400 opgaven bij de 'Proeve van een nationaal programma rekenen-wiskunde'

A. Treffers

OW & OC, RU Utrecht

Op de eerste conferentie-middag werden de deelnemers met de '400 opgaven bij de proeve ...' geconfronteerd.[1] Hen werd gevraagd om van een vooraf geselecteerd deel van de opgavenverzameling, dat per groep verschilde, per opgave te scoren of:

1. het overgrote deel van de leerlingen (80%) de betreffende opgave zou moeten kunnen; ja of nee;
2. een deel van de leerlingen zo'n som zou moeten kunnen; ja of nee;
3. de leerlingen een dergelijk vraagstuk eens gedaan zouden moeten hebben; ja of nee.

De 400 opgaven waren ingedeeld in vijf categorieën:

1. Basisvaardigheden.
2. Cijferen.
3. Verhoudingen en procenten.
4. Breuken en kommagetallen.
5. Meten en meetkunde.

Naar de mening van de auteurs van het opgavenboek (E. Feijs, J. Bokhove, J. Janssen, E. de Moor, L. Streefland en A. Treffers) zou een deel van de vraagstukken door alle leerlingen (tachtig procent) beheerst moeten worden, een ander deel door een part van de leerlingen, en tenslotte een deel voor groepsactiviteiten zonder dat de beheersingsvraag aan de orde is, dus opgaven die leerlingen nu eenmaal gedaan moeten hebben omdat men ze belangrijk vindt in verband met algemene doelstellingen. In de inleiding van het sommenboek staat:

> 'De vraagstukken zijn echter nog niet ingedeeld naar deze drie soorten. Om dit te kunnen doen, dient nu juist de raadpleging van de genoemde deskundigen.'

Zou nu een bepaalde opgave overwegend met 'nee' worden gescoord (of kort met (3) 'nee') dan zou zo'n opgave ongeschikt zijn om in de 'Proeve van een nationaal programma' als voorbeeld-vraagstuk bij een bepaald leerstofgebied te worden opgenomen - aldus de gedachtengang van de auteurs.[2] Of indien bij een opgave een zinvolle verbetering zou worden gesuggereerd of precies geformuleerd kon dit natuurlijk tot een bijstelling van de betreffende opgave aanleiding geven.

Het ging dus om illustratie-opgaven bij de 'Proeve ...' of zo men wil om opgaven in het deeltje 6B van een basisschoolmethode waarvan bepaald zou moeten worden wat in het begin werd gesteld: iets moeten kunnen of niet, of iets gedaan moeten hebben. Als voorbeeld kan de volgende opgave dienen:

> 29. Er was eens een reiziger. Die kwam na een barre tocht door de woestijn bij een dorpje. Twee dorpelingen nodigden hem uit de maaltijd met hen te gebruiken. De één nam 3 broden mee en de ander 5 broden. Ze aten alles samen op, ieder at ongeveer evenveel.

De reiziger wilde persé betalen voor de maaltijd. Hij had 8 goudstukken en die moesten de twee dorpelingen maar eerlijk verdelen. Maar over dat eerlijk verdelen kregen ze grote ruzie. Die van de 3 broden vond dat hij 3 goudstukken moest krijgen. Maar die ander vond dat te veel. Uiteindelijk besloten ze het probleem aan de dorpoudste voor te leggen. Die vroeg of ze alle 8 broden aan de reiziger hadden gegeven, of dat ze zelf ook mee gegeten hadden. Ze vertelden hem precies hoe het gegaan was. De dorpoudste dacht lang en diep na en besliste dat de ene 1 goudstuk moest ontvangen en de andere 7 goudstukken.

a. Waarom zou de dorpoudste precies willen weten of ze zelf ook meegegeten hadden?
b. Hoe zou de dorpoudste tot de eerlijke verdeling van 1 goudstuk en 7 goudstukken gekomen zijn?

Vrijwel geen enkele deelnemer was van mening dat het grootste deel of zelfs maar een deel van de leerlingen deze opgave zou moeten kunnen maken. Nagenoeg iedereen echter vond wel dat de leerlingen zo'n 'klassiek' probleem eigenlijk eens een keer gedaan zouden moeten hebben.
Waarom dan wel? Hoewel naar de motivering niet gevraagd werd, lijkt het waarschijnlijk dat de mooie, gevarieerde oplossingsmogelijkheden de bron van de algemene instemming vormden: een verrassende uitkomst, via breuken, of verhoudingen ....
Zou de vraag voor de basisvorming van vijftienjarigen gesteld worden dan zou de uitkomst zeker anders zijn geweest. Een volgend 'kaal' vraagstuk zal uiteraard een andere scoring krijgen.

105. Kies bij de volgende opgaven het juiste antwoord, zonder het precies uit te rekenen. Probeer het zo snel mogelijk te doen.

1. 694 + 426 =	a. 1390	b. 1120	c. 870
2. 7200 + 320 =	a. 7520	b. 10,500	c. 450
3. 5525 + 5735 =	a. 1260	b. 25,260	c. 11,260
4. 4783 + 9790 =	a. 14,573	b. 10,573	c. 14,570
5. 9762 + 1003 =	a. 10,765	b. 9865	c. 8559
6. 6840 + 2203 =	a. 9043	b. 28,843	c. 2883
7. 4001 + 22,469 =	a. 62,470	b. 26,470	c. 22,870
8. 17,279 + 4007 =	a. 21,286	b. 57,286	c. 17,685
9. 83,004 + 71,012 =	a. 79,316	b. 154,016	c. 100,016
10. 24,067 + 610 =	a. 3077	b. 30,167	c. 24,677
11. 430 + 43,210 =	a. 47,510	b. 4661	c. 43,640
12. 18,051 + 924 =	a. 2775	b. 18,975	c. 27,291
13. 2501 + 20 =	a. 2521	b. 271	c. 2503
14. 14,641 + 17,417 =	a. 86,058	b. 32,058	c. 59,058
15. 4641 + 7417 =	a. 46,058	b. 12,058	c. 39,058

(Uit: 'Real Math', deel V, pag.18)

In het algemeen zal men hiervan vinden dat alle leerlingen zo'n som zouden moeten kunnen, wellicht een enkel onderdeel uitgezonderd. Over de volgende zal wel eens heel verschillend geoordeeld kunnen worden:

58. Met de fiets ben je in 5 minuten op school.
Hoe lang loop je daar ongeveer over?

En hetzelfde geldt voor 'Alice':

374. Dit is een plaatje uit 'Alice in Wonderland'. Alice wisselt in dit boek steeds van grootte.

a. Schat de lengte van Alice in dit plaatje met de hond. 'Alice was zo klein in verhouding tot het hondje dat het er veel op leek of ze een spelletje deed met een karrepaard en ze was ieder ogenblik bang onder zijn poten vertrapt te worden.'
b. Klopt die vergelijking met mens en karrepaard?

Er zijn echter nog andere redenen waarom verschillend over dergelijke vraagstukken wordt geoordeeld. Vat men ze namelijk op als illustraties van eindtermen - en niet als opgaven uit een methode 'deeltje 6B' - dan blijkt dat er veel kritischer over de opgavenverzameling geoordeeld wordt dan wanneer men ze opvat als bedoeld.
Juist omdat periodieke peiling van het onderwijsniveau, eindtermen, Proeve van een nationaal programma als didactisch kader voor eindtermen, en eindtoetsen min of meer tegelijk in de lopende discussies worden betrokken, is een beoordelingsverschil zeer wel mogelijk en in feite ook opgetreden.[3] Dit maakt het moeilijk om de scoringen met één maat te meten, de perspectieven die tot een bepaalde uitkomst leiden zijn immers soms verschillend.
Dit betekent dat voor de selectie van vraagstukken voor de 'Proeve ...' niet uitsluitend met een kwantificering van 'ja-nee'-scores kan worden volstaan. We zullen aan de veilige kant blijven en voornamelijk die opgaven kiezen waarover, hoe dan ook beschouwd, weinig verschil van mening (in positieve zin) bestaat.
Met het voorgaande wil overigens ook gezegd zijn dat de opgaven-verzameling niet maar lukraak voor alle doeleinden te gebruiken is.

In de bijdragen van Goddijn en Ter Pelle zal de verzameling van de verschillende categorieën opgaven nader worden geanalyseerd en getypeerd.

Noten

1. Feijs, E. (ed.): *400 opgaven bij de proeve van een nationaal programma rekenen-wiskunde,* OW & OC, Utrecht 1987.
2. De 'Proeve van een nationaal programma' is een didactische uitwerking van de eindtermen die voor het basisonderwijs zullen worden vastgesteld en die thans (1988) in eerste versie zijn geformuleerd. De 'Proeve ...' zal in de komende jaren in drie delen bij uitgeverij Zwijsen verschijnen. De eerste proef-onderdelen zijn in de afleveringen van de zesde jaargang van het 'Tijdschrift voor nascholing en onderzoek van het reken-wiskundeonderwijs' (Panama-Post) verschenen.
3. We hebben ongeveer 200 scoringsboekjes binnengekregen en daaruit blijkt het gesignaleerde verschil.

Opmerkingen bij '400 opgaven'

J. ter Pelle

SLO Enschede

Ik kijk naar de proefversie van '400 opgaven', behorende bij het nationaal programma, vanuit de optiek van leerplanontwikkelaar voor wiskunde twaalf-zestien, die zich een tijd met 'voortgezet rekenen' heeft beziggehouden. Ik vertel wat over hetgeen mij opvalt bij het zelf maken en doordenken van opgaven op het gebied van verhoudingen, procenten, breuken en kommagetallen. Categorie drie en vier dus. Daarbij ben ik primair geïnteresseerd in de aard van de wiskundige activiteit die je bij leerlingen oproept wanneer je ze een opgave voorlegt. Binnen het ontwikkelwerk van het SLO-project twaalf-zestien heb ik immers *daar* juist steeds voorbeelden van gezocht en gezien. Wat voor denkactiviteit komt er als je bijvoorbeeld aan een brugklasser vraagt naar:

de helft van 0,1

En vervolgens: Wat maakt het uit of je dat gewoon vraagt, of schriftelijk vastlegt, en in welke vorm doe je dat dan? Dat kan namelijk op fundamenteel verschillende manieren:

- de helft van eentiende	½ × 0,1 =
- de helft van 0,1	½ × 1/10 =
- de helft van nul komma één	0,5 × 0,1 =
- de helft van 1/10	0,5 × 1/10 =
- de helft van één tiende	etc.

Systematisch experimenteren hiermee geneest je van illussies. Als je 0,5 × 1/10 schriftelijk voorlegt, levert dat (niet letterlijk genomen!) nul komma niks op. Aan de andere kant word ik weer enthousiast bij de volgende dialoog:

'Wat is 'n tiende gulden ook weer?'
'Wat is dan de helft van 'n tiende?'
'Vijf cent.'
'Kun je dat met een kommagetal opschrijven?'

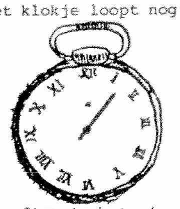
Daarna komt de gevraagde 0,05 wèl op papier. Het heeft, door dergelijke ervaringen iets wijzer geworden hoop ik, idealiter mijn voorkeur om vooral niet uitsluitend op papier te toetsen, om de simpele reden, dat dit vaak het minste (aan zinvolle wiskundige activiteit) oplevert. Er zijn helaas vaak heel legitieme redenen die je dwingen aan dat ideaal concessies te doen. Als je dan toch schriftelijk toetst, is een uiterst doordachte redactie van groot belang, zoals ik met 0,1 heb willen laten zien.
Een tweede open deur: de contextkeuze. (In dit voorbeeld: geld.) In zijn algemeenheid is daar toch heel moeilijk vat op te krijgen, merkte ik in de discussie in het practicum over de verzameling opgaven. Hiermee heb ik al drie aandachtspunten aangedragen die bij de screening van de vierhonderd opgaven een rol (moeten) spelen:

1. De manier van voorleggen.
2. Indien schriftelijk de redactie.
3. De contextkeuze.

Ik wil nog een viertal aandachtspunten (4 tot en met 7) noemen en illustreren aan een opgave die er eigenlijk bij had moeten zitten. Deze heb ik nou gemist. Juist omdat het een wiskunde-opgave is, waar traditionele rekenonderwerpen als verhoudingen, meten, breuken etc. heel mooi geïntegreerd aan bod komen. Om dat te ervaren, moet u de opdracht zelf even maken.

GROOTVADERS KNOL

Josefien heeft van haar opa een oud horloge gekregen.
Het klokje loopt nog goed. Alleen de *grote* wijzer ontbreekt.



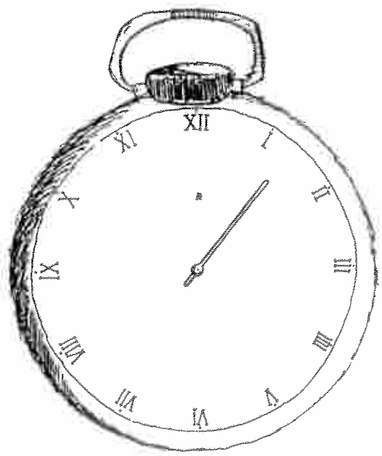
Hans, de broer van Josefien, vindt dat je aan zo'n horloge niets hebt. *"Je kunt niet-eens zien hoe laat het is"*, zegt hij, *"wat heb je dan aan zo'n klokje?"*

Josefien is het niet met Hans eens. Ze kijkt op het horloge.

a. *"Het is ongeveer ....* " zegt ze.

"Maar hoe laat is het precies?" vraagt Hans plagerig.
Probeer die vraag te beantwoorden.
Gebruik het horloge op de grote tekening.

b.



figuur 1

4. Er worden van kinderen *zinvolle activiteiten* gevraagd. Eerste vraag schatten, maar daarvoor is op het oog of metend de boog of lijnstuk tussen één en twee al verdeeld in stukken: iets voor de helft, 1/3, 3/8, 1/4 of 2/5 zijn veelgehoorde antwoorden. Daarna een berekening die leidt tot antwoorden als 'nog geen half twee', 'een uur 22 en 30 seconden', 'tien voor half twee', 'kwart over één'. Los van welk antwoord gegeven wordt, kun je daarna op een zinvolle manier verder vragen. In het eerste geval bijvoorbeeld naar grotere precisie of in het tweede geval naar (in dit geval absurde) nauwkeurigheid.
5. Er is een zinnige *volgorde van vragen* mogelijk. Dus niet opgave 243:

'Hoeveel is 12½ % van fl. 640,--?' en dat was het dan. Het is inherent aan wiskunde dat steeds vervolgvragen mogelijk zijn. Vaak wel, maar dat behoeft beslist niet altijd op een hoger niveau. Ik vind dat je zinnige vervolgvragen mòet stellen als de gelegenheid zich voordoet. Ook, en misschien vooral, in toetssituaties.

6. De opgave is op zeer *verschillende niveaus* te maken, die elk op zich goed zijn. Een heel ander punt is hoe je die niveaus vervolgens waardeert. Dit legt het probleem van waarderen, normeren en scoren ook waar het thuis hoort. Ik vind 13.15 en 13.22 principieel even mooi. Maar iemand anders mag daar anders over denken. Subjectief dus, maar helaas vaak met de schijn van objectiviteit.
7. Als leerlingen deze opgave goed maken heb ik het vertrouwen dat ze de *transfer naar toepassingssituaties* ook kunnen maken. Het zetten van een Hema-wekker, kookwekker of voor mijn part een tijdbom, aflezen van een zonnewijzer, ook het afstemmen op 97 Mhz op een FM-radio vraagt in essentie dezelfde aard wiskundige activiteit.

Samengevat: ik vind dit een voorbeeld van een toetsopgave die recht doet èn aan de capaciteiten van kinderen èn aan de inhoud van het vak.

Hiermee heb ik eigenlijk al gezegd wat ik zeggen wilde, maar dat is niet fair naar de organisatie. Met deze zeven aandachtspunten zijn de opgaven uit deze proefversie goed te analyseren. Tenslotte wil ik zowel toekomstige gebruikers als de makers dringend aanraden hetzelfde te doen. Er is nog veel aan te verbeteren.