Pabo 2. Toen zij de resultaten in februari 1987[1] publiceerde, sloeg dat in als een bom: 'Meester kan niet meer rekenen.' De inspectie kreeg onmiddellijk de opdracht een onderzoek in te stellen en kwam met even alarmerende resultaten. Voor de Pabo's zelf was dat al lang geen nieuws meer: al jaren werd daar geconstateerd dat het rekenpeil te laag was. Maar hoe is dat dan ontstaan?

2 Voorgeschiedenis

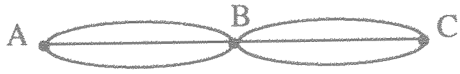
Tot 1968 hadden we een vijfjarige kweekschool, aansluitend op de Mulo; twee jaar eerste leerkring, drie jaar tweede leerkring, waarna nog een aparte, zogenaamde hoofdakte. De eerste leerkring was al beroepsgericht en omvatte naast pedagogiek en didactiek ook een groot brok rekenkunde en wiskunde. Deze laatste waren gericht op eigen kennis, niet op de didactiek van de lagere school. Men ging er bovendien van uit - en toen nog terecht - dat de rekenvaardigheid van de nieuwe kwekelingen op voldoende peil was; het eindexamen Mulo bevatte pittige rekenopgaven. Hoe rekenles te geven, leerden wij in het vak didactiek.

Met de komst van de driejarige Pedagogische Academie (1968) wordt de eerste leerkring vervangen door de zogenaamde Havo-top (Havo 4-5), aansluitend op Mavo 4 of Havo 3. Beide vooropleidingen noch de Havo-top zelf hebben nog rekenen op het programma, en wiskunde is niet verplicht. De Havo-top kent geheel geen gerichtheid op het onderwijzersberoep. Afgezien van wat rekenwerk in de brugklas van Mavo of Havo kan men stellen dat nieuwe PA-studenten al vijf tot zes jaar niet meer gerekend hebben. En dat was onmiddellijk te merken.

Geheel nieuw op de PA is dat de algemene didactiek van de kweekschool vervangen wordt door de didactiek van de zaak- en expressievakken. Deze vakdidactieken ontwikkelen zich in die jaren (1968-'80) stormachtig, waarbij rekenen-wiskunde sterk onder invloed staat van Wiskobas en het IOWO. Terwijl op de lagere school en in het voortgezet onderwijs het mechanistisch rekenen[2] en de formele wiskunde[3] nog de dienst uitmaken, ontwikkelt de afdeling Wiskobas van het IOWO een totaal andere visie op het éne vakgebied rekenen-wiskunde.[4] Deze visie vraagt het ontwikkelen van een geheel andere attitude dan 'zeg maar hoe of ik het doen moet.' Integendeel, eigen onderzoek van de werkelijkheid, probleemgerichtheid, het ontwikkelen van eigen aanpakgedrag en ruimte voor het ontwikkelen van de 'eigen' wiskunde staan hier centraal.

Het IOWO propageerde het ideaal van een geïntegreerde vakopleiding: vorming van de eigen wiskundige attitude hand in hand met het ontwikkelen van didactische inzichten en al doende ook van de eigen rekenvaardigheid. Dit lukte aanvankelijk nog vrij aardig, omdat alle PA's met twee tot drie uur wiskunde per jaar ruim boven de minimumtabel zaten. De PA-docenten waren het in principe best wel eens met dit ideaal. Maar allengs blijkt de reken-wiskundige basis van nieuwe studenten steeds wankeler en loopt de zogenaamde beginsituatie zó enorm uiteen dat goed interactief onderwijs met de hele groep onmoge-

lijk wordt. Dus ontstaan er toch allerlei particuliere trainingsprogramma's om de rekenvaardigheid tot een werkbaar peil op te krikken.
Het feit dat sinds 1975 het percentage studenten met wiskunde in hun pakket langzaam toeneemt, heeft geen positief effect. Het verschil in beginvaardigheid blijft even groot, terwijl studenten met een zwakker wiskunde eindcijfer eerder hinder dan voordeel van de geleerde wiskunde hebben. Een simpel probleempje als 'Langs hoeveel verschillende routes kun je van A via B naar C komen?' (fig.1), wordt door zulke studenten vaak herkend als een stukje statistiek en te lijf gegaan met 'n- over k-faculteiten'.



Figuur 1

Hoe is in het begin van de jaren tachtig dus de situatie bij beginnende PA-studenten?

- de mechanistische rekenvaardigheid van de lagere school is bij vele grotendeels weg gezakt na vijf tot zeven jaar zonder rekenen;
- de formele wiskunde van het voortgezet onderwijs biedt weinig steun en vaak hinder bij de vorming van de beoogde wiskundige attitude;
- de gehele vooropleiding staat haaks op het leren omgaan met realistische problemen - wat in de nieuwe rekenmethoden een steeds belangrijker plaats gaat innemen;
- de beginsituatie loopt zover uiteen dat elke PA zijn eigen rekenvaardigheidstrainingsprogrammaatje heeft.

In deze toch al troebele vijver valt dan de steen van de nieuwe Pabo: KLOS en PA versmelten tot één lerarenopleiding voor vier- tot twaalfjarigen. De Pabo wordt weliswaar vierjarig, maar dat moet 'budgetair neutraal' en dat laatste betekent onder andere: hetzelfde totaal aantal lesuren als op de driejarige PA! In dezelfde lestijd moet dus ook nog tijd gevonden worden voor de ontwikkeling van het jonge kind binnen de vakdidactieken. Dus veel meer in - vaak - veel minder tijd. Want door de fusies wordt de urenverdeling noodgedwongen bepaald door gevestigde rechtsposities. De zaakvakken moeten inleveren om ruimte te maken voor de overvloed aan pedagogen en neerlandici. De minimum-urentabel (honderdzestig uren wiskunde, zeg maar één en een kwart lesuur per jaar) biedt daartegen onvoldoende tegenwicht en wordt in een aantal gevallen niet eens gehaald.[5]
De start van de nieuwe Pabo in 1984 heeft plaats onder een ongunstig gesternte voor de zaakvakken. Onder de vlag van de eigen verantwoordelijkheid van de opleidingen laat de nieuwe wet op het hoger beroepsonderwijs (1986) de minimumtabel vallen. De nieuwe bekostigingssystematiek dwingt de Pabo's tot bezuiniging, onder andere op de lesuren. Het aantal aanmeldingen (de basis vcor subsidie) is dramatisch ingezakt. Veertig tot zestig procent van de docenten van 1986 is boventallig. Dat dit alles geen gezonde invloed heeft op de uitbouw van een evenwichtig opleidingsprogramma spreekt voor zich: afvloeiïngsregelingen spelen een grotere rol dan onderwijsvisie.[6]

3 Rekenvaardigheid en wiskundemaatregel

De vloed aan negatieve publikaties, opgeroepen door de resultaten van Jacobs en de Inspectie heeft minister Deetman laten besluiten het vak wiskunde verplicht te stellen in de eindexamenlijst van kandidaten voor de Pabo per augustus 1988. Dat zou een halvering van het aantal aanmeldingen betekenen en het einde van de vele Pabo's. Maar niet alleen daarom was de NVORWO niet gelukkig met dit overhaast genomen besluit. Zoals gezegd, sluit de huidige wiskunde van het voortgezet onderwijs allerminst aan bij de visie van de opleidingen en vormt voor zwakkere studenten eerder een nadeel. De NVORWO had altijd geopteerd voor het nieuwe programma Havo wiskunde A, dat op realistische en toegepaste leest is geschoeid. Helaas, dat programma is pas in 1989 klaar en zal pas in mei 1992 als examenvak op het Havo worden afgenomen.

De verenigde Pabo-directeuren probeerden het fundament onder de wiskundemaatregel weg te graven met een eigen rekenvaardigheidsproject, dat de Pabo's in eigen beheer zouden gaan uitvoeren. Aldus werd het groene licht gegeven voor het project 'Reken Maar' (L. Gilissen e.a.), bekostigd door het HBO. Dit project kan, in experimentele versie, in augustus 1988 van start gaan.

Onder druk van HBO, NVORWO en andere geledingen heeft het ministerie de oorspronkelijke maatregel 'wiskunde verplicht' verzacht tot: Voor het jaar 1989-'90 een stevige rekentoets aan het eind van de propedeuse; voor de jaren 1990-'92 een wiskundetoets aan het eind van de propedeuse Havo wiskunde A.

Men kan dus wel zeggen: Ondanks de initiatieven van het veld om de rekenvaardigheid veilig te stellen, is de wiskundemaatregel, genoemd uit zorg om diezelfde rekenvaardigheid, een eigen leven gaan leiden. Het Cito, dat al eerder rekentoetsen voor de Pabo had ontworpen, heeft van het ministerie de opdracht gekregen modeltoetsen, die niveaubepalend zijn, te ontwerpen voor de jaren 1989-'92. Per augustus 1988 zijn voor de rekenvaardigheid van Pabo-studenten nu drie centrale 'pakketten' beschikbaar, te weten:

- *Rekentoets Pabo*, Cito Arnhem 1988.
- *Reken vaardig*, deel 0 van de serie 'Wiskunde & Didactiek' door F. Goffree e.a., Groningen.
- *Reken Maar* door L. Gilissen e.a., Nijmegen.

Van elk volgt nu een beschrijving met enig commentaar

Cito 'Rekentoets Pabo 1988'

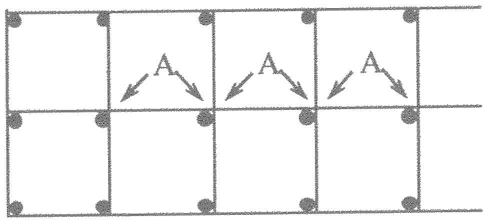
De toetsen uit de jaren 1987-'88 van Jacobs, de inspectie en het Cito zelf bestonden uit opgaven, ontleend aan rekenboekjes voor groep acht van de basisschool, en wel speciaal van zogenoemde realistische methoden. De Cito-toets van 1987 wilde ook per onderdeel de rekenvaardigheid bepalen, maar daardoor werd deze toets veel te uitgebreid om in de gestelde tijd af te kunnen nemen. De toets van 1988 is daarom veel beknopter, moet in één uur af te nemen zijn en heeft de diagnostische doelstelling verlaten. Zij is gesteld in open-vraagvorm (geen multiple choice meer), wat het corrigeren tijdrovender maakt, bevat hoofdzakelijk realistische problemen en nauwelijks kale sommen

Het doel van de toets is objectieve informatie te geven betreffende de rekenvaardigheid van studenten door relatieve plaatsbepaling binnen een relevante referentiegroep. De opgaven vormen een tamelijk willekeurige steekproef uit het totale rekengebied, maar dat zal de relatieve positiebepaling nauwelijks beïnvloeden. Maar de toets zal weinig uitsluitsel geven over *het* rekenniveau van *de* Pabo-student. (Al geeft het resultaat 'de helft of minder goed beantwoord', geldend voor veertig respectievelijk dertig procent van de deelnemende eerste- en tweedejaarsstudenten natuurlijk wel te denken.)

Na een jaar kunnen de docenten de paralleltoets afnemen en een beeld krijgen van de vooruitgang van hun studenten afzonderlijk en gezamenlijk. De toets is dan ook in twee versies beschikbaar die inhoudelijk en psychometrisch parallel zijn, zodat de scores direct vergelijkbaar zijn. Van significante verbetering kan dan pas sprake zijn als de score van de paralleltoets minstens vier tot vijf punten hoger ligt (op 32 opgaven), omdat de standaardmeetfout (bij 95 procent zekerheid) op vier punten ligt?

Om vergelijkbare resultaten te verzamelen, zijn stringente correctie- en scoringsvoorschriften nodig, die strikt gehanteerd moeten worden door de corrigerende docenten: wat volgens dit voorschrift niet goed is of onvolledig, is fout. Voor de normering van de scores zijn de resultaten van een proefgroep als uitgangspunt genomen: van hoog naar laag is de proefgroep ingedeeld in tien gelijke subgroepen, en de individuele score van een student geeft aan in welke subgroep hij zou 'thuishoren'. Naast deze zogenoemde decielschaal levert het Cito ook een normering op grond van de normaalverdeling, de C-schaal.

De toets bestaat voor het grootste deel uit korte en langere tekstopgaven zoals 'Hoeveel kost 1 kilo kaviaar als 0,05 kilo *f* 7,95 kost?' (opgave 9) en '50 posters worden naast elkaar opgehangen in twee rijen van 25 (in de punten A zitten dus vier posters vast met één punaise). Hoeveel punaises heb je nodig voor 50 posters?' (fig.2).



Figuur 2

'Kale' sommen komen alleen voor in een vorm die denkwerk vergt, zoals 'Welk getal ligt precies midden tussen 0,03 en 0,1?' (opgave 19) en 'Welke cijfers moeten op de punten staan?' (opgave 30):

300 •
••• 6 -
2645

Het commentaar van de deelnemende docenten laat blijken dat men zich goed kan verenigen met de opzet van de toets en de keuze van de opgaven. Het Cito overweegt om voor een aantal onderwerpen vervolg-toetsen te maken, met name voor verhoudingen, breuken, procenten, eigenschapsrekenen, schattend rekenen, greep op getallen, meten, meetkunde, metriek stelsel en tabellen, statistiek en kans. Deze toetsen kunnen een diagnostisch instrument vormen, waarbij de paralleltoetsen de opbrengst van het gevolgde trainingsprogramma kunnen meten.
Het is natuurlijk jammer dat ook bij een open-vragen-toets als deze, de meerwaarde van het niveau van oplossen geen gewicht in de schaal kan leggen. Zo is op de postersopgave slechts één goed antwoord mogelijk: 78; maar als dat door moeizaam tellen is verkregen, is dat eigenlijk minder 'waard' dan een antwoord dat berust op het herkennen van reeksen maar door een kleine vergissing niet op 78 uitkomt. Maar daaraan is, voor het valide hanteren van centrale toetsen, helaas weinig te doen.

Project 'Reken Maar'

Het project bestaat in zijn huidige versie uit:

- een selectietoets (27 opgaven) waarmee bepaald wordt of een student in aanmerking komt voor bijscholing in rekenen. De toets omvat behalve kale cijfersommen (ook met breuken en kommagetallen) tevens opgaven voor het ordenen van breuken en contextopgaven voor meten en verhoudingen, met als uitsmijter: 'Er gaan zes glazen wijn uit een fles van 0,8 liter. Hoeveel flessen van 1 liter moet je kopen om 150 glazen wijn te kunnen schenken?'
- een diagnostische (instap-)toets uit drie delen (kale sommen, redactiesommen, hoofdrekenen) om te bepalen welke onderdelen precies bij elke geselecteerde student in aanmerking komen voor bijscholing;
- een analyse-schema waarmee uit de goed-foutscore besloten zou kunnen worden aan welke inzichten en vaardigheden het precies schort. De samenstellers zijn zich overigens best bewust dat de wijze van oplossen vaak bepaalt onder welke categorie een gemaakte fout thuishoort. Wie bijvoorbeeld in 29 x 30 + 30 = (opgave C4) een aantal cijferfouten maakt, maakt eerder duidelijk het cijferen niet te beheersen dan 'feitenkennis betreffende eigenschappen'. Jammer dat deze relativering niet in het pakket staat vermeld;
- zelfstudiepakketten voor de volgende onderdelen:
  * cijferen met gehele getallen;

* kommagetallen en cijferen met kommagetallen;
* breuken;
* meten, verhoudingen, procenten;
* contextopgaven.

De zelfstudiepakketten weerspiegelen duidelijk het realistische rekenwerk; het cijferen wordt via progressief schematiseren ontwikkeld en basisbegrippen worden vanuit de werkelijkheid opgeroepen. Dit staat in grote tegenstelling tot de toetsen die het traditionele mechanistisch rekenen nagaan, met uitzondering van de toets na het studiepakket: deze is namelijk op de inhoud van het pakket geënt.

Deze tegenstelling is een bewuste keus van de samenstellers. Volgens hen heeft het weinig zin om aankomende studenten te toetsen op 'realistische' vaardigheden waarin zij nooit zijn onderwezen. De toets moet nagaan wat is blijven hangen van het feitelijk genoten onderwijs. Het zou niet eerlijk zijn om dan nà bijscholing méér te eisen dan wat verlangd werd van degenen die op grond van de eerste toets werden vrijgesteld van bijscholing. Bovendien, ook na realistisch onderwijs, moeten kale opgaven goed gemaakt kunnen worden.

De ervaring wijst uit dat zwakke rekenaars onder de studentren zelfs de basisalgoritmen onvoldoende beheersen en ook wanneer ze nog wel weten 'hoe of het moet', niet begrijpen waarop het steunt. Met een realistische aanpak proberen de zelfstudiepakketten zowel inzicht als vaardigheid praktisch van de grond af aan opnieuw op te bouwen, waarbij schatten en handig rekenen het gevaar van te snel mechaniseren moet voorkomen. Op de bijeenkomst van oktober 1988 brachten de docenten als bezwaar naar voren: Eigenlijk hebben we geen boodschap aan het mechanistisch rekenen, dus ook geen belangstelling voor de vraag of dat nog wel functioneert. Het feit dat alleen dat wordt nagegaan in voor- en natoetsen brengt het gevaar met zich mee dat het mechanistisch rekenen weer insluipt op de Pabo's, omdat toetsen de neiging hebben een eigen leven te gaan leiden; men werkt toe naar het vereiste eindniveau.

Zelfstudie vergt veel tekst en uitleg. De inleiding op elk studiepakket adviseert de student eerst terug te bladeren voor hij hulp inroept en zelfcorrectie met behulp van de zakrekenmachine te plegen. Aangezien schatten iets anders is dan gokken, adviseert men het gebruik van een bandrecorder om te kunnen reflecteren op de weg waarlangs de student tot zijn schatting is gekomen. Voor schatten geeft pagina 9 van het pakket 'Cijferen' een stapsgewijze handleiding. Of dit echt zal gaan functioneren is natuurlijk wel een open vraag.

Om goed zicht te krijgen op hoe dat nu feitelijk werkt, en om beter te kunnen vergelijken met de aanpak van 'Reken vaardig' werken we twee onderwerpen nader uit.

Vermenigvuldigen in 'Reken Maar'

Eerst wordt nagegaan welke tafelprodukten en hun omgekeerden nog vlot functioneren. Het vermenigvuldigen wordt ontwikkeld aan de hand van het tegelpleinmodel: tel zo handig mogelijk het aantal tegels van een rechthoekig plein door het plein op te splitsen in tafelprodukten:

(pag.33 'Cijferen')

Vervolgens worden de tegels onzichtbaar en gaat het om de (decimale) indeling van het plein, toegepast op '18 doosjes van elk 16 potloden' e.d. Soms ligt handig teruggrijpen op vorige uitkomsten voor de hand: 19 x 16 gevolgd door 18 x 16.

Om de verbinding naar het officiële cijferalgoritme zo soepel mogelijk te laten verlopen, wordt de indeling en de wijze van opschrijven van het begin af aan strak geïnstrueerd: bij 16 x 32 bijvoorbeeld niet 10 x 32 maar:

$$
\begin{array}{rl}
- & 6 \times 30 + \ \ 6 \times 2 = 192 \\
 & 10 \times 30 + 10 \times 2 = \underline{320} +
\end{array}
$$

Nadat dan heel even de techniek van het onthouden (6 x 3 = 18, 8 opschrijven, 1 onthouden) is aangestipt, stapt men over op tabellen (fig.3) die daarna alleen in het hoofd mogen worden benut.:

37 x 48

x	40	8		
7	280	56	→	336
30	1200	240	→	1440 +

De getallen worden groter en het schatten komt erbij. Maar voor 507 x 396 worden *drie* lege regels voorgedrukt, evenals voor 400 x 251. Daarop wordt in commentaar-achteraf nìet ingegaan. Als eenmaal het officiële algoritme wordt ingevoerd evenmin. De kans op verschijnselen als

```
  412
  205  ×
 2060
 0000
82400
```

is dan ook niet uitgesloten! Ook al omdat er geen uitgewerkte antwoorden worden gegeven, waardoor geen controle op de juiste aanpak mogelijk is (tenzij door begeleidend docent).

Breuken in 'Reken Maar'

Dit onderdeel vergt veel en nauwkeurig lezen! Hierbij zijn wel uitwerkingen voorhanden. Na elke paragraaf wordt voor verder oefenen verwezen naar de betreffende opgaven uit 'De wereld in getallen'. Heel duidelijk worden geen maniertjes aangeleerd, maar men gaat bewust ook niet in op de didactiek van de basisschool.

Er wordt begonnen met het verdelen van aantallen, daarna van een eenheid; eerst komen stambreuken aan de orde, daarna ook hogere tellers. Steeds eerst uitgewerkte voorbeelden, dan een verdeelopdracht (met uitwerking achterin); daarbij komt al iets van gelijkwaardigheid om de hoek kijken.

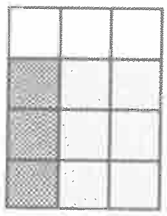
De gelijkwaardigheid wordt uitgewerkt met behulp van evenredigheidstabellen: 'Stel we hebben met ons drieën twee pannekoeken. Een gezelschap van zes personen zal vier pannekoeken moeten bestellen om ervoor te zorgen dat ieder evenveel pannekoeken krijgt als ieder van ons. In de tabel (fig.4) zien we:

pannekoeken	2	4	6	8		
personen	3	6	9	12		

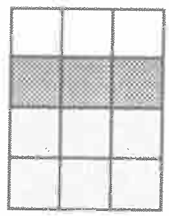
Vul deze tabel verder in.' Hierbij wordt afgesproken dat het resultaat (het deel dat ieder krijgt) in het kleinst mogelijke getal wordt geschreven.

Dan komt het vergelijken van ongelijknamige breuken onderling: welke is groter? Eerst zelf proberen, daarna worden zeven aanpakmogelijkheden uitgewerkt die oplopen in abstractiegraad (pannekoeken, tegels, tabellen en getallenlijn). Bij de tabellen wordt ook de mogelijkheid van gelijke tellers aangegeven: 'twaalf pannekoeken voor twintig personen is meer dan twaalf voor 21, dus $\frac{3}{5} > \frac{4}{7}$.'

Nu volgen de bewerkingen. Optellen van ongelijknamige breuken wordt voorgedaan op een getallenlijn met voorgedrukte verdeling, en via tabellen wordt duidelijk gemaakt dat die verdeling berust op uitsluitend getalniveau, zonder toepassingen; die komen pas in de oefenstof van 'De wereld in getallen' aan de orde. Het vermenigvuldigen met breuken wordt aangekaart vanuit het nemen van een deel (van een aantal of van een gedeelte), in een concrete context. Voor de berekening stapt men van het boomdiagrammodel over op het tegelplein: 'Van een pizza van gisteren is nog $\frac{3}{4}$ deel over. Vandaag verdelen we dat met ons drieën. Ik eet mijn deel het eerste op, dat is $\frac{1}{3}$ deel van die pizza. Ik laat nog $\frac{2}{3}$ deel daarvan liggen. Hoeveel (welk deel) van die hele pizza laat ik nu over? We gaan weer een plaatje tekenen (fig.5). We denken ons maar even in dat we een rechthoekige pizza hebben deze keer:



of



De helft van de hele pizza blijft dus over. In rekentaal $\frac{2}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$. Vraag: Waarom zouden we hier een tegelplein van twaalf tegels gekozen hebben?'
Deze toch wel cruciale vraag wordt niet beantwoord. Het werken met gevallen waarin beide factoren kleiner dan één zijn leidt tot de regel van 'teller × teller en noemer × noemer' al wordt dat niet met déze woorden gezegd. Het wordt wel bij factoren gróter dan één steeds meegenomen, zodat de moeilijke tegeltoestand in elk geval berekenbaar blijft, maar dat $2\frac{2}{3} \times \frac{5}{6} = 2 \times \frac{5}{6} + \frac{2}{3} \times \frac{5}{6}$ moet zo maar uit de bijgeleverde tekeningen blijken. Probleemloos kiest men nu voor een eenheid van bijvoorbeeld drie bij vijf vierkante tegels voor $1\frac{1}{3} \times \frac{2}{5}$ in plaats van een vierkant horizontaal en verticaal in respectievelijk vijf en drie stroken te verdelen. Het herkennen van de eenheid wordt er daardoor niet gemakkelijker op. En er wordt nu ook niet verwezen naar oefenopgaven uit 'De wereld in getallen'. Dat delen-door-een-breuk alleen als verhoudingsdeling kan worden opgevat, wordt als axioma gepresenteerd: 'delen vatten wij hier op als herhaald aftrekken.' Het wordt uitdrukkelijk beperkt tot gevallen waarin de deler een geheel aantal keren in het deeltal past (op tegelmodel). En aan $\frac{1}{2} : \frac{3}{5}$ begint men bewust niet.
Overzien we deze twee deelgebieden, dan blijkt dat men inderdaad bij het begin begint, maar vrij snel aanstuurt op het einddoel. Dat gebeurt behoorlijk inzichtelijk, maar ook sterk instruerend; er is weinig tijd en gelegenheid voor eigen probeersels en qua modelgebruik is er meestal sprake van eensporigheid. Waarschijnlijk hebben de samenstellers rekening gehouden met het feit dat er maar weinig studietijd beschikbaar zal zijn voor bijscholing.

Deel 0 'Rekenvaardig' uit 'Wiskunde & Didactiek'
De ontwerpers hebben honderdvijftig opgaven uit de (realistische) rekenboekjes van groep zeven en acht geselecteerd zo dat ze de 'leerstof' vertegenwoordigen. Elke opgave wordt gevolgd door een uitwerking die de mogelijke denkprocessen bij het uitwerken van het gestelde probleem heel goed schildert; je kunt zeggen dat de uitwerking die de mogelijke denkprocessen bij het uitwerken van het gestelde probleem heel goed schildert; je kunt zeggen dat de uitwerking zichprobeert in te leven in de puzzelende student, compleet met gissen en missen. Bijvoorbeeld:

'schrijf op:

$>, <, =$; $3 \times 4 \times 5$ $\square$ $5 \times 4 \times 3$

5×12 $\square$ 4×13

Uitwerking: hoofdrekenen: $3 \times 4 \times 5 = 5 \times 4 \times 3$. Dat zie je zo, zonder te rekenen. Als je toch wilt rekenen... vooruit dan maar: $3 \times 4 \times 5 = 3 \times 20 = 60$. En $5 \times 4 \times 3 = 20 \times 3 = 60$. Wat een onzin! $5 \times 12 = 60$; $4 \times 13 = 4 \times 10 + 4 \times 10 + 4 \times 13 = 52$, dus $5 \times 12 > 4 \quad 13$. Vreemd eigenlijk, vier is één minder dan 5, maar dertien is één meer dan twaalf. Moeten ze dan niet gelijk zijn? Nee dus.'

Waarna de leraar om de hoek komt kijken: 'Dat zit zo: $5 \quad 12 = 5 \times (13 - 1)$ dus vijf minder dan', enz. De samenstellers zeggen dan ook:

'We hebben geprobeerd bij het oplossen een niet-schools standpunt in te nemen. De studenten hebben daardoor de gelegenheid om op basis van gezond verstand de gevolgde gedachtengangen te volgen en hun eigen aanpak daaraan te spiegelen.'[8]

Maar ook:

'We zijn uitgegaan van de gedachte dat iedere student met een Havo-opleiding in staat is de rekenopgaven van het basisonderwijs anno 1988 te leren maken.'

De collectie is als volgt geordend:

deel 1: opgaven uit de middenbouw. Die bestrijken alle traditionele rekengebieden, maar bovendien nog getallen, meetkunde, statistiek en toepassingen.

deel 2: opgaven uit de bovenbouw, die bovendien nog bestrijken: telproblemen (combinatoriek), redactiesommen, zakrekenmachine, vreemde valuta en toepassingen.

deel 3: rekenen zoals schoolmeester en gewone mensen het doen, bevat een aantal verrassende oefensituaties, waarbij enerzijds het verschil tussen schools en niet-schools naar voren komt en anderzijds wordt al ingespeeld op de didactiek van de basisschool. Echte contexten.

deel 4: gevarieerde oefeningen bestaat uit gevarieerde oefenstof en is bedoeld voor wie er nog niet genoeg van hebben gekregen.

Het boek besluit met een complexe verkeerssituatie die door een grotere groep studenten nagespeeld, geanalyseerd en beargumenteerd kan worden. Met dit zware accent op contexten, reflectie, strategieën en eigen ontwerp ademt dit boek geheel de sfeer van de opleiding zoals die in de volgende delen van 'Wiskunde & Didactiek" naar voren komt.

Vermenigvuldigen in 'Reken vaardig'

Men stapt in met een aantal hoofdrekenopgaven waarin onder andere de commutativiteit ($5 \times 27 \times 2 = 10 \times 27$) en distributiviteit ($13 \times 15 = 10 \times 15 + 3 \times 15$) een rol spelen. Dat zal juist de zwakke rekenaars flink onzeker maken: nooit geweten, nooit gedaan. Het begrip wordt dan nader ontwikkeld aan realistische rechthoeken en blokken als vellen postzegels en luciferspakken, maar slechts heel kort. Ontbinden in factoren en tabellen geven studenten die al weten wat vermenigvuldigen is, een ruimer zicht op het toepassingsgebied.

Serie 13 'Tekstopgaven' introduceert vermenigvuldigen met een breuk, en serie veertien 'Toepassingen' oefent in het herkennen van vermenigvuldigsituaties (bomen per hectare bijvoorbeeld).

In deel II, serie 1 volgen toepassingen op breuken als '$24 \times 12\frac{1}{2}$' met realistisch commentaar: '$12\frac{1}{2}$ is de helft van 25; 24 halve kwartjes is gelijk aan twaalf hele kwartjes (nou ja, gelijk?).' En in 'Telproblemen' komt het begrip eigenlijk pas echt naar voren: stapels gevulde eierdozen: 'Hoeveel eieren? Tel handig!'

Kortom: alles komt even aan bod, waarbij de band met de realiteit heel sterk blijft.

Breuken in 'Reken vaardig'
Serie II, 11, opgave één en twee start met het al metend benoemen van stukjes. Opgave drie introduceert de evenredigheidstabel (die al eerder bij 'Verhoudingen' aan de orde is geweest). De student zoekt in de uitwerking naar de bedoeling van zo'n tabel.
Het strokenmodel van opgave vier veronderstelt dat de student beseft dat steeds een wisselende eenheid gekozen kan worden. Opgave vijf speelt met sprongen op de getallenlijn al in op het vermenigvuldigen. In 'Tekstopgaven' en 'Toepassingen' zijn ook nog enkele breukopgaven te vinden, maar die bieden geen nieuwe theoretische inzichten.
Serie II, 4, opgave één biedt een stel sommenrijtjes die alle 'rekentrucs' als vereenvoudigen en tegen-elkaar-wegstrepen bekend veronderstelt. De uitwerking gaat niet verder dan het bieden van de cijferende aanpak. Opgave twee bevat onder andere terugrekenen: $\frac{5}{8}$ deel is 30; alles is ....' Opgave drie en vier is weer tellend en metend het deel van het geheel bepalen en opgave vijf geeft een puur getalsmatige vermenigvuldigtabel met breuken, waarbij de uitwerking wijst op de handigheid dat de volgende rij uitkomsten soms gewoon de helft van de vorige rij is. Serie zes biedt sommenrijtjes, die bij nadere uitwerking toch wat meer denkwerk vereisen, omdat ze anders dan traditioneel worden uitgerekend. Verder de deling als herhaald aftrekken ('Hoe vaak kun je $\frac{1}{3}$ van 5 aftrekken') en een drietal toepassingen, waarvan de uitwerkingen op nogal abstract getalniveau staan. Ook serie 13 verwacht dat de studenten nu spontaan de breukproblemen met tegelplein en andere modellen te lijf zullen gaan, of dit minstens na eigen pogen kunnen begrijpen.

Overzien we deze twee deelgebieden dan valt op dat in veel minder opgaven veel meer wordt opgerakeld en dat de bewerkingen zelf eigenlijk nog geheel bekend worden verondersteld. Het materiaal biedt een enorm rijke horizonverbreding, maar wel voor studenten die al *kunnen* rekenen! En dat laatste blijkt juist bij de zwakke rekenaars onder hen gewoon niet het geval. Het gezond verstand is op rekengebied door hen allang verlaten en deze aanbieding ligt op *zo* hoog niveau dat de zwaksten überhaupt niet tot een eigen aanpak geraken.

Het zal best waar zijn dat Havo-studenten in staat zijn om de opgaven van het basisonderwijs te leren maken, maar de zwakkeren onder hen echt niet door ze *zo* hoog aan te slaan.
Maar wie dit instapniveau van 'Reken vaardig' aan kan, zal beslist met verrassing een heel nieuwe wereld voor zich zien opengaan en (weer) veel plezier in het rekenen krijgen in plaats van reflectie-en-verrijking-achteraf zullen zij de uitwerkingen als uitleg-vooraf moeten gebruiken, waardoor het leereffect veel lager wordt.

4 'Cito', 'Reken Maar' en 'Reken vaardig

Als we de drie rekenvaardigheidsmaterialen naast elkaar leggen, dan zien we dat die elkaar prachtig aanvullen, maar ook onafhankelijk van elkaar benut kunnen worden. Wie bezwaar heeft tegen de mechanistische (sorry) voor- en natoetsen van 'Reken Maar' kan de Cito-toets gebruiken. Studenten die meteen al goed voldoende scoren voor de Cito-toets zullen waarschijnlijk redelijk zelfstandig met 'Reken vaardig' uit de voeten kunnen; ze zullen daaraan niet alleen met veel plezier veel leerzaams opdoen, maar ook al goed ingeschoten raken op de aanpak van 'Wiskunde & Didactiek' in de opleiding. Wie onvoldoende of twijfelachtig scoort, kan met de diagnostische toetsen van 'Reken Maar' - of straks met de diagnostische toetsen van het Cito - achterhalen op welke gebieden re-teaching nodig is en daarvoor eerst de daarvoor aangewezen zelfstudiepakketten van 'Reken Maar' doorwerken. Of er dan nog tijd overschiet om alsnog met 'Reken vaardig' aan de slag te gaan, is een grote vraag maar het zou wel erg wenselijk zijn, want 'Reken vaardig' begint ongeveer waar 'Rekenen Maar' ophoudt.

Beide rekenvaardigheidsprogramma's zijn bedoeld voor zelfstudie. Als 'Reken vaardig' aan alle studenten die bijscholing nodig hebben zonder meer zou worden gegeven, dan lopen de zwakkeren onherroepelijk vast; elk rekenfacet immers komt maar één keer aan de orde en wordt niet verder ingeoefend en vastgelegd. 'Reken vaardig' verlangt mijns inziens intensieve begeleiding als men dat als enig trainingsprogramma zou hanteren. Voor degenen die al een aardig rekenniveau hebben, lijkt dit programma uitstekend geschikt om in groepen van twee tot vier 'gelijkwaardige' studenten zelfstandig door te werken.
'Reken Maar' daarentegen lijkt vrij goed uitvoerbaar voor zwakke rekenaars met weinig begeleiding en individueel; maar waarschijnlijk méér begeleiding dan de gestelde hulp-opaanvraag.
Op de conferentie van november 1988 hebben we een korte bliksem-enquête gehouden om een beeld te krijgen van in hoeverre de rekenvaardigheidsmaterialen op de Pabo's ingang hadden gevonden.

5 Acceptatie van dit materiaal

Van 28 docenten, die de helft van de Pabo's vertegenwoordigen, ontvingen we respons. Dit mag voldoende representatief heten om een beeld te krijgen van het geheel van de opleidingen:

- acht Pabo's (28%) nemen de Cito-toets af. Daarna volgt een trainingsprogramma, ontleend aan 'Reken vaardig' (vijf maal) of 'Reken Maar' (één maal), en twee maal (7%) aan ander materiaal, te weten schoolboekjes of een verzameling Cito-toetsen;
- Op tien Pabo's (36%) wordt het project 'Reken Maar' uitgevoerd en te zijner tijd besloten met een verplichte eindtoets. Slechts twee maal worden de voortoetsen niet afgenomen, dus alleen de zelfstudiepakketten benut;
- twaalf Pabo's (43%) gebruiken 'Reken vaardig' en zijn van plan daarover te zijner tijd een verplichte eindtoets af te nemen. Als selectietoets wordt die van het Cito (vijf keer) gebruikt, één keer die van 'Reken Maar', één keer een eigen toets en vijf keer geen. Zes Pabo's gebruiken 'Reken vaardig' gedifferentieerd, dus naar gebleken behoefte;
- vier Pabo's tenslotte (14%) hanteren geheel eigen programma's, die in omvang en inhoud sterk uiteen lopen.

Alle Pabo's gebruiken dus één of ander rekenvaardigheidstrainingsprogramma, en verreweg de meesten hebben daarvoor hun vroegere eigen produkten vervangen door wat sinds augustus 1988 beschikbaar is (21% nog niet).
Nu is opvallend, dat na het trainingsprogramma vrijwel altijd een verplichte eindtoets wordt afgenomen (23 wel, één geen, vier niet ingevuld), terwijl het doorwerken van dat programma op zeven Pabo's voor de student niet verplicht is. We vermoeden dat dit samenhangt met de ruimte voor het vak rekenen-wiskunde en didactiek die op de Pabo beschikbaar is; die varieert nog steeds van drie roosteruren (per studiejaar) tot minder dan één.
De wijze van uitvoering van de programma's loopt dan ook sterk uiteen: van uitvoering in de reguliere lessen (één keer in z'n geheel, zes keer gedeeltelijk), via zelfstudie met begeleiding (acht keer) of met vragenuur, extra lesuurtje of incidentele begeleiding (vijf keer), tot zelfstudie zonder enige vorm van begeleiding toe (vier keer).
Zo'n zelfde divergentie zien we bij de consequenties die verbonden worden aan een onvoldoende voor rekenvaardigheid aan het eind van de propedeuse: dat varieert van 'niet bevorderd' (één keer), 'mag niet naar de hoofdfase - voor dit vak' (drie keer) en 'vak onvoldoende, en slechts één voldoende toegestaan' (drie keer), via 'meeberekend in vakgemiddelde' en 'propedeuse nog niet afgerond' (negen keer) tot 'mag nog een x aantal jaar door oefenen' (twaalf keer), waarbij x varieert van een half tot twee jaar! Terwijl dus overal aan rekenvaardigheidstraining gedaan wordt, loopt de eraan bestede begeleiding, tijd èn het eraan gehechte gewicht enorm uiteen.

In 'slechts' acht gevallen (28%) stelt men duidelijk dat het geboden program geen adequaat antwoord is op de rekenvaardigheidsproblematiek; toch vindt men op meer dan de helft van de Pabo's de toestand dusdanig, dat het probleem onoplosbaar is! Als redenen worden onder meer genoemd; tijdgebrek (zéér vaak), te laag instroomniveau, te weinig begeleidingsmogelijkheid voor met name de allerzwaksten, en ook dat één jaar gewoon te kort is. Op de achtergrond zal dan nog zeker meespelen dat een strenge selectie nog steeds 'ongewenst' is vanwege de bekostigingssystematiek, de overleving van de Pabo, de boventalligheid van docenten en het dreigend tekort aan leerkrachten. Maar naar deze achtergrond hoefden we niet te informeren, en dat hebben we ook niet gedaan.

Als onze indruk juist is, te weten dat de Cito-toets en de twee trainingsprogramma's elkaar goed aanvullen, dan is het gewoon jammer dat op de meeste Pabo's nu nog maar op één van beide paarden wordt gewed. Het vaak genoemde tijdgebrek zou overigens wel weer eens een fnuikende factor kunnen betekenen. Een adequaat bijscholingsprogramma vraagt van zwakke rekenaars een enorme *extra* tijdsinvestering en of zij daarvoor voldoende ruimte, gelegenheid en stimulans zullen ontvangen, zal de toekomst moeten uitwijzen. Ik hoop van harte dat er niet weer een herhaling optreedt van wat we in NVORWO-land al vaker hebben gezien: de spullen zijn er, de faciliteiten ontbreken.

Noten

1. Jacobs, C.: 'Rekenen op de Pabo', Utrecht 1986.
2. Mechanistisch rekenen is een onderwijsvorm die produktgericht: aan leren van standaardoplossingen, stap voor stap voorgedaan door de leerkracht. De leerling meent iets te begrijpen als hij weet hoe of hij het doen moet. Dit onderwijs is sterk frontaal.
3. Formele wiskunde is als het ware het vervolg op het mechanistisch rekenen: de wiskunde is een afgerond systeem dat stap voor stap wordt overgedragen van leerkracht op leerling. De nadruk ligt op het beheersen van het systeem, met name de redeneerwijzen en de formules.
4. Realistisch rekenen is een procesgericht onderwijs, gericht op het zelf actief kennis verwerven door de leerlingen. Door het stellen van problemen probeert men de aandacht van de leerlingen op de wiskundige aspecten van hun omgeving te richten en uit te dagen om elementaire wiskundige begrippen en eigen aanpakmethoden te ontwikkelen. Dit onderwijs baseert zich op onderzoek en discussie, en is dus sterk interactief. Toegepaste wiskunde ligt in het verlengde van realistisch rekenen. Eigenlijk verwerven de leerlingen in het realistisch rekenen (wiskundige) inzichten die vroeger uitdrukkelijk in de wiskunde thuishoorden, zoals combinatorisch tellen, coördinaten en tabellen.
5. Zie rapport 'Kan men nog rekenen op de Pabo?', bijlage 1, pag.2, Utrecht 1987.
6. Zie Arbo-advies, 1989, pag.??
   Voor verdere historische gegevens, zie:
   Moor, E. de: Van kweekschool naar hogeschool, 'Tijdschrift voor nascholing en onderzoek van het reken-wiskundeonderwijs', 5(4), 1987, pag.6 e.v.
7. Met 'standaarddeviatie 4' wordt bedoeld: stel dat een student zeventien van de 32 opgaven goed scoort, dan kan met 95% zekerheid gezegd worden dat zijn score op een vergelijkbare toets tussen de dertien en 21 goede antwoorden moet liggen.
8. Zie voorwoord 'Reken vaardig', pag.4 (curs. F.B.).