HOE HET 'VERHOUDINGEN' VERGAAT

Jaap Vedder, PDI RU Utrecht
Pieter Terlouw, NLO Ubbo Emmius Groningen

Verhoudingen (b)lijken in diverse wiskundige onderwerpen een belangrijke positie in te nemen. Zij vormen in verscheidene reken/wiskunde-methoden voor het basis- en het voortgezet onderwijs geen geïsoleerd stukje leerstof. In sommige andere methoden echter vormen zij nog een apart gebied of wordt aan het onderwerp verhoudingen nauwelijks (hooguit enige mechanistische) aandacht besteed. Bij het analyseren van enkele realistische reken/wiskunde-methoden ontstaat de indruk dat verhoudingen deel uitmaken van een gemeenschappelijke struktuur in veel wiskundige onderwerpen. Freudenthal (1984, p. 89) suggereert dan ook om aan het begrip 'verhouding' prioriteit toe te kennen als eerste wiskundige uiting in de ontwikkeling van de individuele mens, en niet aan het begrip 'getal'.

Bij het spelen met autootjes, bij het bouwen van huisjes, bij het beschrijven van de wereld om je heen, van jongsaf wordt omgegaan met het vergelijken van maten:

"Die boom is groter dan die boom daar."
"Dat mannetje past niet in die rode auto, maar wel in die gele."
"Als we naar huis rijden, dan wordt de kerktoren steeds hoger."

Vergroten en verkleinen van figuren, het vergelijken van prijzen, enzovoorts, zijn allemaal situaties waarin verhoudingen voorkomen.

In realistische reken/wiskunde-methoden blijkt bij de behandeling van het onderwerp 'verhoudingen' de verhoudingstabel een belangrijk model te zijn:

a Een auto rijdt gemiddeld 1 op 12.
Neem de tabel over en vul die verder in.

aantal liters	1		5	½		15		40
aantal kilometers		36			30		300	

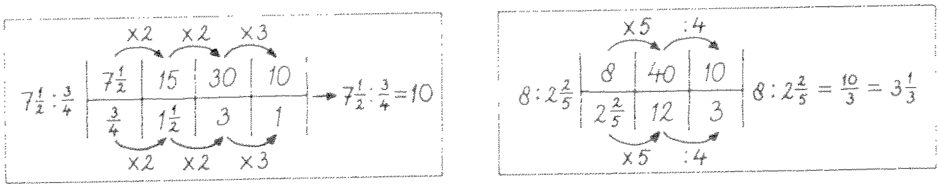
b In een bosgebied worden bomen geplant. Er komen naaldbomen en loofbomen in de verhouding 3 : 5.
Neem de tabel over en vul die verder in.

naaldbomen	3		30		75			
loofbomen		25					800	
totaal				160		400		2000

Uit: De Wereld in Getallen, deel 6a, p. 113

Zelfs een suspekt onderwerp als 'delen door breuken' kan inzichtelijk worden behandeld. Men vergelijke het volgende voorbeeld uit De Wereld in Getallen (deel 6a, p. 106) met 'delen door een breuk is vermenigvuldigen met het omgekeerde'.

2 Gebruik van de verhoudingstabel.



$2\frac{1}{2} : \frac{1}{2} =$	$2\frac{1}{2} : \frac{4}{5} =$	$6 : 2\frac{1}{2} =$	$6\frac{1}{2} : 1\frac{1}{4} =$.
$4 : \frac{3}{4} =$	$1\frac{1}{2} : \frac{5}{6} =$	$3\frac{1}{3} : 1\frac{1}{3} =$	$8 : 1\frac{1}{3} =$
$6 : \frac{4}{5} =$	$3\frac{1}{2} : \frac{2}{3} =$	$4\frac{3}{4} : 1\frac{1}{2} =$	$6 : 1\frac{3}{5} =$

Uit: De Wereld in Getallen, deel 6a, p. 106

Het model verhoudingstabel kan in het voortgezet onderwijs zowel voor leerlingen als docenten (in verschillende vakken) een belangrijk hulpmiddel zijn. Verhoudingen komen immers voor in algebra, meetkunde, statistiek, economie, natuurkunde, aardrijkskunde, enz. De handleiding bij Taltaal benadrukt dit:

In het voortgezet onderwijs speelt bij verschillende vakken de *vaste* verhouding tussen twee grootheden een belangrijke rol. Denk maar aan spanning en stroomsterkte, kapitaal en rente, gewicht en uitrekking van veer, inwonertal en waterverbruik. Ook zijn er voorbeelden te geven waarbij er juist geen sprake is van een gelijke verhouding, zoals op de markt: 'een voor een daalder, twee voor twee en een halve gulden', of in het geval van exponentiële groei (Rapport van de Club van Rome). Aan de hand van een konkreet probleem kunnen we gemakkelijk duidelijk maken, waar het om gaat.

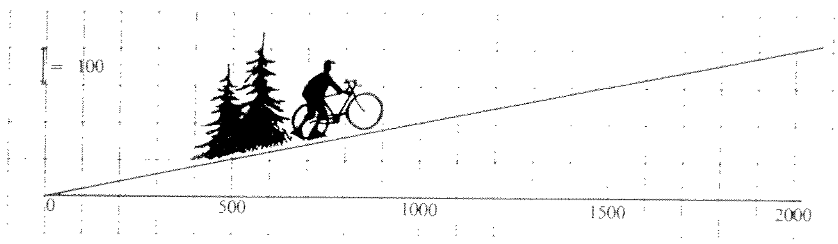
Een bakker verkoopt pakken koeken. In elk pak zitten 8 koeken. We kunnen nu een tabel maken.

aantal pakken	1	2	3	4	5	6
aantal koeken	8	16	24	32	40	48

Uit: Taltaal, handleiding 6, p. 11

Het onderwerp verhoudingen (ver)bindt als het ware verschillende leerstofgebieden. Een longitudinale leerstofplanning wordt dan noodzaak. Docenten in het voortgezet onderwijs kunnen hun onderwijs echter pas afstemmen op wat leerlingen weten, als zij enige kennis van het reken/wiskunde-onderwijs uit de basisschool bezitten. Als een docent uit het voortgezet onderwijs nooit van een verhoudingstabel gehoord heeft, dan worden waarschijnlijk alleen algoritmische berekeningen gemaakt. Het kan ook andersom: Een leerling heeft in het basisonderwijs mechanistisch reken/wiskunde-onderwijs ontvangen, terwijl in het voortgezet onderwijs een wiskunde-methode met een realistisch karakter wordt gebruikt. De methode Moderne Wiskunde (vierde herziene editie) bijvoorbeeld behandelt in deel 3 (2e klas) de verhoudingstabel. Niet ten onrechte, want op een school voor voortgezet onderwijs komen leerlingen uit diverse basisscholen die ook diverse reken/wiskunde-methoden zullen gebruiken. Enkele fragmenten uit hoofdstuk 1 "Evenredigheden":

18 In de Ardennen kun je steile hellingen tegenkomen.
De fietser in de tekening is er bij gaan lopen.
In de tabel er onder kun je aflezen dat hij 200 meter moet stijgen als hij zich 1000 meter naar rechts beweegt.



hoogte				200	300	30	1		
afstand (horizontaal)	100	500	200	1000				10	1

36 In gewone omstandigheden is het hoger in de lucht kouder dan op de grond. Steeds als je 100 m stijgt daalt de temperatuur gemiddeld met 0,6 °C.

a Je zit in een vliegtuig, dat op 10.000 meter hoogte vliegt. Beneden je op de aarde is het 20 °C. Welke temperatuur heerst er buiten bij het vliegtuig?

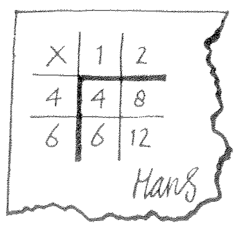
b Boven de boomgrens kunnen geen bomen meer groeien.
De boomgrens bevindt zich op een hoogte waar het zomers nog gemiddeld 10 °C wordt.
In Noord-Zweden is het zomers gemiddeld 18 °C op zeeniveau. Hoe hoog ligt daar de boomgrens?

Uit: Moderne Wiskunde, deel 3, hoofdstuk 1

In dit hoofdstuk worden o.a. ook kruisprodukten geïntroduceerd om te gebruiken bij het vaststellen van evenredigheid.

20 Het schema $\frac{4}{6} \Big| \frac{8}{12}$ is een evenredigheid.

Hans: 'Ik laat dat zien met een vermenigvuldigingstabel.'
Petra: 'Als je de bovenste rij met $1\frac{1}{2}$ vermenigvuldigt krijg je de onderste.'
Selma: 'Uit 4 × 12 komt 48 en uit 6 × 8 ook. Mijn pa zegt dat het dus een evenredigheid is.'
Frank: 'De getallen in de voorste en de achterste kolom verhouden zich als 1 : 2.'



a Wat zouden Hans, Petra, Selma en Frank zeggen over $\frac{6}{10} \Big| \frac{9}{15}$?

b En over $\frac{4}{16} \Big| \frac{7}{28}$?

4 × 28 en 7 × 16 noemen we de kruisprodukten van $\frac{4}{16} \Big| \frac{7}{28}$

Als de kruisprodukten gelijk zijn is het schema een evenredigheid.

Uit: Moderne Wiskunde, deel 3, hoofdstuk 1

Wil een goede longitudinale leerstofplanning tot stand komen zonder breuk tussen basis- en voortgezet onderwijs, dan moeten de didaktische verworvenheden van het in omvang toenemend realistisch reken/wiskunde-onderwijs óók gaan behoren tot het kennisgebied van docenten in het voortgezet onderwijs. Van belang daarbij is dat na verloop van enige oefening niet slechts *kruisprodukten* voorkomen, maar dat ook een *attitude van schatten, gevoel hebben voor patronen, flexibel rekenen* onderhouden en uitgebouwd wordt. Het zal 'saai' en 'kaal' worden als de volgende opgaven allemaal met 'kruisprodukten' gemaakt worden.

Bereken de ontbrekende getallen in de volgende evenredigheidsschema's:

2	4
7	x

$\frac{1}{2}$	y
$\frac{1}{3}$	4

39	p	26
15	20	q

14	b	c
a	15	39
7	5	d

2	10
1	n
m	1

In het voortgezet onderwijs dreigt nog een ander probleem. In diverse schoolvakken worden wiskundige vaardigheden gebruikt. Als voorbeeld geven we het volgende scheikunde-vraagstuk:

Wet van Lavoisier: De totale massa van de stoffen voor de reaktie is gelijk aan de massa van de stoffen na de reaktie.

Voorbeeld: ijzer en zwavel reageren met elkaar in de massa-verhouding 7 : 4.

a. geef een vergelijking voor de reaktie
b. hoeveel gram zwavel kan er reageren met 10 gram ijzer?
c. hoeveel gram ijzersulfide ontstaat er?
Men voegt bij elkaar 17,5 gram ijzer en 12 gram zwavel.
d. hoeveel gram ijzersulfide ontstaat er?
En welke stof blijft over (hoeveel gram)?

De leraar (4 HAVO/4 VWO) schreef later de volgende oplossing op het bord:

Antwoord: a. ijzer + zwavel → ijzersulfide
b. 7 gram ↔ 4 gram 11 gram
10 gram ... 5,8 gram $\frac{110}{7}$ = 15,8 gram
Er reageert $\boxed{5,8}$ gram zwavel.
c. Er ontstaat 10 + 5,8 = $\boxed{15,8}$ gram ijzersulfide.
7 4 11
d. ijzer + zwavel → ijzersulfide
17,5 10 27,5
....
Met 17,5 gram ijzer kan $\frac{17,5 \times 4}{7}$ = 10 gram zwavel reageren
12 - 10 = 2 gram zwavel over
17,5 + 10 = $\boxed{\text{27,5 gram ijzersulfide}}$

Ook in de uitleg werd met geen woord verwezen naar de verhoudingstabel. Wel werd gezegd: "Ga je van 7 naar 10 gram ijzer, dan moet je 11 vermenigvuldigen met $\frac{10}{7}$, dus $\frac{110}{7}$ = 15,8 gram."

Zeker voor leerlingen die een beetje zwak in rekenen (we bedoelen: dit soort rekenen) zijn, is dit géén lange-termijn-oplossing.

Toch kunnen we het onbekend-zijn met de didaktiek van rekenen/wiskunde de docenten van 'andere' vakken niet aanrekenen. Wij denken dat dit probleem pas oplosbaar wordt, als eerst de wiskunde-docenten van het voortgezet onderwijs op een 'realistische' wijze met hun vak omspringen en niet meer puur 'mechanistisch'.

We zien het voorgaande ook terug in andere opgaven uit de wiskunde:

$$\frac{x+1}{x+3} = \frac{x+4}{x+2} \qquad \text{(noot 1)}$$

Hierbij is de oplossing: $(x+1)(x+2) = (x+3)(x+4) \wedge x \neq -3 \wedge x \neq -2$.

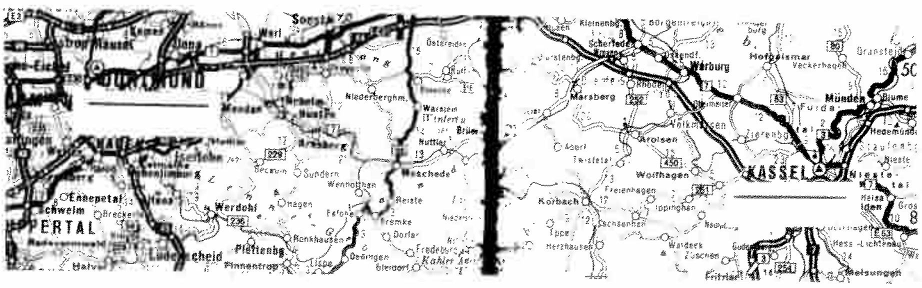
Want: $\frac{A}{B} = \frac{C}{D} \Leftrightarrow A.D = B.C \wedge B \neq 0 \wedge D \neq 0$.

En een opgave als: $\frac{\sqrt{x}}{x+1} = \frac{\sqrt{x}}{5-x}$, wordt daarna opgelost door:

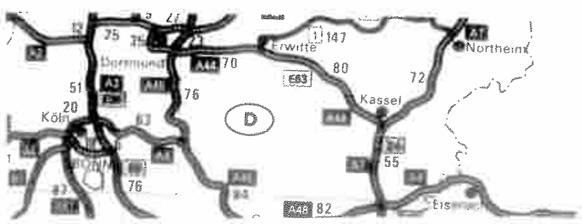
$(x+1)\sqrt{x} = (5-x)\sqrt{x}$ $(x \neq -1 \wedge x \neq -5)$ $\quad x\sqrt{x} + \sqrt{x} = 5\sqrt{x} - x\sqrt{x}$ $\quad$ enzovoorts.

Men heeft dan ingeoefend de opgave niet 'aan te kijken'! Er wordt direkt een regel toegepast. Een moment van reflektie: "Wat staat hier eigenlijk? Hé, de tellers zijn gelijk", is veel meer op zijn plaats. Een dergelijke attitude is belangrijk, en dan zijn ook aardrijkskunde-opgaven zoals de volgende, over 'schaal' oplosbaar.

1. In "Het beste boek voor de weg" komen onderstaande twee fragmenten van kaarten voor. Hoe breed zijn de Auto-bahnen op beide kaartjes? Welke breedte korrespondeert daar in werkelijkheid mee? Wat is hier aan de hand?



schaal: 1:1000.000



schaal: 1: ?

Bij het oplossen van bovenstaande opgave kwamen de volgende antwoorden voor:

a. de breedte van de weg is 2 mm, dus in het echt 2 km (want de schaal is 1:1000.000

Hier wordt gebruik gemaakt van externe verhoudingen, tussen kaart en werkelijkheid.

b. op het tweede kaartje staat bij Köln 20 km, en dit stukje weg is ongeveer 3 x zo lang als de weg breed is. Breedte van de weg is dus ongeveer 6,5 km.

Nu wordt gebruik gemaakt van interne verhoudingen, tussen twee grootheden op één en dezelfde kaart.

Tenslotte: We zouden onze rij voorbeelden schier eindeloos voort kunnen zetten. Dat is niet onze intentie. We verwachten dat overleg tussen docenten basisonderwijs en hun kollega's in het voortgezet onderwijs (externe relatie) en overleg tussen wiskunde-docenten en wiskunde-gebruikende-docenten binnen het voortgezet onderwijs (interne relatie) bij kan dragen tot een longitudinale leerstofplanning en tot goed realistisch reken/wiskunde-onderwijs aan leerlingen. 'Verhoudingen' zal en kan daarbij een belangrijk onderwerp zijn.

Noot 1. Een terzijde bij de opgave $\frac{x+1}{x+3} = \frac{x+4}{x+2}$

We plaatsen deze opgave in de verhoudingstabel:

x + 1	x + 4
x + 3	x + 2

Verhoudingen mogen bij elkaar opgeteld en van elkaar afgetrokken worden:

x + 1	x + 4	3	2x + 5
x + 3	x + 2	-1	2x + 5

Derhalve is de oplossing $x = -2\frac{1}{2}$, immers 3 : -1 = 0 : 0. Dit kan mogelijk het doordenken van verhoudingen op eigen niveau vergen (vgl. Goffree en Treffers, dit cursusboek).

Literatuur:

Faes, W. en L. Streefland, Breuken, verhoudingen en procenten in Nederlandse reken/wiskunde-methoden. In: Panama-cursusboek 2, Utrecht 1984, p. 98-114.

Freudenthal, Hans, Appels en peren/wiskunde en psychologie, Apeldoorn 1984.

Freudenthal, H., Didactische fenomenologie van wiskundige structuren, Utrecht 1984.

Vedder, Jaap, Rekenen/wiskunde voortgezet? In: Panama-cursusboek 3, Utrecht 1985, p. 134-139.