

COGNITIEVE PSYCHOLOGIE EN WISKUNDE-ONDERWIJS

E. De Corte & L. Verschaffel (1)

Onderzoekscentrum voor Onderwijsleerprocessen

Katholieke Universiteit Leuven

1. ONTWIKKELINGEN IN DE WESTERSE ONDERWIJSPSYCHOLOGIE

Het Westers psychologisch landschap ziet er thans grondig anders uit dan enkele decennia geleden. In de eerste helft van deze eeuw was het behaviorisme, dat de strikt objectieve studie van het uitwendig waarneembaar gedrag voorstond, de toonaangevende stroming. Geleidelijk heeft het behaviorisme aan invloed ingeboet ten voordele van meer procesgerichte benaderingen van het menselijk gedrag zoals de z.g. "information-processing approach"; daarin wordt de mens niet meer opgevat als een bundel reacties op uitwendige prikkels, maar als een informatieverwerker. Centraal staat de vraag naar de interne processen van informatieverwerking en de cognitieve structuren die aan het leveren van een uitwendig waarneembare prestatie ten grondslag liggen (zie ook De Corte & Verschaffel, 1983a).

In deze bijdrage zullen we aantonen dat de opkomst van de informatieverwerkingsbenadering de relevantie van het wetenschappelijk onderzoek voor het reken/wiskunde-onderwijs aanzienlijk verhoogd heeft. Daarbij maken we onderscheid tussen twee categorieën van "produkten" van onderwijspsychologisch onderzoek : enerzijds onderzoeksresultaten over de denkprocessen die tussenkomen bij het (leren) oplossen van wiskundige taken (paragraaf 2) en anderzijds min of meer direct bruikbare produkten zoals methoden en technieken waarmee kinderlijke denkprocessen opgespoord kunnen worden en onderwijsprogramma's die in het kader van onderzoek tot stand gekomen zijn (paragraaf 3).

2. GEDETAILLEERDE BESCHRIJVINGEN VAN COGNITIEVE PROCESSEN EN STRUCTUREN

Er zijn de voorbije jaren binnen de informatieverwerkingsbenadering talloze fijnkorrelige analyses verricht van de interne processen en cognitieve structuren die zich bij subjecten voltrekken tijdens het (leren) oplossen van een bepaald soort problemen. Mede omwille van hun complex

doch tegelijk goed gestructureerd karakter vormden wiskundige taken van meetaf aan een geliefkoosd probleemgebied. Deze beschrijvende of descriptieve studies hebben een rijke schat aan empirisch materiaal opgeleverd betreffende de invloed van allerhande taakkenmerken op de moeilijkheidsgraad van rekenopgaven (zie 2.1.), de strategieën die leerlingen hanteren bij het oplossen van deze opgaven (zie 2.2.) en de aard van de fouten die daarop gemaakt worden (zie 2.3.).

Wij zijn ervan overtuigd dat een grotere vertrouwdheid van vakdidactici en practici met deze bevindingen uit onderwijspsychologisch onderzoek de praktijk van het reken/wiskunde-onderwijs ten goede kan komen. We zullen dit kort en exemplarisch trachten aan te tonen voor één type van taken, m.n. eenvoudige rekenvraagstukjes over optellen en aftrekken. Daarna formuleren we enkele kritische bedenkingen.

2.1. Moeilijkheidsgraden

Eén van de voornaamste bevindingen uit het recent onderzoek met enkelvoudige redactie-opgaven is dat de moeilijkheidsgraad ervan in zeer belangrijke mate medebepaald wordt door de semantische structuur, d.w.z. de aard van de betekenisvolle relaties tussen de bekende en de onbekende hoeveelheden uit de opgave. Zo stelden we in een studie bij een honderdtal tweedeklassers significant verschillende percentages goede oplossingen vast bij de volgende drie eenvoudige aftrekvraagstukjes (zie Tabel 1). Gelijkaardige gegevens werden bekomen bij optelopgaven (Verschaffel, 1984, p. 372).

Tabel 1. Percentages goede antwoorden op drie eenvoudige vraagstukjes bij honderd tweedeklassers (Pauwels, in voorbereiding)

Semantische structuur	Opgave	%
Oorzaak-verandering met startset onbekend	Piet had 11 appels. Hij gaf 3 appels aan An. Hoeveel appels heeft Piet nu ?	73
Combinatie met subset onbekend	Piet en An hebben samen 11 appels. Piet heeft 3 appels. Hoeveel appels heeft An ?	43
Vergelijking met vergeleken set onbekend	Piet heeft 11 appels. Hij heeft 3 appels meer dan An. Hoeveel appels heeft An ?	32

Nochtans zijn deze drie opgaven op veel punten aan elkaar gelijk : ze zijn ongeveer even lang, de woorden en grammaticale structuur zijn gelijklopend, ze kunnen opgelost worden door middel van eenzelfde rekenkundige bewerking en de getallen zijn precies dezelfde. Het enige verschil ligt in hun semantische structuur !

Uit ander onderzoek is evenwel gebleken dat de moeilijkheidsgraad van vraagstukken niet alleen bepaald wordt door hun semantische structuur, maar ook door de mate waarin de semantische relaties in de opgavetekst op een uitdrukkelijke en ondubbelzinnige wijze beschreven worden. Een Leuvense studie (De Corte, Verschaffel & De Win, 1984) waarin met twee reeksen van zes optel- en aftrekvoorbeeldjes gewerkt werd, toont dit duidelijk aan. De opgaven uit reeks A waren geformuleerd zoals ze meestal in de rekenmethoden voor de aanvangsklassen van het basisonderwijs en in de recente onderwijspsychologische onderzoeken voorkomen. In reeks B waren de opgaven uit de A-reeks zodanig herformuleerd dat de semantische relaties tussen de bekende en de onbekende hoeveelheden duidelijker tot uitdrukking komen. Beide reeksen werden schriftelijk aan een honderdtal eerste- en tweedeklassers aangeboden. Ter illustratie vermelden we in Tabel 2 een combinatievoorbeeldje uit reeks A evenals de herformulering daarvan uit reeks B, met daarbij het percentage correcte oplossingen.

Tabel 2. Voorbeeld van een opgave uit de A- en de B-reeks met percentage correcte oplossingen (De Corte, Verschaffel & De Win, 1984)

Reeks	Voorbeeld	%
A	Tom en Miet hebben samen 9 noten. Tom heeft 3 noten. Hoeveel noten heeft Miet ?	56
B	Tom en Miet hebben samen 9 noten. Drie van die noten zijn van Tom. De rest is van Miet. Hoeveel noten heeft Miet ?	70

Uit deze tabel komt duidelijk naar voren dat het herformuleerde vraagstukje uit reeks B merkkelijk beter opgelost werd dan dit uit de A-reeks. Dit kan als volgt verklaard worden. Opgave A is dubbelzinnig in die zin dat in de opgavetekst niet uitdrukkelijk vermeld staat dat de drie noten van Tom ook deel uitmaken van de groep van 9 die hij samen met Miet bezit. Derhalve zou men dit vraagstukje ook zo kunnen interpreteren dat

Tom over 3 noten beschikt en daarnaast samen met Miet nog een andere groep van 9 noten bezit. Bij de herformulering van dit vraagstukje in opgave B is deze alternatieve interpretatie uitgesloten. Gelijkaardige gegevens werden verkregen bij oorzaak-veranderings- en vergelijkingsvraagstukjes.

2.2. Oplossingsstrategieën

In verband met de oplossingsstrategieën bij eenvoudige optel- en aftrek-vraagstukjes heeft het recent onderzoek vooreerst aan het licht gebracht dat de correcte antwoorden van jonge basisschoolleerlingen op zeer verschillende manieren tot stand komen. Vele van deze oplossingswegen zijn daarenboven nooit expliciet door de leerkracht onderwezen, maar door de leerlingen a.h.w. zelf ontdekt. Een voorbeeld van een dergelijke inventie constateerden we bij een aantal eersteklassers bij het aftrekvraagstukje "Piet had wat appels. Hij gaf 3 appels aan An. Nu heeft Piet 5 appels. Hoeveel appels had Piet eerst?" In plaats van een som van de twee gegeven getallen te maken - d.i. de oplossingsstrategie die door de leerkracht onderwezen was - bekwamen sommige leerlingen de uitkomst door eerst een schatting van het onbekende getal te maken; vervolgens controleerden zij of dit getal, verminderd met 3, 5 opleverde; was dit niet het geval, dan probeerden zij een ander getal, totdat het juiste getal gevonden werd (Verschaffel, 1984, p. 267).

Verder blijkt er een sterk verband te bestaan tussen de semantische structuurkenmerken van de vraagstukjes enerzijds en de aard van de strategieën waarmee ze opgelost worden anderzijds. Neem bijvoorbeeld de volgende twee optelvraagstukjes, die verschillen qua semantische structuur :

- Combinatievraagstukje : Piet heeft 3 appels. An heeft 7 appels. Hoeveel appels hebben Piet en An samen ?
- Oorzaak-veranderingsvraagstukje : Piet had 3 appels. An gaf Piet 5 appels bij. Hoeveel appels heeft Piet nu ?

Voor het oplossen is het in beide gevallen efficiënter met het grootste getal te beginnen. Immers, dit heeft een aanzienlijke verkorting van het oplossingsproces tot gevolg. Nochtans bleken eersteklassers heel wat beter in staat met het grootste van de twee gegeven getallen te beginnen

bij het vraagstukje met een combinatiestructuur dan bij de oorzaak-veranderingsopgave (Verschaffel, 1984, p. 234; zie ook De Corte & Verschaffel, 1985a, p. 133). Hiervoor hebben wij de volgende verklaring. Om een optelvraagstukje waarin de kleinste term vooraan staat op te lossen door middel van een tel/rekenstrategie waarbij met het grootste getal begonnen wordt, is een zekere reorganisatie van de oorspronkelijke voorstelling of representatie van de probleemsituatie vereist. Welnu, deze reorganisatie is waarschijnlijk voor kinderen makkelijker door te voeren wanneer de twee getallen een identieke rol vervullen in de probleemrepresentatie (zoals de twee subsets uit het combinatieschema), dan wanneer het om getallen gaat die functioneel niet gelijkwaardig zijn (zoals de start- en de veranderingshoeveelheid uit het oorzaak-veranderingsschema).

2.3. Fouten en hun systematiek

Het recent onderzoek heeft ook tal van beschrijvingen en verklaringen van de ontstaanswijze van fouten op wiskundige taken opgeleverd. Daaruit is ten overvloede gebleken dat rekenfouten veelal niet lukraak tot stand komen, maar integendeel een begrijpelijk en systematisch karakter hebben. Door het denkproces van de leerlingen te ontleden, kan men erachter komen welke stap of beslissing precies voor het foutief antwoord verantwoordelijk was. Eénmaal de onderliggende misvatting of verkeerde procedure ontdekt en juist omschreven is, kan men ook met vrij grote zekerheid voorspellen welke andere opgaven door deze leerling wel of niet correct beantwoord zullen worden en - in het laatste geval - welk foutief antwoord zal gegeven worden.

Bekijken we even van naderbij een veel voorkomende fout op vergelijkingsvraagstukjes zoals "Piet heeft 3 appels. An heeft 6 appels meer dan Piet. Hoeveel appels heeft An?" In een studie die we een paar jaar geleden uitvoerden (Verschaffel, 1984, p. 322 e.v.) werd deze opgave door meer dan de helft van een groep van dertig beginnende eersteklappers met het getal 6 beantwoord. De meerderheid van deze leerlingen gaf dit verkeerd antwoord nadat zij de opgave als volgt naverteld hadden: "Piet heeft 3 appels. An heeft 6 appels. Hoeveel appels heeft An?" Wanneer de interviewer hen vroeg om de opgave na te spelen met poppen en blokken, dan gingen zij als volgt tewerk: eerst werden drie blokken gelegd bij de pop die Piet voorstelt; daarna construeerden zij een groep van zes

blokken en legden die bij An. Dit leidt tot het vermoeden dat deze leerlingen tot het foutief antwoord 6 gekomen waren doordat zij zinnen van het type "persoon a heeft x objecten meer dan persoon b" verkeerdelijk opvatten als "persoon a heeft x objecten". Als gevolg van deze verkeerde interpretatie hoefden zij het antwoord op de vraagzin ("Hoeveel appels heeft An?") niet eens te zoeken; immers, het antwoord ("An heeft 6 appels") was letterlijk gegeven in hun - verkeerde - voorstelling van het vraagstukje.

2.4. Oogbewegingsonderzoek bij eenvoudige rekenopgaven

Voor het verzamelen van gegevens betreffende de denkprocessen van jonge kinderen bij eenvoudige rekenvraagstukjes hebben we tot nog toe vooral gebruik gemaakt van z.g. kwalitatieve methoden, meer bepaald van verbale rapporteringstechnieken zoals hardop-denken, retrospectie en het individueel interview.

Omwille van een aantal kritieken op deze methoden (De Corte, 1984; Verschaffel, 1984, p. 486 e.v.), streven cognitieve psychologen er tegenwoordig evenwel naar om langs deze weg bekomen empirisch materiaal aan te vullen en te confronteren met gegevens bekomen via andersoortige technieken. Een voorbeeld van een methode die - wegens de verbeterde technische mogelijkheden - meer en meer gebruikt wordt in het kader van de studie van cognitieve processen is het registreren van oogbewegingen.

Wanneer we ervan uitgaan dat er een sterk verband bestaat tussen datgene waarnaar een kind kijkt enerzijds en het aan de gang zijnde informatie-opnemende en -verwerkende proces anderzijds (zie Van Lieshout, 1982), dan kunnen oogbewegingen ons helpen om door te dringen tot bepaalde onderdelen of aspecten van het oplossingsproces van aanvankelijke rekenopgaven, waarover via andere technieken onvoldoende (betrouwbare) gegevens bekomen kunnen worden.

In de loop van het voorbije schooljaar hebben we te Leuven reeds enkele exploratieve studies met deze techniek verricht. Daarin werden de oogbewegingen van een twintigtal leerlingen uit het eerste leerjaar geregistreerd tijdens het oplossen van een serie aanvankelijke rekensommen en -vraagstukjes.

Hoewel de verwerking van de gegevens nog volop aan de gang is, beschikken we reeds over enige aanwijzingen dat de techniek van

oogbewegingsregistratie een erg waardevol hulpmiddel kan zijn bij de studie van denkprocessen van jonge kinderen bij rekentaken, bijvoorbeeld om de ontstaanswijzen van frequent voorkomende, systematische fouten aan het licht te brengen. Eén van de meest opvallende resultaten uit de reeds verrichte studies in dit verband is dat sommige leerlingen formule-opgaven van het type $a = . - b$ (bijvoorbeeld : $2 = . - 9$) systematisch foutief beantwoordden met het verschil in plaats van de som van de twee gegeven getallen ($2 = 7 - 9$), doordat zij deze opgaven van rechts naar links "lazen"; hun foutieve antwoorden vloeiden rechtstreeks voort uit de verkeerde voorstelling die zij van de opgaven hadden opgebouwd. In verband met de vraagstukjes lijken de oogbewegingsgegevens erop te wijzen dat veel voorkomende fouten, zoals het antwoorden met de uitkomst van een verkeerde rekenoperatie of met een van de getallen uit de opgave, soms verklaard kunnen worden vanuit het niet-bekijken van bepaalde essentiële elementen van de opgavetekst.

2.5. Evaluatie

Tot zover een uiterst summier en exemplarisch overzicht van enkele resultaten van recent onderwijspsychologisch onderzoek in verband met eenvoudige rekenvraagstukjes, die o.i. relevant zijn met het oog op het meer leerling- en probleemgericht maken van het reken/wiskunde-onderwijs. Niettemin rijzen er een aantal ernstige problemen wanneer men effectief van deze onderwijspsychologische bevindingen gebruik wil maken om de onderwijspraktijk te optimaliseren.

Vooreerst wordt in de meeste onderzoeken slechts een zeer beperkt facet van het rekenen onder de loep genomen. Al is een dergelijke reductie binnen het wetenschappelijk onderzoek welhaast onvermijdelijk, in de praktijk kan men zich zo'n beperkte en aspectuele benadering van het rekenen en van het kinderlijke denken niet permitteren ! Derhalve staan practici er meestal alleen voor om deze onderzoeksresultaten te integreren in een verantwoorde aanpak van het rekenonderwijs.

Dit laatste wordt nog aanzienlijk bemoeilijkt doordat veel onderwijspsychologische onderzoeksrapporten in een vakjargon opgesteld zijn dat voor buitenstaanders niet vlot toegankelijk is. Een opvallende ontwikkeling in dit verband is dat het steeds vaker voorkomt dat cognitieve psychologen hun visie op een bepaald leer- of oplossingsproces uitdrukken in

de vorm van een computersimulatieprogramma. Bij wijze van voorbeeld verwijzen we naar de computermodellen voor het leren oplossen van eenvoudige optel- en aftrekvraagstukjes die recentelijk door Riley, Greeno & Heller (1983) en door Briars & Larkin (1984) ontwikkeld zijn. Dit kan ertoe leiden dat practici nog meer ontmoedigd worden om de betreffende literatuur te volgen.

Tenslotte is de keuze van het soort taken dat in onderwijspsychologisch onderzoek betrokken wordt, veelal niet in de eerste plaats gebaseerd op een grondige analyse van de reële noden en concrete moeilijkheden waarmee de praktijk van het reken/wiskunde-onderwijs op dat moment te kampen heeft. Allerhande theoretische en methodologische overwegingen spelen daarbij vaak een veel belangrijker rol. Dit kan er evenwel toe leiden dat men onderzoek doet met taken die vanuit de moderne vakdidactische inzichten of de veranderende realiteit van het onderwijs als oninteressant of zelfs verwerpelijk te bestempelen zijn. Zo wordt er momenteel nog steeds heel wat onderzoek verricht op het gebied van stipsommen, terwijl rijke contextproblemen nog maar nauwelijks tot object van onderwijspsychologisch speurwerk gemaakt zijn (zie ook De Corte & Verschaffel, *ter perse*).

3. ANDERE PRODUKTEN VAN ONDERWIJSPSYCHOLOGISCH ONDERZOEK

Het recent onderwijspsychologisch onderzoek heeft o.i. niet enkel tal van beschrijvingen van de oplossingsvaardigheden en denkprocessen van leerlingen bij rekentaken opgeleverd die voor de praktijk van nut kunnen zijn. Practici kunnen ongetwijfeld meer rechtstreeks profiteren van de methoden en technieken die door deze onderzoekers toegepast worden om deze gegevens te bekomen, evenals van de onderwijsprogramma's die ontwikkeld zijn in het kader van construerend onderzoek.

3.1. Het individueel interview

Wat de onderzoeksmethoden betreft denken wij in de eerste plaats aan het individueel interview, dat de laatste jaren ongetwijfeld tot één van de meest gebruikte technieken voor onderwijspsychologisch onderzoek is uitgegroeid. Het gaat daarbij om een min of meer gestructureerde, individuele onderzoekssituatie. Uitgaande van een aantal hypothesen stelt de

proefleider het kind procesgerichte vragen en biedt diagnostische deeltaken aan over kritische aspecten van de opgave, totdat hij/zij een bevredigend zicht meent te hebben op de onderliggende processen bij het kind (De Corte & Verschaffel, 1983b, p. 452 e.v.).

Heel wat opdrachten en procedures uit dergelijke - voor onderzoeksdoeleinden ontwikkelde - individuele interviews kunnen, eventueel mits kleine aanpassingen, ook nuttig toegepast worden in de dagelijkse onderwijspraktijk, bijvoorbeeld in het kader van de diagnose en de remediëring van leerlingen met rekenproblemen.

Wat het Nederlandse taalgebied betreft verwijzen we naar bepaalde taken en opdrachten (bijv. de vleksommen) uit de Kwantiwijzer (Van den Berg & Van Eerde, 1983), naar de procedure waarmee Nelissen (in voorbereiding) z.g. reflectie-momenten tijdens het oplossen van allerhande rekenprobleempjes tracht op te sporen, naar de door Van den Brink (1981) ontwikkelde techniek van mutuele observatie, en naar diverse opgaven (bijv. de vlekvraagstukken) en opdrachten (bijv. het laten navertellen en laten naspelen van de opgave) uit de individuele interviews waarmee in de Leuvense studies op het gebied van aanvankelijke rekenvraagstukjes gewerkt is (De Corte & Verschaffel, 1985b; Verschaffel, 1984, p. 439).

3.2. Construerende onderzoekingen

Zoals uit het voorgaande blijkt, kan de overgrote meerderheid van het onderwijspsychologisch speurwerk op het gebied van het (leren) rekenen als beschrijvend of constaterend gekarakteriseerd worden : men analyseert hoe leerlingen in gegeven omstandigheden bepaalde wiskundige begrippen en vaardigheden verwerven, welke moeilijkheden zij daarbij ondervinden, enz. Construerende onderzoekingen waarin men zelf een stuk onderwijs ontwikkelt, uitvoert en evalueert, zijn vooralsnog eerder zeldzaam.

Toch komt daarin stilaan verandering. Zo is er de laatste jaren zowel in een aantal Amerikaanse onderzoekscentra als te Leuven construerend onderzoek verricht met aanvankelijke formule- en redactie-opgaven. In bepaalde van deze studies leerden jonge basisschoolleerlingen diverse soorten aanvankelijke formule-opgaven of rekenvraagstukjes oplossen door gebruik te maken van verschillende aanschouwelijke modellen (De Corte & Verschaffel, 1980, 1985d; Lindvall, Tamburino & Robinson, 1982; Willis & Fuson, 1985). Fuson (ter perse) onderzocht of het systematisch aanleren

van de z.g. voorttelstrategie een gunstige invloed heeft op de vaardigheid in het oplossen van aftrekvraagstukjes bij jonge kinderen. Steinberg (1984) ging na of het bijbrengen van specifieke rekenregels zoals het gebruikmaken van z.g. "doubles" ($2+2=4$, $3+3=6...$), een positief effect heeft op het memoriseren van de optel- en de aftrektafels.

Dergelijke onderwijsexperimenten kunnen ongetwijfeld bouwstenen aanreiken om de praktijk van het (aanvankelijk) reken/wiskunde-onderwijs te verbeteren. Toch zijn de experimentele programma's uit deze construerende onderzoeken over het algemeen minder rechtstreeks praktisch bruikbaar dan men op het eerste gezicht zou vermoeden. Het probleem met vele van deze onderwijsexperimenten is namelijk dat ze een erg korte duur hebben en een beperkt inhoudelijk gebied beslaan. Bovendien wordt er veelal (te) weinig zorg besteed aan de vakdidactische opbouw van het programma. Dit komt doordat deze onderwijsexperimenten - in tegenstelling tot echt ontwikkelingsonderzoek (zie Goffree, 1985) - in de eerste plaats een theoretische bedoeling hebben, nl. het toetsen van één of meerdere hypothesen uit één of ander onderwijspsychologisch leer- of oplossingsmodel. Dit verklaart meteen ook waarom in de rapportering precies aan die elementen uit het experiment die de vakdidacticus of de practicus het meest interesseren - de beschrijving van het lesmateriaal, de oefeningen, de toetsen... - over het algemeen relatief weinig aandacht besteed wordt, terwijl de voor hem minder relevante aspecten - bijvoorbeeld de gehanteerde methodologie - erg uitvoerig behandeld worden.

3.3. De (micro-)computer in onderwijspsychologisch onderzoek

Tegenwoordig wordt ook de (micro-)computer meer en meer ingeschakeld in onderwijspsychologisch onderzoek. Verwonderlijk is dit geenszins. Immers, dit vernuftig apparaat maakt het mogelijk om op een flexibele maar tegelijk gestandaardiseerde en betrouwbare wijze gegevens te verzamelen en te verwerken over de oplossingsvaardigheden en de denkprocessen van subjecten bij allerlei rekentaken.

In het kader van dergelijk onderzoek met de (micro-)computer wordt ook veelal software ontwikkeld. Sommige van deze programma's kunnen, eventueel mits lichte wijzigingen, ook in de praktijk van het onderwijs hun dienst kunnen bewijzen. We lichten dit kort toe aan de hand van een

computerprogramma dat we te Leuven ontwikkeld hebben in het kader van een onderzoeksproject rond het (leren) diagnostiseren van rekenfouten bij (aspirant-)leerkrachten (De Corte & Verschaffel, 1982/83), dat gebaseerd is op het werk van Brown & Burton (1978).

Het computerprogramma is als volgt opgebouwd. Op het scherm verschijnt een foutief opgeloste optel- of aftrekopgave van een denkbeeldige leerling. Aan deze fout ligt een bepaalde onjuiste procedure (in computertaal "bug" ten grondslag. Een voorbeeld van zo'n onjuiste procedure is dat de leerling bij het uitvoeren van de aftrekking in elke rang het kleinste getal aftrekt van het grootste, ongeacht het getal dat bovenaan staat. Deze bug komt tot uiting in het volgende geval :

$$\begin{array}{r} 184 \\ -28 \\ \hline 164 \end{array}$$

Vervolgens vraagt de computer aan de gebruiker of hij al een vermoeden heeft omtrent de "bug" die tot dit foutief antwoord leidt. Antwoordt de gebruiker positief, dan verzoekt de computer hem om bondig zijn onderstelling of hypothese in te tikken. Antwoordt de gebruiker daarentegen dat hij nog geen precies vermoeden heeft, dan kan hij zelf nieuwe opgaven intikken, die dan door de denkbeeldige leerling overeenkomstig de ingebouwde verkeerde strategie worden opgelost. Nadat een hypothese ingetikt is, biedt de computer de gebruiker als toets nieuwe, onopgeloste opgaven aan met daarbij de vraag om telkens op grond van zijn hypothese over de "bug" het antwoord van de betreffende leerling te voorspellen. Wanneer de voorspelling klopt, biedt het programma nog enkele andere onopgeloste oefeningen aan om de hypothese verder te toetsen. Na vijf juiste voorspellingen gaat het programma over naar een nieuwe "bug", waarbij het dezelfde werkwijze herhaalt. Klopt er een voorspelling niet, dan wijst dit erop dat de gebruiker de werkelijke "bug" nog niet ontdekt heeft en er wordt opnieuw begonnen.

In een thans lopend onderzoek hebben we een groep aspirant-leerkrachten gedurende twee uur individueel met dit programma laten werken. De verwerking van de gegevens is momenteel nog aan de gang. Maar een voorlopige analyse van het beschikbare materiaal schijnt te suggereren dat het diagnostiseren van rekenfouten een complexe vaardigheid is die samengesteld is uit verschillende deelvaardigheden, maar tevens dat het programma een gunstige invloed heeft op de ontwikkeling van deze

complexe vaardigheid. Wij menen derhalve dat het ontwikkelde programma - mits enige aanpassingen - nuttig gebruikt kan worden voor het verwerven en trainen van een belangrijke vaardigheid die thans in de lerarenopleiding en -bijscholing veelal verwaarloosd wordt.

Onderwijspsychologen zijn tegenwoordig ook nog op een andere manier bezig met het construeren van programma's die voor de praktijk van het reken/wiskunde-onderwijs van belang kunnen zijn. In verscheidene grote Amerikaanse onderwijspsychologische onderzoekscentra wordt momenteel immers ijverig gewerkt aan de ontwikkeling van z.g. intelligente leerbegeleidingscomputerprogramma's, in het Engels "intelligent tutoring systems" (zie ook De Corte & Verschaffel, 1985c). Kenmerkend voor dergelijke programma's is dat daarin heel wat kennis over de betrokken leerinhoud is ingebouwd. Men spreekt in dit verband van een expert-systeem. Het verloop van het programma is gebaseerd op een voortdurende vergelijking tussen het door de leerling bereikte kennisniveau enerzijds en het ingebouwde expert-systeem anderzijds. Op deze manier is zo'n programma in staat de interactieve en de individualiserende mogelijkheden van de computer veel sterker te benutten dan in de gangbare programma's het geval is. Zo maakten wij tijdens onze bezoeken aan het Learning Research and Development Center van de University of Pittsburgh kennis met intelligente tutors voor het leren van het aftrekalgoritme, het leren van de basisprincipes van algebra, het leren van het economisch principe van vraag en aanbod, het leren van wetten uit de fysica en de optica...

De meeste van deze intelligente leerbegeleidingsprogramma's verkeren nog in een ontwikkelingsstadium. Bovendien worden zij in de eerste plaats ontwikkeld voor onderzoeksdoeleinden en vereisen zij krachtiger machines dan de huidige microcomputers die op de scholen beschikbaar zijn. Het valt evenwel te verwachten dat onderzoekers zullen proberen vereenvoudigde of aangepaste versies van deze produkten voor microcomputers op de markt te brengen; daarenboven zal in de komende jaren de capaciteit van de microcomputers aanzienlijk toenemen. De meeste van deze intelligente leerbegeleidingsprogramma's kunnen een vakdidactische confrontatie met de thans beschikbare software ruimschoots doorstaan, en hebben, zoals gezegd, een aantal bijkomende kwaliteiten. Maar het blijft natuurlijk de taak van vakdidactici en practici om op basis van hun eigen deskundigheid, ervaring en gezond verstand de kwaliteit en de bruikbaarheid in hun

onderwijssituatie ervan te beoordelen, net zoals dit voor de overige besproken producten van onderwijspsychologisch onderzoek het geval is.

NOOT

- (1) L. Verschaffel is aangesteld navorsers bij het Belgisch Nationaal Fonds voor Wetenschappelijk Onderzoek.

LITERATUUR

- Briars, D.J., & Larkin, J.H. (1984). An integrated model of skill in solving elementary word problems. Cognition and Instruction, 1, 245-296.
- Brown, J.S., & Burton, R.R. (1978). Diagnostic models for procedural bugs in basic mathematical skills. Cognitive Science, 2, 155-192.
- Carpenter, T.P., Bebout, H.C., & Moser, J.M. (1985, March). The representation of basic addition and subtraction word problems. Paper presented at the Annual Meeting of the American Educational Research Association, Chicago.
- De Corte, E. (1984). Kwalitatieve gegevens in onderwijsonderzoek. In L.F.W. De Klerk & A.M.P. Knoers (Eds), Onderwijspsychologisch onderzoek. (Onderwijsresearchdagen 1984) (pp. 6-26). Lisse : Swets & Zeitlinger.
- De Corte, E., & Verschaffel, L. (1982/83). Leren fouten diagnostiseren met behulp van de microcomputer. Willem Bartjens, 2, 36-42.
- De Corte, E., & Verschaffel, L. (1983a). Enkele recente ontwikkelingen in de onderwijspsychologie in de Verenigde Staten. In H.P.M. Creemers e.a. (Eds), Losbladig Onderwijskundig Lexicon (PO 5900, pp. 1-34). Alphen aan de Rijn : Samsom.
- De Corte, E., & Verschaffel, L. (1983b). Analyse en beïnvloeding van het probleemoplossend denken. Een bijdrage tot het ontwikkelend onderwijs. Tijdschrift voor Orthopedagogiek, 13, 449-464.
- De Corte, E., Verschaffel, L., & De Win, L. (1984). De invloed van tekstkenmerken op de representatie- en oplossingsprocessen van jonge kinderen bij eenvoudige optel- en aftrekvraagstukjes. Pedagogisch Tijdschrift, 9, 527-538.
- De Corte, E., & Verschaffel, L. (1985a). Oplossingsstrategieën van eersteklassers bij aanvankelijke redactie-opgaven over optellen en aftrekken. Pedagogische Studiën, 62, 125-138.
- De Corte, E., & Verschaffel, L. (1985b). Navertellen van een redactie-opgave als toegang tot de probleemrepresentatie. Voordracht gehouden op de Onderwijsresearchdagen 1985 te Enschede.
- De Corte, E., & Verschaffel, L. (1985c). Eerste hulp bij computergebruik op school. Brussel : Kredietbank.

- De Corte, E., & Verschaffel, L. (1985d). Werken met eenvoudige rekenvraagstukjes in de eerste klas. In E. De Moor (Ed.), Reken/wiskundeonderwijs anno 1984. Panama cursusboek 3 (pp. 34-41). Utrecht : Stichting Opleiding Leraren/Vakgroep Onderzoek Wiskundeonderwijs en Onderwijs Computercentrum.
- De Corte, E., & Verschaffel, L. (ter perse). De invloed van opgavekenmerken op het oplossen van vraagstukken bij basisschoolleerlingen. In Liber Amicorum Prof. A. De Block. Gent : R.U. Gent.
- Fuson, K. (in press). Teaching subtraction as counting up. Journal for Research in Mathematics Education.
- Goffree, F. (1985) Onderzoek en (leerplan)ontwikkeling. (Studies in leerplanontwikkeling 2). Enschede : Stichting voor de Leerplanontwikkeling.
- Lindvall, C.M., Tamburino, J.L., & Robinson, L. (1982, March). An exploratory investigation of the effect of teaching primary grade children to use specific problem-solving strategies in solving simple arithmetic story problems. Paper presented at the Annual Meeting of the American Educational Research Association, New York.
- Pauwels, A. (in voorbereiding). Empirische toetsing van computermodellen over het leren oplossen van eenvoudige optel- en aftrekvraagstukjes. (Licentiaatsverhandeling). Leuven : Seminarie voor Pedagogische Psychologie, Faculteit der Psychologie en Pedagogische Wetenschappen, K.U. Leuven.
- Riley, M.S., Greeno J.G., & Heller, J.I. (1983). Development of children's problem-solving ability in arithmetic. In H.P. Ginsburg (Ed.), The development of mathematical thinking (pp. 153-196). New York : Academic Press.
- Steinberg, R. (1984, April). Derived facts strategies in learning addition and subtraction. Paper presented at the Annual Meeting of the American Educational Research Association, New Orleans.
- Van den Berg, W., & Van Eerde, H.A.A. (1983). Ontcijferen van het rekenen : diagnostiek met de Kwantiwijzer. Tijdschrift voor Orthopedagogiek, 22, 44-67.
- Van den Brink, J. (1981). Mutual observation. For the Learning of Mathematics, 2, 22-25.
- Van Lieshout, E.C.D.M. (1982). Oogbewegingsonderzoek : Methode, resultaten, betekenis voor onderzoek van het onderwijs. Tijdschrift voor Onderwijsresearch, 7, 145-171.
- Verschaffel, L. (1984). Representatie- en oplossingsprocessen van eerste-klassers bij aanvankelijke redactie-opgaven over optellen en aftrekken. Een theoretische en methodologische bijdrage op basis van een longitudinale, kwalitatief-psychologische studie. (Niet-gepubliceerd doctoraatsproefschrift). Leuven : Seminarie voor Pedagogische Psychologie, Faculteit der Psychologie en Pedagogische Wetenschappen, K.U. Leuven.