400 keer proeven aan de meetkunde

A. Goddijn OW & OC, RU Utrecht

Voor mij liggen de inmiddels bekende vierhonderd opgaven in de smaakmakende proefversie van november 1987. Ik mag erop reageren en mij daarbij beperken tot categorie vijf, de meetkunde en de matenwereld. Een reële beperking is dat niet want mijn eerste kreet is:

het is allemaal meetkunde

Om dat te bewijzen moet ik nu opgave één tot en met vierhonderd toelichten. Ik beperk me tot één èn vierhonderd.

1. Een kopieermachine kan vergroten en verkleinen.
   De vergrotingsfactor is 1,3 en de verkleiningsfactor is 0,7.
   a. Arnoud wil een plaatje ongeveer half zo groot maken. Hoe kan hij dat doen op deze kopieermachine?
   b. Hoe kan hij een verkleining krijgen op ongeveer 65 procent?

Categorie 3,4? Kom nou! Het gaat over vergroten en verkleinen, en ik noem dat meetkunde. Het aardige is dat er hier qua rekenopdrachten heel aardige dingen aan de hand zijn. Vanouds (Euclides) is de meetkunde de wereld waarin over verhoudingen tussen grootheden wordt gesproken. En nu nog heeft veel van ons rekenen, schatten, werken met procenten een overduidelijk steunvlak in visuele voorstellingen. Het actieve spel met de ruimte, meetkunde dus, is daarom een belangrijke pijler onder de ontwikkeling van intuïties over getallen, hun grootte en hun ordening en samenhang.
Opgave 400, de laatste, behandelt het ontvoeren van bekende Nederlanders en het maximaal 'eisbare' losgeld. Onder categorie 1 valt in de '400' dit stukje krantenbericht:

400. **Limiet**
Als voorbereiding op de ontvoering zaagde men houten blokjes die even zwaar en groot waren als een bundel van twintig bankbiljetten. Vijf postzakken vol blokjes wogen 400 kilo en waren de limiet van wat nog 'veilig' kon worden vervoerd. Omgerekend kwam dat neer op 35 miljoen, het bedrag dat ook door Heineken is betaald. (Volkskrant 20.10.1987)

De verbanden tussen de omvangen van een baargeld in gewicht, volume en florijnental staan ter discussie naar aanleiding van de opdracht:

We gaan er vanuit dat het om één soort bankbiljetten gaat. Ga na welke biljetten het zijn:
a. biljetten van tien gulden;
b. biljetten van honderd gulden;
c. biljetten van duizend gulden.

Als dat geen meetkunde is! Ook duidelijk wordt dat meetkunde verband houdt met meten en maten en het intuïtief 'kennen' van hun grootte. Er zijn veel opgaven die juist over dat onderwerp gaan. Ik vat ze samen onder de noemer:

maatkennis

Ik suggereer daarmee echt kennis in de domme zin: dingen die gewoon in je hoofd moeten zitten. Hier zijn twee voorbeelden:

33. Sjoerd blijkt bij de sportkeuring 184,3 cm te zijn.
    Drie jaar geleden was Sjoerd bij de keuring 168,7 cm.
    a. Hoeveel is Sjoerd in de laatste drie jaar gegroeid?
    b. Hoe oud zou Sjoerd ongeveer zijn?

36. Een topatleet loopt de 100 meter in 10 seconden.
    a. Bereken zijn snelheid in kilometers per uur.
    b. Hoeveel denk je dat jouw topsnelheid met hardlopen is?
    c. Hoeveel denk je dat jouw topsnelheid met de fiets is?

Vraag b. van nummer 33. Dat kun je niet uitrekenen. Je moet echter wéten dat 184,3 cm aan de lange kant is voor een twaalfjarige en dat je met zeventig jaar nog best aan sport kunt doen, maar je dan beter niet kunt laten keuren. Kennis van hoe groot een mens gewoonlijk is, hoe snel je zelf fietst, hoeveel een auto ongeveer weegt. Het geeft de mogelijkheid direct door vergelijken grip te krijgen op bijvoorbeeld de hoogte van een huis, de snelheid van een trein, het gewicht van een autobus. Gewoon doordat je een grove schaal in het hoofd paraat hebt.

In de 'Taptoe' stond ooit een lijstje met snelheden van dieren. Ik herinner me nu nog dat de duiksnelheid van de valk 288 km per uur was. Dat heeft diepe indruk op mij gemaakt. Het was drie keer zo snel als de auto's die onder het viaduct bij Abcoude over de Utrechtse weg raasden. Je kon proberen er bovenop te spuwen, maar het kwam altijd àchter de auto's terecht, zo hard ging dat. Twee keer zo hard, minstens, als het wereldrecord hardlopen dat ook toen al honderd meter in tien seconden was. Uit het hoofd weet ik dat zulks 36 km per uur is. Wie daar aan moet rekenen, mist praktische kennis. Ik geloofde het nauwelijks die snelheid, ze draaiden volgens mij de boel gewoon sneller af in een filmpje. En de vier-propellor Super Constellation ging nog eens dubbel zo snel als de duikende valk!
Nog zo'n maat was voor mij de afstand van school naar huis. Dat was één km, ofwel tien à vijftien minuten lopen. Nog is dat mijn persoonlijke voorbeeld van 'de' kilometer, waar ik alle wandelingen door bos, veld en bergen mee afpas. Ik ben er dan ook voor alle leerlingen op één km afstand van hun basisschool onder dak te brengen. Later mag dat vijf kilometer van het mavo of tien kilometer van het atheneum worden. Als de maten maar bijdragen aan de ontwikkeling van eenieders eigen schaal van bekende en doorleefde maten.
De 400 opgaven doen vaak een beroep op deze maatkennis en dat is prima. Het onderwijs dat daaraan vooraf moet gaan wordt er niet door gesuggereerd. Met bovenstaande verhalen geef ik uiteraard een voorbeeld van iets mogelijks.
Meten, maten, het is niet alleen kennis, het is ook kritisch nadenken, dus:

reflectie

Als het om gemiddelden gaat, zoals bij opgave 46 en 76 kan er meer overwogen worden dan de opgaven suggereren.

46. Enkele jaren geleden heeft een team van onderzoekers de hoogte van de Mount Everest (de hoogste berg van de wereld) gemeten voor officieel gebruik in atlassen en

naslagwerken. Er werden namelijk nogal wat verschillende hoogtegetallen gebruikt: 8880 meter, 8848 meter, 8882 meter.
Het team van zes mensen besloot zes onafhankelijke metingen uit te voeren. Als officieel hoogtegetal zouden ze het gemiddelde van de zes uitkomsten nemen.
Er werd gemeten in voet (een Engelse maat). Een voet is 30,48 centimeter.
De uitkomsten waren

28.990
28.991
28.994
28.998
29.001
29.026

a. Bereken het gemiddelde in voet.
b. Echter, het hoogtegetal dat uiteindelijk in de boeken terecht kwam was 2 voet hoger dan het zojuist gevonden gemiddelde.
Bedenk eens waarom de onderzoeksgroep het hoogtegetal veranderd heeft.

76. In de groep van Maria zitten 10 kinderen.
Maria is de kleinste van de groep. Ze is 1,42 m.
De lengten van de andere kinderen zijn:

één	van	1,44 m
drie	van	1,46 m
één	van	1,49 m
twee	van	1,54 m
één	van	1,56 m
één	van	1,58 m

a. Hoe lang zouden die kinderen een jaar later ongeveer zijn?
b. Wat zou over een jaar de gemiddelde lengte ongeveer zijn?

In opgave 46 functioneert het gemiddelde totaal anders dan in opgave 76. In opgave 46 is het gemiddelde van de metingen als het ware preciezer dan de metingen, terwijl in opgave 76 de gemiddelde lengte juist een grovere maat is. Hoe komt dat nou? Het is maar één voorbeeld waarbij moeilijke vragen vlak achter het aangegeven rekenwerk liggen. Vragen die wel gesteld moeten worden wil het 'rekenwerk' niet iets op zich worden, los van de meetbare realiteiten waar het in deze gevallen om gaat. Reflectie dus, maar beginnen met:

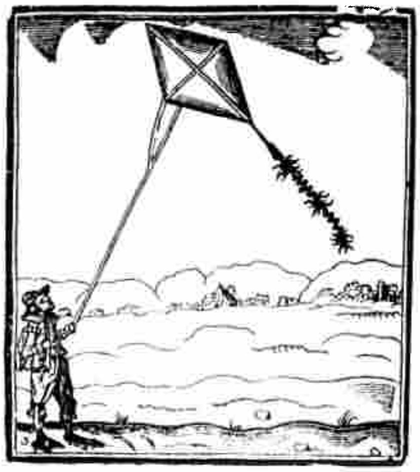
meetkunde doen

In dit kader wil ik één en ander kwijt naar aanleiding van opgave 38.

38. Een paar kinderen willen 26 vliegers maken. Voor elke vlieger hebben ze 1,4 meter vliegerpapier nodig en een reep stof van 2,5 centimeter breed en 2,6 meter lang.
a. Hoeveel vliegerpapier hebben ze nodig voor de 26 vliegers?
b. De stof die ze willen kopen is 90 centimeter breed. Hoeveel moeten ze daarvan kopen?

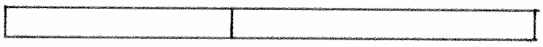
Heeft u wel eens vliegers gemaakt? Vroeger, of nu met kinderen? Drama's kon dat geven, vooral als het niet waait, want dan wordt het vaak hollen met een op de kop in de hei gestoken vlieger achter de negenjarige enthousiasteling. Kraken, scheuren en tranen .... En, hebben wel eens een paar kinderen 26 vliegers ....? Zèlf vliegers maken, dàt leidt tot prachtige meetkunde, tot méér dan sommen over 26 vliegers. Ik beperk me tot het traditionele model in de volgende aanwijzingen (fig.1).
De dwarslat moet met het midden vast aan de lange lat (ik zaagde zelf mijn latjes, met de figuurzaag uit sinaasappelkistenplankjes, maar dat beveel ik niet

meer aan. Hoewel het tekenen van een lijn op constant één cm van de rand van de plank weer een eenvoudige activiteit van meetkundige aard is. Doe dat altijd zònder lineaal, door het potlood vast te houden en de hand langs de rand te laten glijden. Pas op splinters).

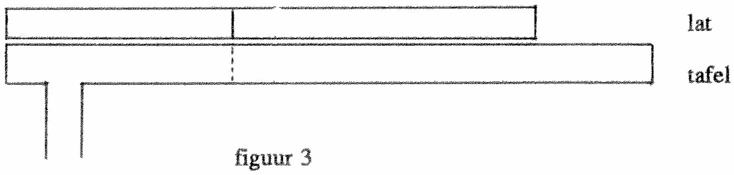


figuur 1

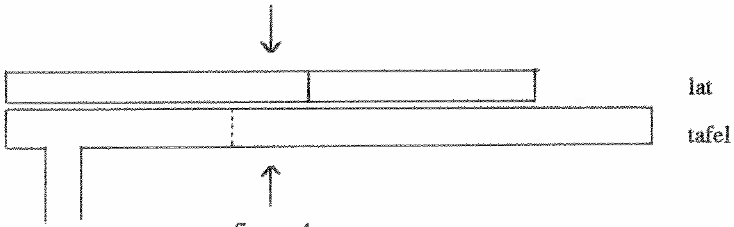
Zò bepaalde ik het midden: op de gok en zet een streepje op het gegokte midden (fig.2). Leg de lat langs de tafelrand en markeer het gegokte punt op de tafel (fig.3). Draai de lat om (fig.4).



figuur 2

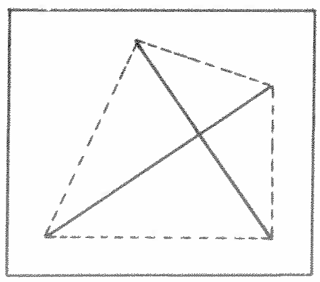


figuur 3



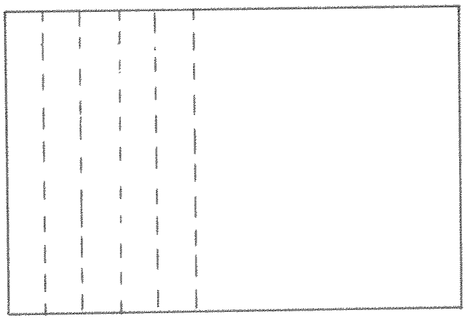
figuur 4

Midden tussen de streepjes is het echte midden!



figuur 5

Bij het bespannen met papier (bij mij zelden met duur vliegerpapier, dat je trouwens nooit per meter van de rol koopt) leg je de kale latten-touwtjes-constructie zo veel mogelijk in de hoek van je vel papier. Uit zuinigheid, maar ook omdat je minder hoopt te knippen (fig.5). En het paste zelden goed in de hoek. Ik leerde later dat 4:5 een mooie verhouding voor de latten was en dat 1:4 een goede indeling vooor de staande lat was. Meetkunde: zo'n vlieger past wèl in de hoek van het vel!
Over de reep stof nog even dit: wij scheurden een oud stuk laken als in fig.6.



figuur 6

Moraal van dit verhaal: als je de context serieus neemt, dus écht zo'n vlieger maakt, kom je véél meer meetkunde tegen dan 'in' het rekenboekje past.

Plannen maken op papier, dat kan ook tot meetkunde leiden. Er moet dan wel kans en gelegenheid zijn voor:

mentaal organiseren

De context van opgave 6 en 9 laat dat ruim toe. Als we de vragen aan het eind van de sommen wegdenken, vallen ze onder categorie vijf.

6. Frans laat de buitenkant van zijn huis schilderen.
   Twee schilders zijn daar ongeveer vier weken mee bezig.
   Hoeveel gaat dit karwei ongeveer kosten?

9. Guus en Jack gaan de hele buitenkant van het huis schilderen.
   Ze hebben zes potten verf nodig.
   Iedere pot kost f 16,55.
   Hebben ze aan f 100,- genoeg?

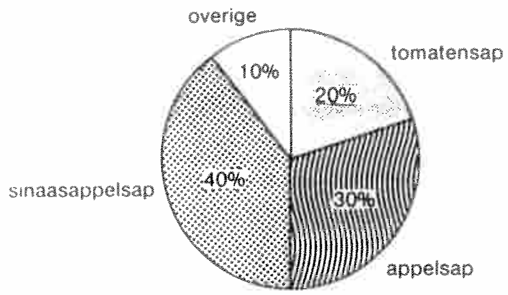
Het verbaasde mij dat twee professionele schilders vier weken nodig hebben om zes potten verf op te strijken, maar goed.
Ik kan me voorstellen dat lbo-mavoleerlingen ook concreet op de context ingaan. Als je die over opgave 6 laat praten, halen ze er heus ladders, loon, te laat komen en lak bij. Vwo-ers weten in het algemeen beter wat de schoolwereld verwacht, passen zich aan en berekenen 6 × fl. 16,55. Leerlingen die echt op de context ingaan, hebben gezond verstand, maar als het de bedoeling is van een opgave om alleen de getallen uit het verhaaltje te slopen, dan komen die wel eens in moeilijkheden.
Nu ga ik iets grofs zeggen: u mag dat dan vergeten òf zelf denken of er iets waardevols in zit. Nu, dit is het dan: de 400 opgaven zijn allemaal lastig in het opzicht dat je een ervaren rekendidacticus in Hollandse stijl moet zijn om te weten of je met een 'open' opgave of een 'ingeklede som' te maken hebt. En

dat is gewoon niet eerlijk tegenover leerlingen met gezond verstand, die van het lbo-mavo dus. Nu weet ik wel dat het helemaal de bedoeling niet is om na de basisschool naar lbo of mavo te gaan, je wilt toch het beste voor je leerlingen? Trouwens, het gaat maar om zo'n zeventig procent, niet meer.
Als extra oefening voor de makers van de '400' dan maar een nieuwe opgave, die gaat over:

contextbestendigheid

Daarbij maak ik gebruik van een bestaande som (categorie 6). In de 'Proeve' staat onder andere de volgende opgave:

401.



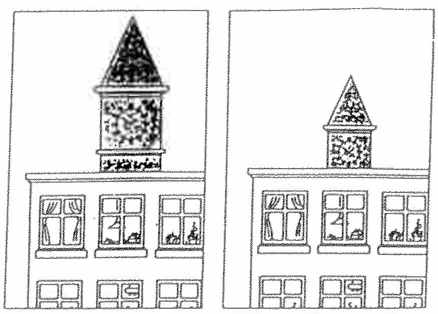
Dit is de verdeling van het gebruik van vruchtensappen in Nederland.
Een fabriek kan 12.000 liter vruchtensap per week maken.
Hoeveel liter tomatensap zullen ze maken? En hoeveel liter sinaasappelsap?

Wat nemen de auteurs allemaal aan? Voor ik nòg verder afdwaal, gaan we maar naar een ander onderwerp, een prachtig gebied waar veel in kàn:

de meetkunde van het zien

Daarbij doel ik bijvoorbeeld op opgave 292, maar ook op 293, 366, 367, 364, 291.

292.



a. Welke foto is het dichtstbij genomen?
b. Op de rechter foto is de kerk smaller dan het raam. Geef hiervoor een verklaring.
(Uit: 'Rekenen & Wiskunde')

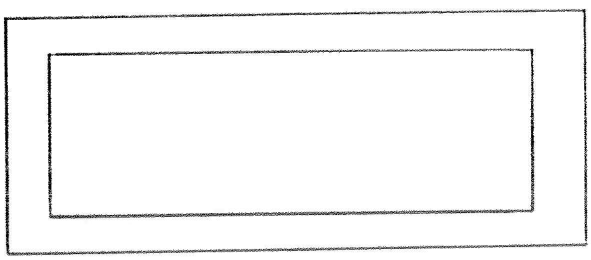
De vragen intrigeren. Er moet heel wat ervaring opgedaan zijn om er iets zinnigs over te kunnen zeggen. Niet alleen leerlingen ook wiskundeleraren krijg je met zulke vragen lange tijd op het verkeerde been! Nou ja, verkeerd: je krijgt ze aan het denken. De meetkunde van het licht, van rechte lijnen, van 'zichtbaar', van schaduw. Het zit er in de '400' al aardig in. Jammer dat de schoolboek-

auteurs wat meetkunde betreft deze onderwerpen nog niet voor de klassesituatie hanteerbaar hebben kunnen maken, een uitzondering als 'Rekenen & Wiskunde' daargelaten. Vaak is opstapelen van kleutermateriaal (opgave 320) het hoogste niveau op het gebied van ruimtemeetkunde dat haalbaar wordt geacht. Treurig.
Toch ben ik niet honderd procent gelukkig met opgave 292. Kijk, er staat 'foto' en ik zie tekeningen. Flauw? Nee, want essentieel voor dit soort meetkunde is dat je zelf de objecten die je van belang acht uit de werkelijkheid isoleert. Bij een foto kan dat, want het gaat over foto's, en op foto's staat altijd méér dan wat de tekenaar voor de leerling heeft voor-geselecteerd. Gemeen is ook om de huizen precies even groot te tekenen. Je moet - neem ik aan - concluderen dat je minder van de toren ziet in het rechter plaatje en dat je daar dus dichterbij het huis staat. De precies-gelijkheid van de huisjes is een blokkade daarvoor. (Ik wil er nog niet eens over zeuren dat het lampje dat door het midden bovenraam te zien is óók had moeten zakken in plaatje 2.)
De mathematisering van de werkelijkheid - om het maar weer eens nodeloos geleerd te zeggen - is al gedaan en daardoor krijg je net niet genoeg kans om op een goed spoor te raken.... (En laat ik ook maar niet zeuren over opgave 364. Mijn antwoord is a - 1; b - 3; c - 4; d - 2. Want televisie-camera 1 kun je op foto *a* niet zien omdat die man daar zit.)
Te verre mathematisering dat kan ook zitten in het gebruik van typische

wiskunstmatigheden

In dat kader kijk ik even naar opgave 52.

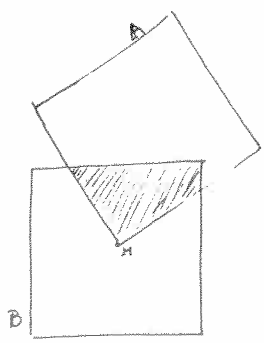
52.



Op deze vloer ligt een kleed.
Het kleed ligt overal even ver van de kant.
Heeft het kleed dezelfde vorm als de vloer?

Natuurlijk past dat kleed goed. Ja, dat heeft dezelfde vorm als de vloer. Een flauwe vraag, tenzij er heel wiskunstmatig aan het begrip gelijkvormigheid gedacht moet worden!
Fraai is ook opgave 278:

278.



De oppervlakte van de vierkanten A en B zijn beide 100.
M is het midden van vierkant B.
Wat is de oppervlakte van het gearceerde gebied?
Leg uit hoe je eraan gekomen bent.

Fraai vooral de oplossingen die slimmerikken hier kunnen bedenken en er is best wat voor te zeggen leerlingen regelmatig van dit soort vonkjes te laten meebeleven. Ik zou het wel vèr uit de buurt houden van alles wat naar toetsing ruikt. Beleven, uitvinden als het lukt, goed, maar het mag niet moeten....
Meetkunde heeft dat gevaar in zich: te bestaan uit vraagstukken waar je een sluwe hulplijn moet trekken waardoor alles onmiddellijk opklaart, een hulplijn die de gewone leerling nooit vindt. De opgaven over 'meetkunde van het zien' hebben dat gevaar veel minder in zich.
Ik eindig met:

de beste, moeilijkste, boeiendste sommen

De beste vanuit innovatiestandpunt gezien vind ik:

326. Op een autoweg (2 rijstroken) staat een file van 14 km.
Schat het aantal auto's in deze file. Laat je berekening zien.

Omdat het zo mooi laat zien dat schatten geen gokken is.
De moeilijkste vanuit wiskundig standpunt gezien vind ik:

224. In een fabriek voor speelgoed worden blokjes van 2 bij 2 cm verpakt in doosjes die een buitenmaat hebben van 8cm bij 6cm bij 5cm.
Hoeveel blokjes kunnen in een doosje verpakt worden?

Omdat me niet duidelijk is of je door subtiel scheef leggen er niet méér dan 24 in kan krijgen. Ik wijs even op de volgende puzzel:

Hoeveel blokjes, kubusjes van 1 bij 1 bij 1 cm passen in een kubus van 2.99 bij 2.99 bij 2.99 cm?

Met 'acht' heeft u een goed antwoord, maar 'elf' is beter. Dat is het record tot nu toe....
De boeiendste was voor mij:

353. **Zon en maan donderdag 17 september 1987**
Zon op: 07.16 onder: 19.51 Maan op: 00.18 onder: 18.18

a. Hoe lang duurde deze dag?
b. Hoe laat gaat de maan op? Welke dag is het dan?
c. Kun je de maan overdag zien?

Omdat dit zoveel vragen oproept:
- Hoe kan het dat zon en maan vrij dicht na elkaar ondergaan en zo ver uit elkaar opkomen?

Het klopt met de sterrengids maar niet erg precies:
- Heeft het ermee te maken dat het midden september is?

Ja, dat heeft het, denk ik. Denk eens verder, hoe het moet zitten. Dat geeft mooi meetkundig zoekwerk!