
Hoofdrekenen helpt

E. de Moor

Panama/SOL, Utrecht

Wist u dat meer dan tachtig procent van de alledaagse (niet schoolse) reken/wiskundige toepassingen berekeningen met zich meebrengen, welke door volwassenen uit het hoofd gedaan worden?

En dat voor het overige rekenwerk meestal gebruik gemaakt wordt van een zakrekenmachine, terwijl papier en potlood alleen nog gehanteerd worden om tussenuitkomsten of kleine tussenberekeningen te noteren?

Natuurlijk is het u bekend dat in het huidige rekenonderwijs nog steeds grote nadruk ligt op het schriftelijk cijferen. Daarbij worden vaste procedures ingeslepen die soms tot ongewenste gewoonten kunnen leiden als:

$$\begin{array}{r} 251 \\ 300 \\ \hline 000 \\ 0000 \\ 75300 \\ \hline 75300 \end{array} \times \quad \text{of} \quad \begin{array}{r} 2 \overline{)812} \setminus 406 \\ 8 \\ \hline 012 \\ 12 \\ \hline 0 \end{array}$$

figuur 1

En ook weet u natuurlijk dat een op zichzelf eenvoudige toepassing als 'Er staat een file auto's van drie kilometer op de A-1. Hoeveel auto's zijn dit ongeveer?', tot behoorlijke problemen kan leiden, zelfs in de brugklassen van het voortgezet onderwijs.

Het is niet voor niets dat in het concept nationaal plan in twee van de tien kernpunten het hoofdrekenen en het schattend rekenen aan de orde gesteld worden. En wel in samenhang met het cijferen en het verstandig gebruik van de zakrekenmachine. Dit laatste met name voor de hoogste klassen van het basisonderwijs en de eerste klassen van het voortgezet onderwijs. Ook in de definitieve versie van het nationaal plan zullen deze basisvaardigheden opnieuw onder de aandacht gebracht worden.

Na het fiasco van de New Math-golf in de Verenigde Staten leken de 'Back to the Basics'-gedachten snel aan populariteit te winnen. Overigens was deze reactionaire beweging niet geheel onbegrijpelijk. De resultaten van enkele grote testonderzoeken aldaar waren verontrustend. Maar ook de laatste gegevens uit de Verenigde Staten zijn weinig florissant. We beperken ons hier tot de testresultaten op het onderdeel Mental Computation van het onderzoek van de National Assessment for Educational Progress (NAEP 1983), waarvan we de uitslagen zien in de tabel van figuur 2.

Nog schrijnender worden deze cijfers als we de tabel van figuur 3 bekijken. Daarin zijn voorkeuren van berekening van alle dertienjarigen die aan dit onderzoek deelnamen opgenomen voor drie eenvoudige hoofdrekenvraagstukken (uit het hoofd, potlood en papier of zakrekenmachine).

Selected Mental-Computation Exercises Given Orally on the Third National Mathematics Assessment

Type of problem	Time allowed (seconds)	Percentage correct by age		
		Nine	Thirteen	Seventeen
64 + 20	13	52		
40 + 50	11		81	96
6 + 47	12	47		
73 - 23	12	29		
700 - 600	11		92	97
49 - 16	11		77	86
1250 - 400	12		39	57
36 - 9	12	20		
2 × 34	12	25		
4 × 30	9		73	88
90 × 3	12	23		
60 × 70	9		46	55
20 ÷ 5	9		88	94
60 ÷ 15	12		32	58
3500 ÷ 35	14		39	63

figuur 2

Onder invloed van de Back to the Basics-gedachte valt men soms weer terug op ouderwetse drill-methodieken. Zo dit in de onderhavige situatie ook het geval geweest is moeten we constateren dat de effecten bepaald niet hoopgevend zijn.

Computational Preferences of Thirteen-Year-Olds for Selected Problems on the Third National Mathematics Assessment

Problem	Do in my head	Use paper and pencil	Use a calculator	No response
4 × 99	44	39	16	1
945 × 1000	38	31	31	
40 $\sqrt[3]{2800}$	31	45	23	1

figuur 3

Hoe het ook zij, in de Verenigde Staten wordt thans onder meer naar aanleiding van de bekende 'Agenda for Action' uit 1980 Mental Computation and Estimation bij herhaling onder de aandacht gebracht. Met name Barbara Reys en Edward Reys publiceren veel onderzoeksgegevens over deze materie en tevens doen zij allerlei praktische aanbevelingen zowel voor de klaspraktijk als voor de opleidingen. Verschillende artikelen hierover, onder meer van Reys en Reys, zijn de laatste jaren in The Arithmetic Teacher verschenen.¹ Ook het NCTM-jaarboek 1986 is geheel aan het onderwerp hoofdrekenen en schatten gewijd.²

Weliswaar is in Nederland vanaf het begin van de jaren zeventig (start Wiskobas) bij voortdurend op het belang van beheersing van de basisvaardigheden gewezen, toch is deze informatie ook voor het Nederlandse reken-wiskundeonderwijs leerzaam. Want hoewel de situatie hier waarschijnlijk niet zo uit de hand gelopen is als in de Verenigde Staten, toch moet geconstateerd worden dat sinds de opkomst van het individuele papieren rekenonderwijs à la 'Niveau Cursus Rekenen' en het hoofdrekenen in diskrediet is geraakt.

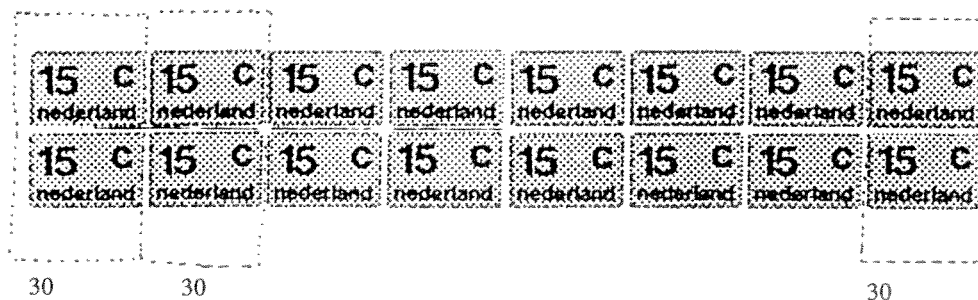
Tot in de jaren zestig werd aandacht besteed aan hoofdrekenen als aparte activiteit. Onder meer propageerden Reijnders en Snijders dit toen in de toenmalige methode 'Functioneel Rekenen.' Ook Nieland is steeds blijven wijzen op het belang van hoofdrekenen. Dit blijkt bijvoorbeeld uit de handleidingen bij 'Getal in Beeld', waarin nadrukkelijk gewezen wordt op het ontwikkelen van een flexibele houding ten aanzien van het omgaan met getallen.

Trouwens van oudsher is het hoofdrekenen als een belangrijk element van het

rekenonderwijs aangeprezen en we kunnen dan ook aansluiten bij een aantal bestaande verworvenheden uit de vroegere rekendidactiek. Echter er zijn ook een aantal nieuwe elementen in dit gebied aan te wijzen.

Allereerst kan men het hoofdrekenen niet los zien van het leren cijferen. Gravemeijer noemt het cijferen zelfs 'een vorm van georganiseerd handig rekenen'. Van groot belang zijn bij het hoofdrekenen ook eenvoudige toepassingen, niet alleen achteraf, maar ook als mogelijke didactische contexten voor het verwerven van essentiële eigenschappen. Een bekend voorbeeld is het geldrekenen.

Zo levert een velletje van 16 'postzegels' (2x8), waarde f 0,15, (fig.4).



figuur 4

als het ware vanzelf de halverings-verdubbelingseigenschap voor het vermenigvuldigen op, als we de postzegels in tweetallen kiezen: $16 \times 15 = 8 \times 30$. Verder is het schattend rekenen een belangrijk nieuw element. Het is een activiteit die aan allerlei dagelijkse toepassingen ten grondslag ligt. Denk bijvoorbeeld aan het eerder genoemde vraagstuk van het aantal auto's in de drie kilometer lange file.

Het moge duidelijk zijn dat de benadering van zo'n probleem een geheel andere attitude vereist dan het loutere opereren met kale, van te voren gegeven getallen. Immers, je zult een schatting moeten durven doen voor de lengte van het stuk autoweg dat een auto inneemt. En daarvoor heb je dus ook weer feitelijke kennis nodig. In een auto kun je gemakkelijk languit op de bodem liggen, neus en achterstuk erbij, laten we zeggen dat een gemiddelde auto vier à vijf meter lang is.

Hierbij dient zich tevens een ander belangrijk punt dat bij het schattend rekenen een rol speelt aan, namelijk het voorhanden hebben van maten en getallen die als referentiepunten kunnen dienen bij het schatten.

Voorts is in de huidige tijd ook bij het gebruik van de zakrekenmachine het schattend rekenen een belangrijke voorwaarde. En tenslotte noemen we het grote belang van inzicht in het positiesysteem en wel in het bijzonder het vlot kunnen rekenen met nullen ($\times 10$, $\times 100$, $\dots + 10$, $+ 100$, \dots).

Naast deze nieuwe inhoudelijke elementen vereist goed hoofdrekenonderwijs ook een andere didactische aanpak dan die van het schriftelijke individuele rekenen. We komen daar aan het eind van dit stuk nog op terug. Maar als er schriftelijk geoefend wordt op de basisvaardigheden dan valt het aan te bevelen niet alleen met kale opgaven te werken maar ook van allerlei gevarieerde oefenvormen gebruik te maken, zoals die bijvoorbeeld voorkomen in het programma 'Rekenwerk' van de NOT.

Om het voorgaande nog eens anders samen te vatten, formuleren we hieronder drie stellingen, zoals die voorkomen in het moduul 'Hoofdrekenen', dat thans voor de nascholing voorhanden is.³ De bedoeling van deze stellingen is dat ze op de nascholing aan de cursisten onder de titel 'Hoofdrekenen Helpt' ter discussie voorgelegd worden:

1. Hoofdrekenen omvat handig rekenen, eigenschapsrekenen, rekenen met nullen en schattend rekenen. Goed kunnen hoofdrekenen schept de voorwaarden tot:
 - het leren van de cijferalgoritmen;
 - het kunnen toepassen zowel binnen rekenen/wiskunde, als binnen andere vakken, als in het dagelijks leven;
 - een verantwoord gebruik van de zakrekenmachine.
2. Goed hoofdrekenen betekent:
 - perfecte beheersing van het getalgebied tot honderd;
 - inzicht in het tientallig positie-systeem;
 Goed hoofdrekenen geeft zelfvertrouwen en draagt bij tot een kritische houding ten aanzien van getalsmatige informatie en ten aanzien van het manipuleren met getallen. Tevens bevordert het een wiskundige attitude, hetgeen zich onder meer uit in een flexibel oplossingsgedrag bij (wiskundige) problemen.
3. Aan hoofdrekenen kan men ook vormende waarden toeschrijven, zoals het kiezen voor denkspanning in plaats van mechanistisch werken.

Allemaal mooi gezegd. Maar hoe dient dit alles in de praktijk van het onderwijs georganiseerd te worden? Welke didactische werkvormen zijn het meest geschikt? Hoe selecteer je de onderwerpen? Hoe wordt er geëvalueerd? Wat doe je schriftelijk, wat mondeling? Wat laat je weg uit de methode, wat voeg je eraan toe?

Allemaal vragen waarvoor de meeste methoden geen kant en klare oplossingen bieden. Dit onderdeel van het rekenen laat zich echter ook niet zo makkelijk voorprogrammeren, omdat een goede hoofdrekenles een dynamisch gebeuren zal zijn. Er zullen onvoorziene en verrassende momenten kunnen optreden, waarop de onderwijsgevende direct in moet kunnen spelen. Door hem of haar zal zowel vorm als inhoud bepaald moeten worden, maar wel afhankelijk van dat wat de kinderen inbrengen.

Zoals gezegd er zijn geen voorgekookte methoden aan te geven, hetgeen overigens niet wil zeggen dat het hoofdrekenen en schattend rekenen niet enigermate te plannen zouden zijn. Zeer belangrijk hierbij is dat het team, zeker vanaf groep vier, tot consensus komt over inhoud en didactiek. Nascholing kan daarbij een eerste stap zijn naar een deelwerkplan. Zoals gezegd er is daartoe thans een cursus voorhanden, waaruit we als afsluiting een lijst van didactische wenken opsommen:

1. *Regelmaat*
Hoofdrekenen dient regelmatig aan de orde te komen. Bij voorkeur elke dag.
2. *Kortdurend*
De hoofdrekenactiviteiten mogen niet te lang duren. Hooguit tien à vijftien minuten.
3. *Alle leerjaren*
Hoofdrekenen dient in alle leerjaren van de basisschool beoefend te worden.
4. *Voortgezet onderwijs*
Ook in de brugperiode van het voortgezet onderwijs moet hoofdrekenen onderhouden worden.
5. *Herhalend*
Onderwerpen van het hoofdrekenen worden niet afgesloten, maar dienen ook in hogere leerjaren opnieuw aan de orde gesteld te worden.
6. *Verdiepend*
Bij deze herhalingen dienen verdiepingen van de stof aangesneden te worden.
7. *Interactief*
Hoofdrekenlessen dienen een interactief gebeuren te zijn. Kinderen en onderwijsgevenden moeten gelegenheid krijgen van elkaars oplossingsstrategieën kennis te nemen en te leren.

8. *Flexibele houding*
Hoofdrekenen dient gericht te zijn op het ontwikkelen van flexibel omgaan met getallen.
9. *Kritische houding*
Hoofdrekenen dient gericht te zijn op het kritisch omgaan met getalsmatige gegevens.
10. *Construerend*
Hoofdrekenen moet kinderen (en volwassenen) de ruimte laten hun eigen rekenwijze te construeren.
11. *Relatienet*
Hoofdrekenen dient ook gericht te zijn op het opbouwen van een relatienet, welk verbanden doet inzien tussen schijnbaar losstaande feiten en deze doet gebruiken.
12. *Feitenkennis*
Hoofdrekenen kan niet zonder een bepaalde bagage aan feitenkennis, zowel wat de basisvaardigheden betreft als de betekenis die aan getallen toegekend kan worden (referentiepunten).
13. *Variatie*
Hoofdrekenlessen dienen een grote variatie aan oefenvormen en inhouden te hebben.
14. *Realiteit*
Hoofdrekenopgaven dienen niet louter kaal te zijn, maar ook aan reële situaties geoefend te worden.

Samenvattend willen we stellen, dat het flexibel kunnen omgaan met getallen en getalsmatige gegevens één van de belangrijkste doelstellingen is van het reken-wiskunde-onderwijs ten behoeve van de totale basisvorming (tot veertien jaar). Deze vaardigheid is niet alleen van belang voor de toepassingen van alledag maar legt ook een hechte basis voor de voortgang in de wiskunde en de toegepaste vakken als natuurkunde en dergelijke. Het inpassen in het schoolwerkplan van activiteiten over hoofdrekenen en schatten kan bijdragen tot een houding, waarin men, gesteld voor een rekenprobleem, zelf beslist of er uit het hoofd gerekend (al of niet schattend), op papier gewerkt, een zakrekenmachine ingeschakeld wordt, of voor een mengvorm van deze mogelijkheden wordt gekozen.

Noten

1. Robert E. Reys, 'Testing Mental-Computation Skills', *Arithmetic Teacher*, november 1985.
Barbara J. Reys, 'Estimation and Mental Computation. It's 'About' Time', *Arithmetic Teacher*, september 1986.
2. Estimation and Mental Computation 1986. *Yearbook van de 'National Council of Teachers of Mathematics (NCTM)*, ISBN-087353-226-0.
3. Het pakket voor de cursus 'Hoofdrekenen' bestaat uit vijf cursistenboekjes en een docentenboek. Samenstelling E. Feijs, K. Gravemeijer, E. de Moor en W. Uittenbogaard. Uitgave van OW & OC.