Minder cijferen, meer schatten

E. de Moor

Panama/HMN-SOL Utrecht

Er wordt in het basisonderwijs naar verhouding nog steeds erg veel tijd gestoken in het cijferend rekenen. Hoewel de cijferalgoritmen begrepen moeten worden en tot zeker niveau ook op papier uitgevoerd moeten kunnen worden, zullen we in de nabije toekomst voor tijdrovende berekeningen de zakrekenmachine moeten leren gebruiken. Ook op de basisschool!

Als uitgerekend moet worden wat een nieuwe kunststof vloer kost voor een gymlokaal van 6,75 m × 15,6 m bij een vierkantemeterprijs van *f* 410,- is het vandaag de dag niet nodig te gaan cijferen, maar je toetst op de zakrekenmachine in:

6.75	×	15.6	×	410	=	

en je vindt zonder vervelend gecijfer *f* 43173,-.
Maar vooraf hadden we al even de orde van grootte dienen te schatten om controle over het rekenproces te houden. $6{,}75 \times 15{,}6 \approx 7 \times 15 = 105$ (uit het hoofd.) De prijs zal dus boven de $410 \times 100 = 41.000$ liggen.
Op deze wijze rekenen we inzichtelijk, met gezond verstand en efficiënt. Hiermee is de titel van dit stuk geduid.

In het volgende zullen we aan de hand van een aantal stellingen deze opvatting nader onderbouwen. Eerst omschrijven we echter wat we onder 'schattend rekenen' verstaan:

> *Schattend rekenen is het ruwweg bepalen van een uitkomst van een berekening.*

Nu is dit geen baanbrekende gedachte en niemand zal wel van deze vanzelfsprekendheid achterover vallen, maar toch willen we deze algemene omschrijving wat nader nuanceren.
Schattend rekenen voert in feite altijd terug tot:
- het manipuleren met gehele getallen, vooral tot 100, en
- het werken met nullen (×10, ×100, ... ÷10, ÷100, ...).

Van groot belang voor schattend rekenen is dat men inzicht heeft in de getalstructuur en de orde van grootte van getallen. Praktisch betekent dit vooral dat men moet durven en kunnen afronden. Niet als activiteit op zich ('rond 121,7 af op eenheden'), maar als middel om een benadering van een berekening te vinden.
Schattend rekenen komt dan ook veel voor bij berekeningen met kommagetallen, die zelf weer voortkomen uit het meten. Maar het speelt ook een rol binnen het breukrekenen ($\frac{1}{2} + \frac{1}{3} < 1$) en bij het gebruik van procenten (9,7% van 1832 is ongeveer het tiende deel van 1800 ...).

Tenslotte kan schattend rekenen ook al bij het leren manipuleren met gehele getallen aan de orde komen, zoals bijvoorbeeld bij 461 + 365. Dit ligt in ieder geval boven de 700, maar beneden de 1000.
Schattend rekenen hoeft niet per se te betekenen dat alle berekeningen uit het hoofd gedaan moeten worden. Enige mengvorm van hoofdrekenen, gebruik van potlood en papier en/of zakrekenmachine kan ook tot een schatting voeren. Het doel van schattend rekenen is:

> *snel en efficiënt een idee te krijgen van de orde van grootte van een bepaalde berekening.*

Aan het volgende voorbeeld probeer ik deze uitspraak verder te verhelderen.
In de tijd van het ontstaan van dit artikel werd Nederland weer eens geteisterd door een spel waarmee je slapend rijk kon worden (figuur 1).

Uitvliegen

Het 'vliegtuigspel' is intussen ook tot Leiden doorgedrongen, de nieuwe rage waarbij een deel van de Nederlandse bevolking het resterend gedeelte geld probeert af te troggelen.

De spelregels zijn eenvoudig. Een vliegtuig heeft plaats voor acht passagiers. Die betalen voor hun stoel 1000 gulden aan de piloot. Zodra de acht stoelen zijn verkocht *(het vliegtuig vliegt uit)*, onstaan er twee nieuwe vliegtuigen. De twee co-piloten uit het eerste vliegtuig worden de piloten, de vier bemanningsleden worden de co-piloten in de twee nieuwe toestellen. De acht passagiers schuiven dus op hun beurt gewoon op en promoveren tot bemanningslid. De bemanning van de twee nieuwe vliegtuigen gaan nu weer passagiers zoeken, waarna de splitsing van vliegtuigen zich herhaalt. Het principe van de *kettingbrief* dus.

Een eenvoudige rekensom leert dat bij de 24ste deling (reken maar uit!) gehele Nederlandse bevolking al in een vliegtuig moet zitten om het spel draaiende te houden. Alle reden dus voor de nodige terughoudendheid. Maar niet in café Scarabee afgelopen maandagavond. Er heerste een uitgelaten stemming, want er was zojuist *een vliegtuig uitgevlogen*. En dat een avond na de uitzending van Sonja, waarin zij nogal wat bedenkingen over het nieuwe spel uitte.

Sturmer - de passagiers in het vliegtuig hebben code-namen - is laaiend enthousiast over het spel. Hij is al een paar keer *uitgevlogen* en heeft juist een deel van zijn winst in pure rum omgezet. "Ik ben net weer *ingestapt*, en ik wil er met Sonja m'n vermogen onder verwedden dat ik weer uitvlieg", roept hij strijdlustig.

Zijn maat *Vip* is juist die avond 7000 gulden rijker geworden. Ook hij is niet te spreken over de uitzending van Sonja. "Een jongetje van zestien die 1000 gulden verliest. Dat is nogal logisch, die jongen kan niet verkopen". Over het feit dat je om het spel als piloot te beëindigen, over verkopers-kwaliteiten moet beschikken, is *Vip* het wel eens. "Je neemt een gokje, maar je hebt het succes zelf in de hand. In het casino moet je maar afwachten of het balletje op rood of zwart valt, hierop kan je zelf invloed uitoefenen".

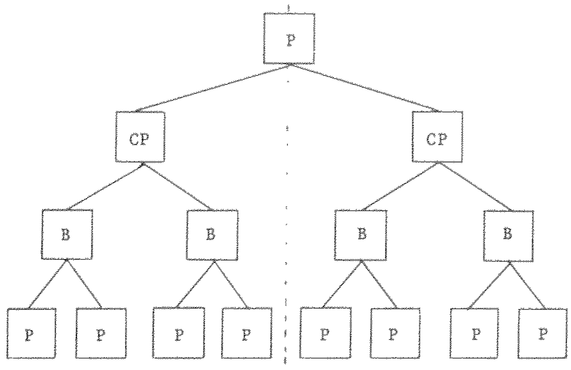
figuur 1

In figuur 2 is het principe schematisch weergegeven, waarbij de stippellijn aanduidt dat de co-piloten (*cp*) tot piloot (*p*) promoveren. Dan zet de boom zich verder voort en we zien dat elke volgende regel het dubbele aantal deelnemers is van de voorgaande. We richten ons nu verder alleen op de omcirkelde tekst:
'Een eenvoudige rekensom leert .....' Bij de 24ste 'deling' zitten we op de 24ste regel, zou je kunnen zeggen, en deze telt dus het getal dat het produkt is van 24 factoren twee. Kortweg 2^{24}. De vraag is nu: hoeveel is dat ongeveer?

$$2^{24} = 2^{10} \times 2^{10} \times 2^{4}$$
$$2^{10} \approx 1000 \text{ en } 2^{4} = 16$$
dus $$2^{24} \approx 1000 \times 1000 \times 16 = 16 \text{ miljoen}$$

Even terzijde: nu hebben we al die voorgaande 'instappers' nog niet eens meegeteld. Dat zijn er $2^0 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^{23}$, en dat aantal is precies $2^{24} - 1$. Je zou dus ook kunnen zeggen dat je die zestien miljoen al op de 23e regel bereikt hebt. Nu hebben we hier schattingen en precieze berekeningen door elkaar heen gebruikt. We legden het getal 2^{24} in factoren uiteen, gaven een schatting voor 2^{10} en berekenden 2^4 precies.

Nu weet ik $2^{10} \approx 1000$ uit mijn hoofd, maar wat doet degene die dit feit niet paraat heeft? Het blijkt dat hiervoor verschillende strategieën gebruikt worden:
- verdubbelen: 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024;
- $2^5 = 32$, $32 \times 32 \approx 1000$;
- 32×32 met een zakrekenmachine.



figuur 2

Hoe het ook zij, voor diegene die $2^{10} \approx 1000$ paraat heeft, 1000×1000 als één miljoen herkent èn de structuur van ons getalsysteem kent is dit inderdaad een 'eenvoudige rekensom', hoewel je natuurlijk ook nog moet weten dat Nederland circa vijftien miljoen inwoners telt.
Tot zover deze inleiding. Nu volgen de stellingen en steeds korte toelichtingen:

Stelling 1:
Schattend rekenen is een verwaarloosd en ondergewaardeerd onderdeel van het reken-wiskundeonderwijs.

De bevestiging van deze uitspraak vinden we jaarlijks in de opbrengsten van de Cito-toets. In figuur 3 zijn twee items uit de eindtoets 'Rekenen 1' van 1987 afgebeeld met het gemiddelde percentage goedbeantwoorders. Hoewel Nederland in internationale onderzoeken over de kwaliteit van het reken-wiskundeonderwijs bepaald niet slecht voor de dag komt (tweede, na Japan in het IEA-onderzoek van 1981) is de feitelijke opbrengst op deze simpele vraagstukjes toch eigenlijk bedroevend. De oorzaak hiervoor moet mijns inziens gezocht worden in de welhaast pathologische nadruk op het precies rekenen (cijferen dus) in het onderwijs. En omdat cijferen inherent is aan schriftelijk werken wordt er te weinig aandacht besteed aan het aanleren van schatstrategieën. Iets wat juist in mondelinge lessen aan de orde gesteld zou moeten worden.

10 Schatten!
7000 − 4997,3 − 1006,4 =
De uitkomst ligt het dichtst bij . . .

A 1000 C 3000
B 2000 D 4000

gem. goed percentage: 70

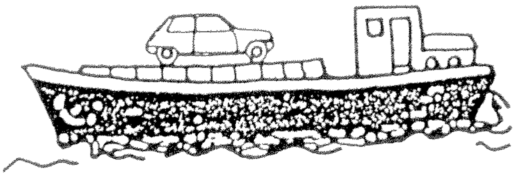
13 Schatten!
5,01 × 1,99 =
De uitkomst van deze vermenigvuldiging ligt het dichtst bij . . .

A 5 C 10
B 6 D 12

gem. goed percentage: 60

figuur 3: Cito-toets 1987

Nu vereist dit schattend rekenen een geheel andere instelling van de kinderen dan die welke nu juist tijdens het aanvankelijk rekenen wordt ontwikkeld, waar het namelijk om het precieze 'tellen' gaat. Mijns inziens zouden daarom ook in het aanvangsonderwijs reeds schatstrategieën aan de orde gesteld moeten worden. Een heel geschikt gebied hiervoor is het schatten van grootheden, in het bijzonder lengtes (fig.4). Niet door middel van raden, ook niet met een liniaal, maar op grond van bekende natuurlijke maten en het zogenoemde afpassen met een papierstrook of de vingers.



figuur 4: Hoe lang is de boot?

Waarom schattend rekenen zo belangrijk is wordt nu in de volgende stelling geformuleerd.

Stelling 2:
Schattend rekenen en schattend meten zijn de meest gebruikte en toepasbare onderdelen in het leven van alledag en de toegepaste vakken.

Iemand moet bijna elke dag twee keer met de tram (één zone, twee strippen per rit). Hij koopt aldoor maar strippenkaarten à *f* 8,65 voor vijftien strippen. Dat is voor dertig strippen ongeveer *f* 17,-. Dus ongeveer *f* 17,- per week (van zeven dagen). Per jaar kom je zo op ongeveer $52 \times 17 \approx 50 \times 17 =$ *f* 850,-. En dan te bedenken dat je voor een dikke *f* 600,- al een jaarabonnement voor twee zones hebt.
De actualiteit biedt dagelijks voor het onderwijs mogelijkheden om ook in de school leven te brengen. Hoeveel drinkt U per jaar (fig.5)?

Drankgebruik Nederlanders neemt toe

Van onze verslaggever

AMSTERDAM — Nederlanders dronken vorig jaar iets meer dan in 1985, maar minder sterk. Omgerekend naar pure (100 procent) alcohol, dronk iedere Nederlander in 1986 8,6 liter tegen 8,5 liter in 1985.

Dit blijkt uit de jaarlijkse becijfering van alcoholconsumptie in Nederland en de rest van de wereld door het Produktschap voor Gedistilleerde Dranken. Sinds 1975 is in Nederland geleidelijk aan steeds iets minder gedistilleerd gedronken. Het verbruik van bier neemt toe, maar het topjaar voor de brouwer, 1981, toen per hoofd per jaar bijna negentig liter bier werd gedronken, is nog niet geëvenaard. Per persoon werd er in 1986 gemiddeld 86 liter bier gedronken. Het ziet er naar uit dat de consumptie van wijn in Nederland niet meer toeneemt. Deze schommelt al enkele jaren op gemiddeld 15 liter per hoofd per jaar.

De Russen zijn plotseling veel minder alcohol gaan drinken. Per hoofd van de bevolking werd in 1985 in de Sovjet-Unie 6,6 liter pure alcohol gedronken. In 1986 was dat nog maar 3,5 liter. De Russen zijn daarmee op de wereldranglijst van de grote drinkers afgezakt naar de 36ste plaats. Nederland staat nummer achttien op die lijst. Frankrijk is als vanouds kampioen met 13,2 liter pure alcohol per hoofd in 1986. De Verenigde Staten dronken zich naar de tiende plaats

De Fransman drinkt jaarlijks gemiddeld 78,4 liter wijn. Frankrijk is het grootste wijnconsumptieland. Vijf Oostblok-landen leiden de wereldranglijst van sterke-drankdrinkers. In kampioenland Hongarije werd in 1986 per hoofd van de bevolking 5,3 liter pure alcohol in gedistilleerd gedronken. De DDR, Polen, Bulgarije en Tsjechoslowakije volgen. Nederlanders drinken 2,2 liter pure alcohol in gedistilleerd.

's Werelds grootste bierdrinkers zijn de Westduitsers, op de voet gevolgd door de DDR. In beide landen wordt meer dan 140 liter bier per jaar per persoon gedronken.

figuur 5

Echter niet alleen in het dagelijks leven, ook in de toegepaste vakken vooral in het voortgezet onderwijs is het schattend rekenen een belangrijke activiteit, zij het dat het daar vaak om een wiskundig hoger niveau gaat.

Hoe bepaal je $\sqrt{10}$ als je niet meteen een zakrekenmachine wilt of kunt gebruiken? Denk aan een zo vierkant mogelijke rechthoek met oppervlakte 10. En neem van die zijden het gemiddelde:

$$\sqrt{10} \approx (3 + \tfrac{10}{3}) \div 2.$$

Door herhaling van dit proces kunnen zo steeds betere benaderingen gevonden worden. In dit geval ging het erom een methode van benaderen te ontwikkelen. Niet elke berekening is uitvoerbaar op een eenvoudige zakrekenmachine. Probeer maar eens 100! ($100 \times 99 \times 98 \times ..... \times 3 \times 2 \times 1$) te berekenen.
Ook zal bij meer geavanceerd schattend rekenen het effect van het rekenen met fouten een plaats moeten gaan krijgen. Bij dit grofweg rekenen accepteer je bepaalde foutengrenzen. Als je zegt dat Nederland vijftien miljoen inwoners telt betekent dat dat het precieze aantal tussen 14,5 en 15,5 miljoen in ligt. Ga je nu met zo'n afgerond getal rekenen dan heeft dat ook weer implicaties voor de nauwkeurigheid van de uiteindelijke uitkomsten. Zoals gezegd is dit niet direct stof voor de basisschool, maar noties van deze begrippen kunnen zeker op dat niveau ontwikkeld worden. We gaan hier bij de volgende stelling nader op in.

Stelling 3:
Het (mentale) meten kan bijdragen tot een houding om schattend te rekenen.

De kern van schattend meten - concreet of mentaal - is dat je in een gegeven situatie een geschikte maat kiest en daarmee grofweg durft te rekenen. Nu eens zal dit een standaardmaat zijn, dan weer een voor de hand liggende (natuurlijke) maat (bijvoorbeeld je eigen lengte). We halen maar weer eens het bekende fileprobleem aan.

> De radio meldt dat er een file van 3 km op de A-1 staat.
> Hoeveel auto's zijn dat ongeveer?

Om tot een schatting van het aantal auto's in één rij te komen moet je de lengte van een gewone personenauto weten of schattend meten. Je kunt in een auto languit liggen. Voor een volwassene betekent dat ongeveer twee meter. Voor- en achterkant erbij, zeg ongeveer vier meter. Twee meter tussen elk paar auto's (misschien wat krap) dus per auto ongeveer zes meter file. Dit maakt vijfhonderd auto's voor één rij, want 500×6 m = 3000 meter.
De meting is geheel mentaal uitgevoerd. Er is geen auto en geen meetlat aan te pas gekomen. Je gebruikt je eigen lengte als *referentiepunt* en je rekent heel globaal (uit het hoofd!). De uitkomst is niet meer dan één indicatie: het gaat om enkele honderden auto's.
Wie zo'n referentiepunt als de lengte van een flinke volwassene niet tot z'n beschikking heeft zal naar andere middelen moeten omzien. Je kijkt uit het raam en telt het aantal trottoirtegels langs een geparkeerde auto. Dit is een mooie methode als je weet dat vier tegels in een meter gaan. Desnoods ga je naar buiten om met vier flinke stappen vast te stellen dat het om ongeveer vier meter gaat.
Helaas wordt door de nadruk op het technische cijferen en precieze uitkomsten in het rekenonderwijs weinig nadruk gelegd op dit soort praktische globale metingen. En dat terwijl ze juist zo nuttig zijn omdat ze een idee geven van de werkelijkheid en daarmee tevens betekenis geven aan belangrijke standaardmaten als meter, kilometer, etc. Zo zullen metrieke maten toegepast kunnen worden

buiten de verkapte cijfersommen over het metriek stelsel. Ik ga op de kwestie van het leren omgaan met metrieke maten nu niet diep in, maar ik volsta met één voorbeeld, waarbij het mentale meten en het concrete handelen met elkaar verbonden worden.

figuur 6

Laat een melkpak opmeten (zie fig.6). Hoeveel blokjes van 1 × 1 × 1 cm zouden daar in passen? Eén laagje van 7 × 7 kan gelegd worden. Hoeveel lagen zijn dat in totaal? Ongeveer 20 × 49 ... dus bijna 1000. Leg de verbinding met de kubieke decimeter waarin 10 × 10 × 10 = 1000 blokjes passen, wat één liter genoemd wordt.
Hoe komt het dat dit niet precies opgaat bij het melkpak? Vergelijk met andere verpakkingen van één liter. Giet echt één liter water over in de verschillende verpakkingen en bekers. En alle aspecten van schattend rekenen, mentaal meten, begrip van maat (i.c. liter), het vormen van een referentiepunt (weten wat één liter is), meetfout en afronden, begrip van metriek 1 liter = 1 dm^3 = 1000 cm^3 komen aan de orde.
In de genoemde voorbeelden wordt nog al eens een beroep gedaan op maten die je moet kennen zodat ze als referentiepunten gebruikt kunnen worden om bepaalde schattingen te doen. Die referentiepunten vormen een arsenaal feitenkennis dat ten behoeve van het schattend rekenen al doende opgebouwd moet worden.
Niet alleen de bekende metrieke maten maar ook bepaalde getallen kunnen een dergelijke functie hebben. In het bijzonder geldt dat voor grote aantallen. Als we zeggen dat 'de wereldbevolking vijf miljard zielen telt' kan dit steun geven voor de betekenis van dat getal. Maar het zal ook nodig zijn om te weten dat één miljard = 1000 × 1 miljoen en ook bij 'miljoen' zouden we ons weer iets moeten kunnen voorstellen als bijvoorbeeld het aantal inwoners van ...., enzovoorts. Als we vijf miljard schrijven geven we met 'miljard' in feite een nieuwe maat aan, waarmee we weer verder rekenen.
Bij het afronden op duizenden (tienduizenden, honderdduizenden en miljoenen) is ook sprake van het kiezen van een nieuwe maat waaarmee we weer simpel kunnen rekenen.
In juni bezochten 91.448 bezoekers Artis, in juli 136.344. Maar globaal meet je die aantallen toch handiger met duizend als maat, zodat je zegt 91-duizend in juni en 136-duizend in juli, samen dus 227-duizend, ongeveer een kwart miljoen.

Kortom het rekenen met grote aantallen is in feite ook rekenen met maten, die overigens ook weer door inwisselingen (10 × honderd miljoen = 1 miljard) uit elkaar ontstaan.

Tot slot nog een waarschuwing over het rekenen met meetgetallen. Al gauw kan meten verworden tot inzichtsloos rekenen, getuige het volgende vraagstuk over uursnelheden (zie fig.7).
Toch kan men zich naar aanleiding van dit vraagstuk interessante vragen stellen. Hoe kom je aan die snelheden? Hoe nauwkeurig is die meting van 100 m in 55 sec. voor de haas? Heeft het wel zin om tot drie cijfers achter de komma door te rekenen? Heeft het überhaupt zin om de snelheden in km/u te geven? Kijk bijvoorbeeld naar de duizendpoot.
Lastige vragen voor eigen niveau, maar wel zaken die op enig moment - ook op de Pabo - aan de orde moeten komen.

32 uursnelheden

Reken van alle dieren de snelheid per uur uit.
Afronden op 3 decimalen nauwkeurig.

hardloper: 100 m in 11 sec. 1 uur is 60 minuten of 3600 sec.

100 m in 11 sec. is dus: $\frac{100 \text{ m}}{11}$ in 1 sec.

per uur: $\frac{100 \text{ m}}{11}$ x 3600 = 32727 m

= 32,727 km

1. haas: 100 m in 5 sec.	Uursnelheid .... km/u.
2. luipaard: 200 m in 7,2 sec.	Uursnelheid .... km/u.
3. hazewindhond: 500 m in 28 sec.	Uursnelheid .... km/u.
4. inktvis: 10 m in 0,7 sec.	Uursnelheid .... km/u.
5. valk vliegt: 47 m in 1 sec.	Uursnelheid .... km/u.
6. struisvogel loopt: 100 m in 5,2 sec.	Uursnelheid .... km/u.
7. kruisspin: 1 m in 2 sec.	Uursnelheid .... km/u.
8. duizendpoot: 50 *cm* in 1 sec.	Uursnelheid .... km/u.
9. slang: 100 m in 10 sec.	Uursnelheid .... km/u.
10. libel vliegt: 200 m in 9 sec.	Uursnelheid .... km/u.
11. zeehond zwemt: 140 m in 14 sec.	Uursnelheid .... km/u.
12. zwaardvis zwemt: 50 m in 1,6 sec.	Uursnelheid .... km/u.

figuur 7

We hebben het in het voorgaande al enige malen gehad over de zogenoemde referentiepunten of referentiematen, die als steunpunten voor het schattend rekenen een belangrijke rol spelen. In de toelichting op de volgende stelling zullen we hier nader op ingaan.

Stelling 4:
Schattend rekenen wordt gestimuleerd door problemen aan te bieden waarbij door de leerlingen zelf getalsmatige informatie moet worden gezocht.

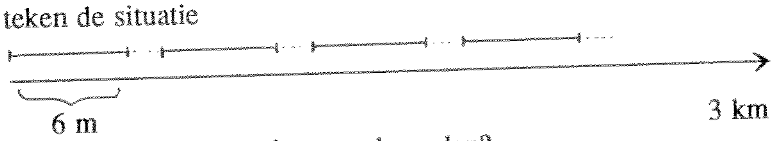
In eerste instantie lijkt deze opvatting haaks te staan op één van de basisprincipes van de didactiek, namelijk het duidelijk presenteren van het probleem.
Maar laten we even terugdenken aan het fileprobleem, dat als volgt geformuleerd was:

> De radio meldt dat er een file van drie kilometer op de A-1 staat.
> Hoeveel auto's zijn dat ongeveer? (a)

Een andere versie (b) van dit probleem zou als volgt kunnen luiden:

> Er staat een file auto's van drie kilometer op de weg. Een auto is vier meter lang. De auto's hebben een onderlinge afstand van twee meter. Hoeveel auto's zijn dat? (b)

In de b-versie wordt de leerling geen enkele ruimte gelaten om zich bewust te maken wat de gegeven informatie nu eigenlijk betekent. Het probleem is bij voorbaat al ontdaan van elke mogelijkheid om zelf enige inbreng in het mathematiseringsproces te hebben. Ook didactisch biedt het geen uitdaging of het moest zijn dat de leraar de leerling gaat trainen in het oproepen van oplossingsschema's, zoals:
- teken de situatie



- welke operatie moet uitgevoerd worden?

In principe is het voor een goede leerling mogelijk dit vraagstuk tot een goed einde te brengen. Maar het is bekend dat een redactiesom als deze - ook al is deze nog zo voorgestructureerd - voor het overgrote deel van de kinderen niet haalbaar is. Er wordt meestal maar wat met de gegeven getallen gedaan om in ieder geval maar tot een antwoord te komen. Want dat is zeker in het soort onderwijs dat bij dit vraagstuk past, er moét één uniek antwoord zijn.

In de a-versie wordt wel ruimte geboden aan de leerling om zelf het schema op te bouwen. Wanneer de leerling zelf de lengte van een personenauto 'bedenkt', alsook de lengte van de tussenruimte, krijgt hij de gelegenheid zich bewust te maken welke de betekenis van die grootheden is.
Het doet er niet zoveel toe of je een auto van vier of vijf meter neemt, ook voor de tussenruimte kunnen verschillende keuzen gemaakt worden, als de maten maar acceptabel zijn, denkende aan de reële situatie van de auto-file. Juist door deze vrijheid wordt de leerling gedwongen een eigen inbreng te construeren. En dat brengt weer met zich mee dat de leerling een realistische maat dient te kiezen. Je kunt ook zeggen, hij wordt gedwongen een schatting te durven doen. Bovendien kan de totale lengte (auto plus tussenruimte) als het ware gezien worden en vanzelf leiden tot het afpassen van zeg bijvoorbeeld tien meter (5 + 5) op de totale weglengte.
Het vraagstuk voert aldus tot een vermenigvuldiging in plaats van een deling. Iets wat bij schattend rekenen vaak de meest aangewezen weg is, juist voor typische delingsvraagstukjes. Zoiets als, tien meter per auto, dus honderd auto's beslaan duizend meter, voor drieduizend meter dus ongeveer driehonderd auto's.

In de oplossing kan de lengte van de auto al een bekende referentiemaat zijn en anders zeker worden.
De open vraagstelling van de b-versie levert natuurlijk verschillende antwoorden op, maar dat is nu juist inherent aan het schattend rekenen: het gaat om de grootte-orde en niet om het precieze aantal.

Ook in vroegere tijden is het schattend rekenen vaak als een belangrijk doel aangeprezen, maar het is uit het onderwijs verdwenen door het papieren rekenen dat een interactieve onderwijsvorm in de weg staat. Eveneens zijn de open vraagstellingen, zoals hier gepropageerd, wel aanbevolen geweest (vraagloze vraagstukjes, open problemen) maar ze hebben om dezelfde reden nooit de plaats gekregen die ze verdienen.

Om als onderwijsgevende feeling te krijgen voor dit soort problemen, is het goed ze ook op eigen niveau te oefenen. De beroemde natuurkundige Fermi had er aardigheid in om zijn gehoor te vermaken met intrigerende vragen als: 'Hoeveel honden zijn er in Chicago?' De reden waarom ze in de Amerikaanse vakliteratuur wel Fermi-problemen genoemd worden.
Ook Hofstädter heeft over dit schattend rekenen vanuit een blanco situatie een interessant essay geschreven. Het begin van dit stuk wil ik U niet onthouden:

> 'The renowned cosmogonist Professor Bignumska, lecturing on the future of the universe, had just stated that in about a billion years, according to her calculations, the earth would fall into the sun in a fiery death. In the back of the auditorium a tremulous voice piped up: "Excuse me, Professor, but h-h-how long did you say it would be?" Professor Bignumska calmly replied, "About a billion years." A sight of relief was heard. "Whew! For a minute there, I thought you'd said a *million* years."'

Aan het slot van dit artikel geeft hij een hele waslijst van leuke Fermi-problemen voor eigen niveau. Het kan je op ideeën brengen voor een eigen ontwerp, zoals:

> Mijn schoonmoeder is in Parijs, De telefoon doet het niet.
> Maar zij heeft nogal een flink stemgeluid, zodat ik haar ook zo wel kan horen.
> Ze zegt: Het is nu vier uur.
> Verbaasd kijk ik in eerste instantie op mijn horloge.

Keren we terug tot het niveau van de basisschool en nemen we het file-probleem in de twee versies nog eens onder de loep dan kunnen we de vergelijking alsvolgt ordenen.

	file-probleem gesloten versie (a)	**file-probleem open versie (b)**
soort onderwijs	schriftelijk	mondeling of schriftelijk
eenduidig antwoord	ja	nee
mogelijkheid tot horizontale mathematisering	nee	ja
mogelijkheid tot reflectie en interactie	twijfelachtig	ja
mogelijkheid tot ontwikkeling van referentiepunten	nee	ja
geschikt voor schattend rekenen	nee	ja

Deze tabel is niet bedoeld als een absolute en/of volledige ordening; hij dient slechts als een ordenende samenvatting van het daaraan voorafgaande. Het gaat bij stelling 4 ook niet om 'open' versus 'gesloten' problemen, maar om het specifieke element van het niet voorhanden hebben van informatie bij schatvraagstukken. Gebruikmaking van dit nieuwe principe in de didactiek van het schattend rekenen, zal het reken-wiskundeonderwijs een belangrijke stap verder kunnen brengen. Maar dan zal het schattend rekenen een veel pregnantere rol toebedeeld moeten krijgen in de dagelijkse schoolpraktijk. We komen op die manier ook dichter bij wat idealiter als realistisch reken-wiskundeonderwijs beschouwd mag worden. Om het in een stelling vast te leggen:

Stelling 5
In het schattend rekenen komt de essentie van het realistisch reken-wiskundeonderwijs tot uiting.

Bij zinvolle vraagstukjes over schattend rekenen zal de realiteit een belangrijke bron zijn. Nu hoeft die realiteit niet altijd de echte wereld te zijn. Ook de wereld van het kind of een voor het kind voorstelbare situatie kan een geschikt uitgangspunt zijn. Soms is het juist nodig om de realiteit wat te verschralen en het probleem een eenvoudige structuur te geven teneinde het bruikbaar te maken voor het onderwijs. Zie het file-probleem: simpel van vorm en onttrokken aan de realiteit.
Maar - zou men kunnen vragen - ook zinvol voor de leerling? Het antwoord is ja, niet omdat de kinderen hiermee een echt realistische toepassing maken (wat zou het hun interesseren hoeveel auto's daar staan) maar omdat het z'n betekenis krijgt door het vraagstuk zelf. De kinderen leren dat ze zelf maten moeten kiezen, die iets voor ze betekenen. Dat ze kunnen voortbouwen op datgene wat ze al weten. Oftewel dat alle leren betekent het reeds bekende in een ruimer verband te stellen.
De verzameling van '400 opgaven', zoals gepresenteerd tijdens de Panama-conferentie van 1987 geeft hier vele voorbeelden van. Vooral de vraagstukjes van het type 'fileprobleem' zijn uitstekend geschikt om het schattend rekenen een nieuwe dimensie te geven. Maar dit gaat niet van de ene dag op de andere.
Omdat er geen leergangen voor schattend rekenen bestaan, zal de onderwijsgevende zelf vorm aan het onderwijs moeten geven. Vooral door interactieve lessen, aansluitend bij eenvoudige meetproblemen en bij het hoofdrekenen.
Men zal geduld moeten oefenen om effecten te zien, want het gaat met name om het kweken van een houding. Maar zo'n houding zal men ook eerst zelf als onderwijsgevende ontwikkeld moeten hebben.
Nascholing - en wel met een lange nazorg - kan in deze een belangrijke rol vervullen.

Literatuur

1. Treffers, A., E. Feijs en de E. de Moor: Schattend rekenen, *Tijdschrift voor nascholing en onderzoek van het reken-wiskundeonderwijs*, jrg 6 nr 3, maart 1988.
2. Harold, J. Schoen (ed): *Estimation and Mental Computation*, 1986 Yearbook NCTM, Reston USA, ISBN 0-87353-226-0.
3. Hofstädter, Douglas, R.: *Metamagical Themas*, Ch.6 Penguinbooks 1, England 1986. ISBN 0-14-008534-3.