KENMERKEN VAN DEELBAARHEID - KENMERKEN VAN ONDERWIJS

A. Treffers
OW & OC

Het is thans gebruikelijk wiskunde-onderwijs in vier stromingen te delen, te weten:

- de mechanistische,
- de empiristische,
- de structuralistische,
- en de realistische stroming.

Daarbij gaat het om didactieken oftewel onderwijstheorieën die zowel in leerboek als onderwijspraktijk herkenbaar zijn.
De kenmerken van de onderscheiden richtingen en de onderlinge verschillen kunnen kort gekarakteriseerd worden met behulp van voorbeelden van stukjes reken/wiskundeonderwijs -we gaven daarvan in Panama-cursusboek 2 (1984) een illustratie met behulp van het delen.
Hier kiezen we een voorbeeld dat van oudsher bij uitstek als een exempel van formeel onderwijs geldt, namelijk 'kenmerken van deelbaarheid'.
Waarom zo'n formeel, ondergestoft voorbeeld, dat bovendien niet meer tot het huidige basisprogramma gerekend kan worden?
Wel, we beogen met dit onderwerp te laten zien dat realistisch wiskunde-onderwijs in de eerste plaats op een didactiek of onderwijstheorie duidt die ook een specifieke benadering van het meer formeel-gerichte reken/wiskundeonderwijs inhoudt. Of anders gezegd, dat het naamwoord 'realistisch' in dit verband niet uitsluitend op de alledaagse realiteit betrekking heeft, maar ook de voorgestelde of gedachte werkelijkheid omvat.

1. *Voorbeeld van een mechanistische aanpak*

Kenmerkend voor de mechanistische aanpak van 'kenmerken van deelbaarheid' is het feit dat eerst de regels zonder veel omhaal worden meegedeeld, waarna opgaven volgen om de regels toe te passen (zie figuur 1).

2	Een getal is deelbaar door 3, als de som der cijfers deelbaar is door 3. Voorbeeld: 5364 $5 + 3 + 6 + 4 = 18$. Dit is deelbaar door 3. Dan is 5364 ook deelbaar door 3.
3	Een getal is deelbaar door 9, als de som der cijfers deelbaar is door 9. Voorbeeld: 89163 $8 + 9 + 1 + 6 + 3 = 27$. Dit is deelbaar door 9. Dan is 89163 ook deelbaar door 9.

2	*Uit het hoofd.* Alleen de getallen, die deelbaar zijn door 3, opschrijven: 18 - 37 - 387 - 673 - 1987 - 9756 - 19385 - 92358 - 6381702
3	*Uit het hoofd.* Alleen de getallen, die deelbaar zijn door 9, opschrijven: 27 - 49 - 783 - 973 - 8719 - 9756 - 19385 - 92358 - 6381702

Figuur 1

2. *Voorbeeld van een empiristische aanpak*

Kenmerkend voor de empiristische aanpak van 'kenmerken van deelbaarheid' is het feit dat de betreffende regels niet alleen maar worden aangeboden, maar dat ze ook plausibel worden gemaakt. De leerlingen krijgen als het ware de gelegenheid om de juistheid ervan op een aantal voorbeelden uit te testen -een soort inductieve benaderingswijze dus(zie figuur 2).

1. 11 × 9	2. 17 × 9	3. 21 × 9	4. 22 × 9	5. 129 × 9

• Is the final sum always 9?

7. Choose at least 5 different numbers and multiply each by 9. Try to find one for which Ken's rule doesn't work.

8. Manolo thinks that Ken's rule (page 177) also works backward. He says, "Suppose you keep adding the digits of a number until you have a 1-digit sum. If that sum is 9, then your number is divisible by 9. If that sum is not 9, then your number is not divisible by 9." Copy and complete the chart to see if Manolo's rule works.

Number	Final Sum of Digits	Remainder When Divided by 9	Does Rule Work?
351	9	0	yes
4122			
551			
2637			
442			

Figuur 2

3. *Voorbeeld van een formeel-structuralistische aanpak*

Kenmerkend voor de formeel-structuralistische aanpak van 'kenmerken van deelbaarheid' is het feit dat de betreffende regels niet zonder meer worden aangeboden of inductief opgespoord, maar dat ze binnen het vaksysteem 'wettig en overtuigend' worden afgeleid. Aan de strengheid van dergelijke bewijzen worden overigens in de verschillende fasen van het wiskunde-onderwijs verschillende eisen van strengheid gesteld (zie figuur 3).

63. Elk getal uit het tientallig stelsel is deelbaar door 2 van zodra het cijfer der eenheden deelbaar is door 2.

Elk natuurlijk getal n wordt geschreven als $g = 10\,t + e$ met $0 \leqslant e \leqslant 9$.
Het getal e is het cijfer der eenheden van n.

(B.v. als $n = 4758$,
heeft men $n = 10 \times 475 + 8$ ($t = 475$ en $e = 8$).)

$10\,t = 2 \cdot 5\,t$ dus $2 \mid 10\,t$.

Als $2 \mid e$, dan heeft men $2 \mid 10\,t$ en $2 \mid e$,
dus (Hoofdstelling 4, blz. 285) : $2 \mid (10\,t + e) = n$.

HOOFDSTELLING 4. — **Als een natuurlijk getal twee natuurlijke getallen deelt, dan deelt het hun som.**

M.a.w. $(a, b, c \in \omega,\ a \mid b,\ a \mid c) \Rightarrow a \mid (b + c)$

BEWIJS : Daar $a|b$, bestaat er een $x \in \omega$, zó dat $b = a \cdot x$.
Daar $a|c$, bestaat er een $y \in \omega$, zó dat $c = a \cdot y$.
Dus

$$\begin{aligned} b + c &= a \cdot x + a \cdot y \\ &= a \cdot (x + y) \end{aligned}$$

dat toont aan dat $a \mid (b + c)$ h.m.b.w.

65. Als 9 de som der cijfers van een getal (uit het tientallig stelsel) deelt dan is dit getal deelbaar door 9.

Duiden we door $\overline{d\,h\,t\,e}$ het decimaal getal aan dat bekomen wordt door de 4 cijfers d, h, t en e naast elkaar te plaatsen.

$$\begin{aligned} \overline{d\,h\,t\,e} &= 1.000\,d + 100\,h + 10\,t + e \\ &= 999\,d + 99\,h + 9\,t + d + h + t + e \\ &= 9(111\,d + 11\,h + t) + d + h + t + e. \end{aligned}$$

Als $9 \mid (d + h + t + e)$, dan heeft men

$9 \mid 9\,(111\,d + 11\,h + t)$ en $9 \mid (d + h + t + e)$

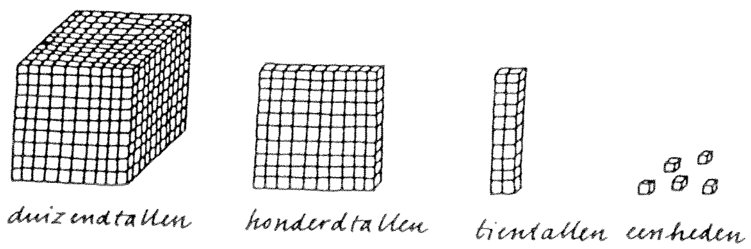
dus $9 \mid \overline{d\,h\,t\,e}$ wegens hoofdstelling 4, blz. 285.

Figuur 3

4. *Voorbeeld van een realistische aanpak*

De mechanistische aanpak is ontoereikend omdat de kinderen geen enkel instrument wordt aangereikt om betrekkingen tussen eigenschappen en bepaalde consequenties ervan af te leiden, te doorzien en daardoor beter te leren onthouden.De hoeveelheid regels die moet worden gememoriseerd is als gevolg daarvan te groot en te weinig gestructureerd. De empirische aanpak is om diezelfde reden te beperkt, al liggen hierin wel wat meer ontdekkingsmomenten. De structuralistische werkwijze is te formeel, en voor vele leerlingen van de basisschool te lastig.

In de realistische aanpak van dit onderwerp -zo dit al op het programma zou staan, maar daar gaan we nu maar even van uit- wordt dan ook gepoogd een inzichtelijke grondslag voor de deelbaarheidskenmerken te leggen, zonder in de formalistische werkwijze te vervallen. Een en ander gebeurt door van een concrete, eenvoudig voorstelbare verdelingssituatie uit te gaan die vervolgens een verdere schematisering, symbolisering en verkorting toelaat - in vakjargon 'progressieve mathematisering' genoemd. Als startvraag nemen we bijvoorbeeld de vraag hoeveel de rest is bij 1115 : 9, of concreet gesteld hoeveel blokjes we overhouden als we 1115 blokjes eerlijk over 9 personen verdelen (zie figuur 4).



figuur 4

Op de verschillende positieplaatsen zijn de restblokjes resp. 5,1,1 en 1, dus is het resttotaal 8. Bij 5111 : 9, 1511 : 9 en 1151 : 9 doet zich hetzelfde voor.

Bij 2411 : 9, 3320 : 9, 9710 : 9, idem.

Bedenk een serie opgaven die als rest 5 opleveren, luidt de volgende opdracht.

En tenslotte: bewijs dat de rest 5 is; en dat bij 7653 : 9 de rest 3 is!
Bij de deelbaarheidskenmerken van 2, 3, 4 en 5 kan op dezelfde manier te werk worden gegaan: uitgaan van een verdelingssituatie met blokken of geld en dan per positieplaats naar de restgetallen kijken. Op deze manier kan ook een kenmerk voor deelbaarheid door 7 of 11 of willekeurig welk getal worden afgeleid.
Een'samengesteld' deelbaarheidskenmerk als dat van 6 kan opdezelfde wijze worden afgeleid (per wisselende eenheid krijgen we een rest van 4) maar ook via de deelbaarheidskenmerken van 2 en 3.
Kortom, op deze wijze worden de regels van de deelbaarheidskenmerken door de kinderen zelf ontwikkeld vanuit een concrete verdelingssituatie. Deze aanpak is realistisch in die zin dat de kinderen zich kunnen realiseren hoe de regel ontdekt is: ze hebben als het ware de metafoor van de verdelingssituatie met positiemateriaal (abacus, blokken, geld ...) als concrete achtergrond.

Een dergelijke aanpak komt overigens overeen met de werkwijze van Dienes, dus met een bepaalde structuralistische aanpak die niet formeel maar materieel is, en wel in die zin dat van structuur-materiaal gebruik wordt gemaakt. Alleen hanteert Dienes een dergelijke aanpak voor het onderwijs als geheel, terwijl in de realistische richting ook andere passende (realistische) toegangen mogelijk zijn.
En daarmee zijn tevens de raakpunten tussen het realisme en het materieel-structuralisme aangegeven. In diepste grond berust de overeenkomst op de gedachte dat er in het onderwijs-leerproces bepaalde niveaus van concreetheid of zo men wil, abstractie zijn te onderscheiden. Het verschil manifesteert zich echter in de concrete vulling, resp. in het gebruik van elementaire realistische probleemsituaties aan de ene kant en de concrete belichamingen van wiskundige structuren in materialen, modellen en schema's aan de andere zijde. Althans in de accentuering ervan, want in beide richtingen benut men beide categorieën.

Hoe het ook zij, het is duidelijk dat realistisch wiskunde-onderwijs een meer formele benadering van het wiskunde-onderwijs in zich sluit, of in zich *kan* sluiten.

'Realistisch' verwijst naar de instap of de eerste fase van het onderwijs die er voor moet zorgen dat indien de kinderen later op een hoger formeel-symbolisch niveau werken, ze op een concrete onderbouwing ervan kunnen terugvallen. En die concrete fundering is dan grotendeels bekleed met realistische situaties die met dat stukje wiskunde verbonden zijn of er de reële belichaming van vormen. Het gevolg daarvan is in elk geval, dat de kinderen zich kunnen *realiseren* waar de symbolen naar verwijzen en de redeneringen voor staan.
'Realistisch' heeft derhalve een tweeledige betekenis in dit verband: het verwijst enerzijds naar de fundamentele betekenis van realistische problemen of context-opgaven in het onderwijs-leerproces -namelijk dat ze als bron en als toepassingsgebied fungeren- en anderzijds naar het zich kunnen realiseren (voorstellen, verbeelden) van de concrete betekenis die (aanvankelijk) aan het meer formele wiskundige opereren ten grondslag ligt (of kan liggen).
'Realistisch' duidt dus primair op de didactische gezindheid om de startfase van het betreffende onderwijs (ook als dat met een formeel onderwerp is) in 'realistische' belichamingen van de wiskundige begrippen en structuren te zoeken, dat wil zeggen in probleemsituaties die door de kinderen als 'echt' of 'reëel' (kunnen) worden ervaren en die tevens houvast bieden bij de verdere schematisering, verkorting, symbolisering en toepasbaarheid. Daarmee zegt de term weliswaar impliciet ook wel iets over het grote belang dat er aan de praktische toepasbaarheid wordt gehecht, maar dit houdt uiteraard niet in dat formeel gerichte gebieden worden afgesloten. Integendeel, de toegangswegen daartoe worden juist open gemaakt, zoals uit het voorbeeld van 'kenmerken van deelbaarheid' kan blijken. De theoretische veronderstelling van realistisch wiskundeonderwijs luidt dat een dergelijke didactiek zelfs de *enige* toegang tot de meer formele wiskunde vormt voor zwakkere leerlingen.
Op dit moment loopt tal van onderzoek over deze kernvraag in aansluiting op eerder speurwerk dat deze hypothese ondersteunt.

NASCHOLING EN ONDERSTEUNING BIJ HET INVOEREN VAN EEN REALISTISCHE REKEN/WISKUNDE METHODE

Abbes Dekker, Pabo Groenewoud Nijmegen
Henk Kapel, SAD Nijmegen

INLEIDING

In Nijmegen zijn in het verleden al wel incidenteel ervaringen opgedaan in nascholing en begeleiding van onderwijsgevenden die kennis wilden maken met vernieuwing van reken/wiskunde-onderwijs en de daarbij behorende werkwijze. Tot een hechte en meer geformaliseerde aanpak kwam het niet door verschillende oorzaken. Vier faktoren hebben daarbij een belangrijke rol gespeeld:

1. vertrek van docenten bij de opleidingen;
2. de opbouwfase waarin de SAD in Nijmegen aanvankelijk verkeerde, waardoor nascholing nog niet gevolgd kon worden door begeleiding;
3. het ontbreken van overleg op directieniveau tussen opleidingen en SAD om te komen tot afstemming van elkaars activiteiten;
4. het nog niet beschikbaar zijn van goede en bruikbare complete onderwijsleerpakketten op basis van de nieuwe ideeën.

NASCHOLING EN BEGELEIDING ANNO 1985

Er is de afgelopen 15 jaar heel wat veranderd ten goede om meer gerichte nascholing te geven.

1. Scholen worden nu geconfronteerd met redelijke reken/wiskunde-materialen, maar hebben problemen met een bijbehorende werkwijze en vragen hulp.

2. Op medewerkers-niveau, tussen opleiding en SAD, is de wens ontstaan om daaraan iets te doen teneinde teleurstellingen te voorkomen.

3. De eis van het ministerie dat nascholing in het kader van de N.I.B-cursus in onderling overleg tussen O.B.D. en Pabo's diende te worden geregeld, heeft in Nijmegen geleid tot een structureel overleg tussen opleidingen en begeleidingsdienst. De rekencursus "Methode-keuze" is daarin studie-object geworden ter verkenning van het z.g."grijze gebied"tussen nascholing en begeleiding.

Vanuit bovenstaande punten is er in Nijmegen op verschillend onderwijsontwikkelingsniveau nascholingservaring opgedaan.