DE BETEKENIS VAN CONTEXTEN

Koeno Gravemeijer & Frans van Galen, project OSM Rotterdam

INLEIDING

Het gebruik van contexten kunnen we opvatten als een logische consequentie van een bepaalde kijk op onderwijzen en leren. In deze bijdrage willen we laten zien dat deze opvatting over onderwijzen en leren past binnen denkbeelden in de cognitieve psychologie, zoals die door Ausubel naarvoren gebracht worden. Tevens willen we laten zien dat dezelfde benadering bruikbaar is voor wiskundeonderwijs, waarbij geen sprake is van een reële context, maar waar de wiskunde zelf de context biedt.

EEN VISIE OP WISKUNDEONDERWIJS

Het gebruik van contexten kan gezien worden als een exponent van een bepaalde visie op wiskundeonderwijs. Deze visie op wiskundeonderwijs is sterk gerelateerd aan een daarmee consistente visie op wiskunde. Er zijn globaal gesproken twee visies op wiskunde, één waarin de wiskunde gezien wordt als een geheel van kennis, een gesloten systeem, en één waarbij de wiskunde vooral gezien wordt als een activiteit, een bepaalde aanpak. Freudenthal (1971) benadrukt dat de activiteit van een wiskundige zich niet beperkt tot het oplossen van problemen, maar dat daaraan nog twee andere aspecten te onderscheiden zijn die hij aanduidt met 'looking for problems' en 'organizing a subject matter'.
Bij het eerste aspect gaat het om een (wiskundige) attitude die gekenmerkt wordt door het oog hebben voor de mogelijkheden voor een wiskundige benadering van de werkelijkheid. Je zou kunnen zeggen dat je de wereld bekijkt door een wiskundige bril, zonder echter te vergeten welke beperkingen dat met zich meebrengt.
Deze attitude kan bij kinderen ontwikkeld worden, door in het onderwijs gebruik te maken van 'rijke contexten'. Daarbij worden de leerlingen gestimuleerd *bewust* een wiskundige bril op te zetten, d.w.z. dat de leerlingen zich realiseren dat je zo een bepaalde verschraling aanbrengt.
Het tweede aspect dat Freudenthal noemt, het organiseren, wordt ook wel aangeduid met de term mathematiseren - letterlijk: verwiskundigen. Hierbij worden mathematiseringsmiddelen genoemd als generaliseren, formaliseren, systematische aanpak, het gebruik van analogie redeneringen etc.

De geschiedenis van de wiskunde kan gezien worden als een proces van voortschrijdende mathematisering. De wiskunde vindt zijn oorsprong in het mathematiseren van de werkelijkheid, later wordt de wiskundige kennis zelf tot onderwerp van het mathematiseringsproces gemaakt. (Dit laatste kan een reorganisatie op axiomatische basis inhouden.)
Dit zelfde idee van 'progressieve mathematisering' kan ook gebruikt worden om de opbouw van een leergang vorm te geven. Een voorbeeld biedt de leergang optellen en aftrekken van Jan van den Brink (1).

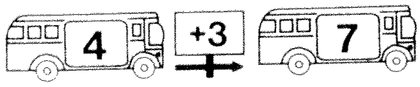


Fig. 1. "Er stappen drie mensen in."

Uit de bussensliert (fig.1.) als beschrijvingsmiddel voor een 'autobussenverhaal' wordt via generaliseren (andere contexten) en formaliseren (verschraling van de notatie) de formele notatie voor optellen en aftrekken ontwikkeld.
De contexten spelen een essentiële rol in zo'n opbouw via het progressief mathematiseren. In het volgende willen we laten zien dat de visie op onderwijzen en leren die hiermee samenhangt begrepen kan worden vanuit de cognitief psychologische benadering, zoals die verdedigd wordt door Ausubel.

MEANINGFUL LEARNING

Een kernelement uit de cognitieve psychologie is de idee van een cognitieve structuur. Er wordt van uitgegaan dat alle binnenkomende informatie in het geheugen wordt opgeslagen als een georganiseerd geheel van kennis: een cognitieve structuur. Deze grondgedachte wordt binnen de wiskundedidactiek vrij algemeen aanvaard, al gebruikt men soms andere benamingen. Van Hiele spreekt van een 'relatienet'. Skemp geeft de voorkeur aan 'schema's'.
Zinvol leren wordt in deze conceptie gezien als het leggen van relaties tussen nieuwe kenniselementen en de bestaande cognitieve structuur (waarbij de bestaande cognitieve structuur soms ook verandert).
Ausubel (1968) betoogt dat aan een aantal voorwaarden voldaan moet zijn, wil er een kans zijn op zinvol leren ('meaningful learning').
Er moet sprake zijn van *logische zinvolheid* van de leerstof. De leerstof moet in principe op een zinvolle niet-arbitraire wijze met andere kennis verbonden kunnen worden. Dat wil echter nog niet zeggen dat de leerstof ook aansluit op de kennis van een willekeurige leerling.
Er is alleen sprake van *potentiële zinvolheid* van de leerstof voor een

bepaalde leerling, als de leerstof zinvol is èn aansluit bij de bij de leerling aanwezige cognitieve structuur.
Tenslotte dient er een *intentie tot zinvol leren* aanwezig te zijn. De leerling moet gericht zijn op begrijpen, op het leggen van verbanden. Ausubel constateert dat het daar nogal eens aan ontbreekt, doordat de leerlingen zijn ingesteld op instrumenteel leren. Hij zoekt de verklaring daarvoor in het onderwijs en noemt een aantal mogelijke oorzaken:

- er worden te hoge eisen gesteld aan de wijze waarop de antwoorden geformuleerd moeten worden;
- de potentiële zinvolheid ontbreekt herhaaldelijk, waardoor de leerlingen na een aantal mislukkingen kiezen voor het leren van regels;
- de sfeer in de klas is zodanig dat de leerlingen liever hun onbegrip verbergen, dan om hulp vragen.

Bovenstaande zaken worden soms niet opgemerkt doordat de leerlingen een grote handigheid ontwikkelen in het ophouden van de schijn door het hanteren van een verbalisme.
Zinvol leren gaat niet vanzelf. De leerstof moet erop ingericht zijn en de leerkracht en de leerlingen moeten erop ingesteld zijn. Het leren zelf kan dan gezien worden als het uitbreiden en veranderen van de cognitieve structuur van de leerling, wat een actief proces van de kant van de leerling vergt.

DE BETEKENIS VAN CONTEXTEN

We kunnen ons nu afvragen, welke de relatie is tussen het realistisch reken-wiskundeonderwijs, dat zich kenmerkt door progressief mathematiseren en het gebruik van contexten, en de ideeën rond meaningful learning.
Wel, in het voorgaande noemden we enkele voorwaarden voor zinvol leren; deze voorwaarden kunnen in verband gebracht worden met het realistisch reken-wiskundeonderwijs.
Als eerste voorwaarde noemt Ausubel de logische zinvolheid. Door de leerstofopbouw via progressief mathematiseren is deze logische zinvolheid gewaarborgd.
Aan de tweede voorwaarde van aansluiten bij de cognitieve structuur van de leerling is ook voldaan als de leerling zelf zijn kennis langs deze weg construeert. De essentie van het progressief mathematiseren is juist dat de leerling zijn/haar eigen aanpakken gedurig verbetert en zijn/haar kennis uitbouwt.
De contexten kunnen daarbij een belangrijke rol spelen, omdat de betekenis

die de contexten aan de leerstof verlenen de aansluiting bij de cognitieve structuur van de leerling bewerkstelligen. Bovendien kunnen de contexten de leerlingen motiveren 'in te stappen', zodat het gepresenteerde probleem hun eigen probleem wordt. Daarmee leveren de contexten ook een wezenlijke bijdrage aan de derde voorwaarde, de intentie tot zinvol leren.
Opgemerkt kan worden dat contexten op twee manieren 'betekenis geven' aan de leerinhoud. In de eerste plaats kan de context betekenis geven aan de opdracht; zo kunnen oppervlakteprobelemen aangeboden worden waar het woord oppervlakte niet gebruikt wordt, omdat uit de context duidelijk wordt waar het om gaat. In de tweede plaats kan het begrip 'oppervlakte' langs deze weg gevormd worden voordat de term gebruikt wordt. Het moment dat de naam - als label - verbonden wordt aan het begrip dat zich al doende ontwikkeld heeft vormt dan de afsluiting van het leerproces. (Dit in tegenstelling met een leerstofopbouw, waar begonnen wordt met het geven van een definitie.)
Nu is van Ausubel bekend dat hij veel nadruk legt op het voorbereiden van de leerling op hetgeen geleerd moet worden m.b.v. 'advance organisers'. Dit betekent echter niet dat hij het 'achteraf' definiëren van begrippen afwijst. (Zie bijv. Ausubel 1968.) Wel acht hij een probleemgestuurde opbouw in veel gevallen minder efficiënt, dan het gebruik van advance organisers. Het is echter de vraag of het gebruik van advance organisers in het wiskunde onderwijs uitvoerbaar is. (2)
Whitney (1985;134) toont aan de hand van een voorbeeld wat zijns inziens de beste volgorde is: ".. the meaning comes first, the language after,.."
In veel gevallen is het ook niet zinvol te beginnen met een omschrijving, omdat het niet gaat om het leren van geïsoleerde begrippen, maar om het leren opereren met een stelsel van samenhangende begrippen.
De hiervoor beschreven opvatting van onderwijzen en leren kan ook uit een onderwijsfilosofisch standpunt verdedigd worden: "De leerling moet (kunnen) begrijpen wat hij/zij aan het doen is." Whitney voegt daar een attitude-aspect aan toe: De leerling moet zich verantwoordelijk voelen voor het antwoord. Het voorgaande ligt daarin besloten, want de leerling moet zich dan ook verantwoordelijk kûnnen voelen voor het antwoord.

Samenvattend zouden we het gebruik van contexten willen zien als een exponent van een visie op wiskundeonderwijs die stoelt op het idee van wiskunde als menselijke activiteit. Dat betekent dat je kinderen serieus wilt nemen en dat recht gedaan wordt aan de psychologische uitgangspunten voor 'meaningful learning' , door steeds uit te gaan van de eigen aanpakken, de eigen kennis en vaardigheden van de leerlingen. Daarbij past een proces van progressieve mathematisering, waarbij de leerlingen gestimuleerd worden eigen oplossingen te reflecteren. Essentiëel is tenslotte dat de leerlingen zich niet alleen realiseren dat ze voor de beoordeling van de juistheid van de antwoorden niet afhankelijk zijn van het oordeel van de leerkracht, en dat ze ook leren zelf de verantwoordelijkheid van de antwoorden te nemen.

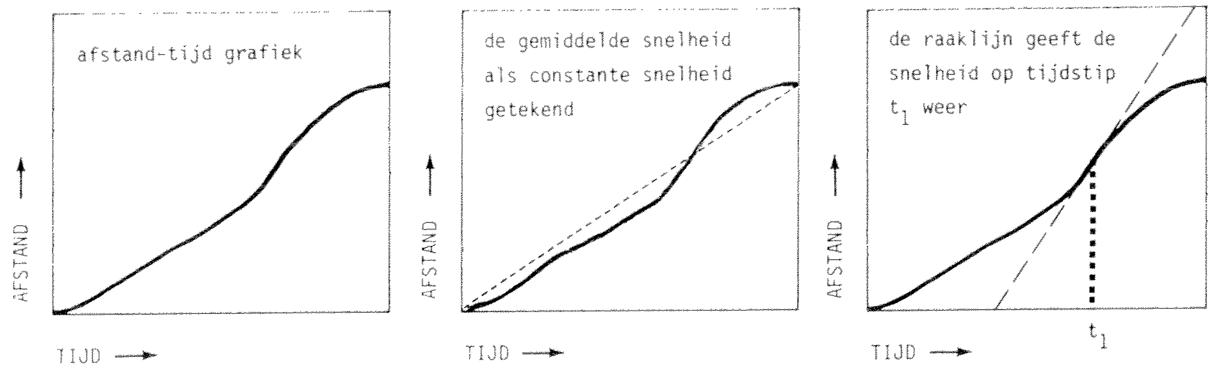
WISKUNDE ALS CONTEXT

Deze kenmerken van realistisch reken-wiskundeonderwijs zijn o.i. ook overdraagbaar naar wiskundeonderwijs waar de problemen die aangeboden worden een puur wiskundige inhoud hebben. Het mathematiseren kan tenslotte ook betrekking hebben op de wiskunde zelf.
Wanneer we de historie van de wiskunde bezien blijkt wel dat daar een chronologische volgorde is: het mathematiseren van een wiskundige inhoud volgt op het verwerven van die wiskunde via het mathematiseren van de werkelijkheid. Er wordt als het ware steeds meer afstand van de werkelijkheid genomen en de wiskunde wordt een doel op zich.
Als voorbeeld kan gedacht worden aan de ontwikkeling van de driehoeksmeting, die eerst beoefend werd als een praktische kundigheid en die later (bijvoorbeeld door de Pythagoreërs) als wetenschap om de wetenschap bedreven werd. Het lijkt zinnig in het onderwijs eenzelfde volgorde aan te brengen. Dat wil zeggen, de wiskundige kennis zelf pas tot onderwerp van onderzoek te maken, als deze wiskunde leerlingen even vertrouwd is als de eerder gebruikte reële contexten. Waar het om gaat is dat de opdrachten en de gehanteerde begrippen betekenis hebben voor de leerlingen, zodat de leerlingen eigen aanpakken en eigen kennis tot ontwikkeling kunnen brengen.
We zullen dit toelichten met een voorbeeld.

DE AFGELEIDE VAN EEN FUNCTIE

In contextrijk reken-wiskundeonderwijs kan de relatie tussen tijd, afstand en snelheid verkend worden met afstand-tijd grafieken. De richting (steilheid) van de grafiek is dan een maat voor de snelheid (zie fig. 2).
Daarnaast zullen in het realistisch (reken-)wiskunde onderwijs nog tal van andere verbanden grafisch voorgesteld worden. Steeds kan het stijgen of dalen dan realistisch geïnterpreteerd worden, als mate van verandering: snel of langzaam stijgende/dalende kosten, temperaturen etc.

Fig. 2. Afstand-tijd grafiek.



Op een gegeven moment moet echter de overstap naar de formele wiskunde gemaakt worden. In een meer formele wiskundige benadering, wordt het stijgen en dalen van *functies* beschreven met de *afgeleide* van een functie. De afgeleide wordt dan gedefiniëerd als $f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0} (f(x+\Delta x)-f(x))/\Delta x$.
Voor een aantal standaardfuncties kan de afgeleide met behulp van deze definitie bepaald worden. Bijvoorbeeld $f(x)=x^2$ levert
$f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0} ((x+\Delta x)^2-x^2)/\Delta x = 2x$.
Deze formele benadering kan aangezet worden vanuit het verkennen van functies als wiskundig fenomeen (3). In het practicum op de najaarsconferentie hebben we laten zien dat hiervoor ook gebruik gemaakt kan worden van een computerprogramma (4).
Dit computerprogramma biedt de leerling de mogelijkheid, de grafiek van een functie (bijv. $f(x)=x^2$) te laten tekenen. Vervolgens kan een bepaald punt op de grafiek 'onder de loupe genomen worden', door de omgeving van dit punt op een andere schaal af te beelden. In de meeste gevallen zal het zo uitvergrote stuk van de grafiek meer op een rechte lijn gaan lijken, naar mate de vergrotingsfactor groter is (zie fig.3).

Fig. 3. Vergroting.

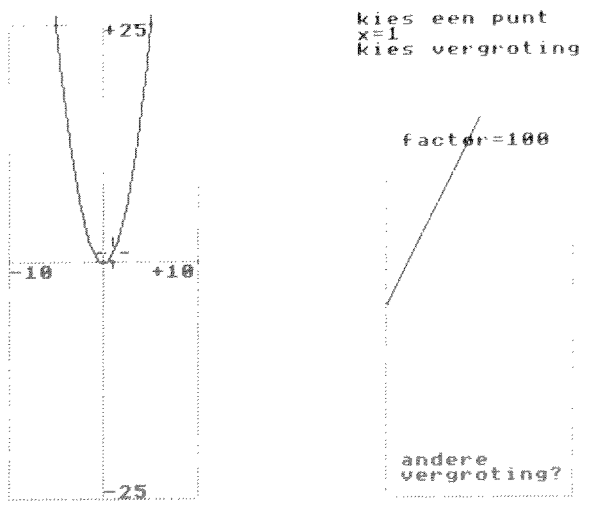
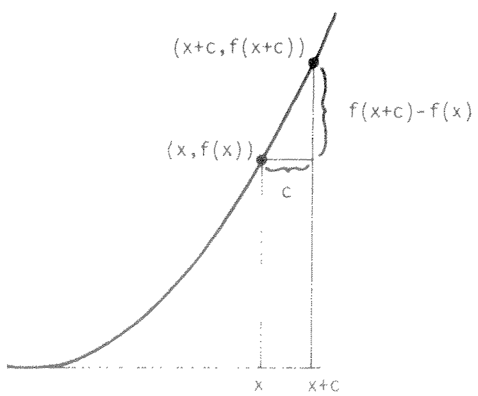


Fig. 4. Richtingscoëfficiënt.



Het beoogde leerproces kan begrepen worden vanuit hetgeen hiervoor gezegd is over progressief mathematiseren en zinvol leren. In beide benaderingen wordt centraal gesteld, dat je uitgaat van inhouden die voor de leerlingen betekenis hebben (aansluiten bij hun cognitieve structuur). Hier hebben de concepten grafiek, functie en afgeleide ('steilheid') een brede inbeddeing gekregen, vóór deze formalisering gestart wordt.
Met het computerprogramma kunnen de leerlingen deze concepten nu verder uitdiepen. Duidelijk wordt dat de steilheid bepaald wordt door de richting van een rechte lijn door twee dichtbij elkaar gelegen punten op de kromme. Middels het vergroten ontdekt de leerling dat de richting van de grafiek in een bepaald punt des te preciezer vastgesteld kan worden, naar mate die twee punten dichterbij elkaar liggen (c.q. de vergrotingsfactor groter is). De rechte lijn die je ziet als je een deel van de grafiek vergroot, kun je associëren met de rechte lijn door twee dichtbij elkaar gelegen punten $(x,f(x))$ en $(x+c,f(x+c))$. De verhouding $(f(x+c)-f(x))/c$ geeft dan de richtingscoëfficiënt van deze lijn (zie fig. 4).
Zodra de leerling inziet dat de richting van de lijn door de punten $(x,f(x))$ en $(x+c,f(x+c))$ bepaald wordt door deze richtingscoëfficiënt, kan de raaklijn, als rechte door twee zeer dichtbij elkaar gelegen punten geïntroduceerd worden.
In het tweede deel van het programma tekent steeds de raaklijn in een punt dat langs de grafiek beweegt. Tegelijkertijd wordt de afgeleide, i.c. de richtingscoëfficiënt, geplot. (Zie fig. 5.)

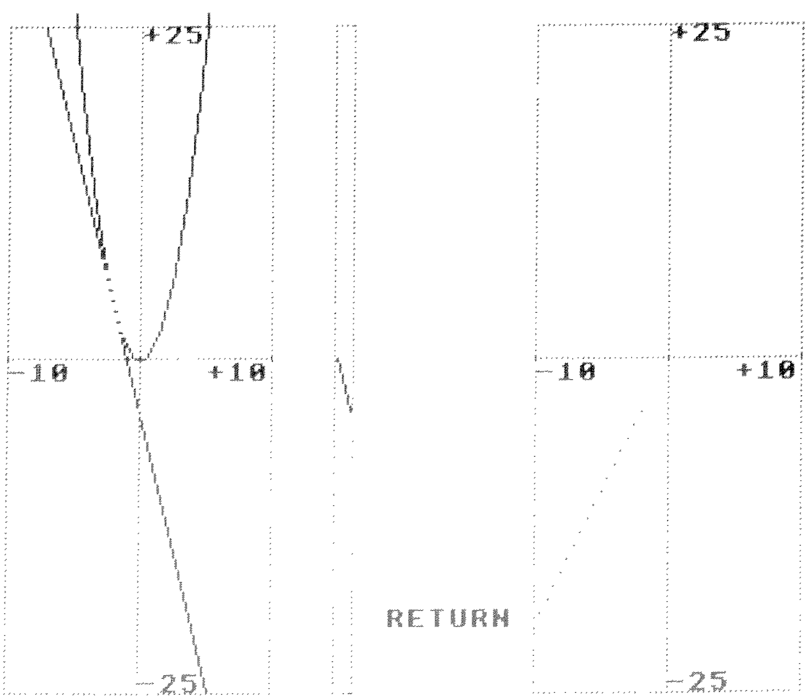


Fig.5. Afgeleide.

Aldoende krijgt de leerling steeds meer greep op het fenomeen en na verloop van tijd zal hij/zij kunnen voorspellen hoe de grafiek van de afgeleide van een bepaalde functie eruit ziet. Om tot een formele definiëring van het begrip afgeleide te komen, dient de tekenprocedure tenslotte expliciet algebraïsch geïnterpreteerd te worden.

BESLUIT

De hier geschetste opbouw is o.i. consistent met de gedachte achter het gebruik van contexten in het realistische reken-wiskundeonderwijs. Het verschil is alleen dat de wiskundige inhoud de plaats van de reële context heeft ingenomen.
Ten overvloede zij erop gewezen dat het gebruik van zulke computerprogramma's ingebed dient te zijn in een uitgebreidere leergang, waarbinnen recht gedaan wordt, aan de reële contexten, aan het reflecteren op de uitgevoerde activiteiten en aan het algebraïsche aspect.

Noten:

1. De autobussenleergang wordt o.a. beschreven in leerplanpublicatie 2; IOWO; Utrecht; 1975.
2. In dit verband verwijzen we naar Tall (1985;105):
"In the theory of 'meaningful learnig' (Ausubel et al. 1978) describes an 'advance organiser' as 'introductory material presented in advance of and at a higher level of generality, inclusiveness and abstraction than the learning task, explicitly related both to existing relevant ideas in the cognitive structure and to the learning task'. Such organisers, by definition, require the learner to have relevant higher level structure than the task itself. The introduction of calculus, in common with other major steps in mathematics, breaks new ground and a different kind of organising principle may be more appropriate."
3. Zie ook : Kindt, M.; Differentiëren 1; IOWO; Utrecht; 1980.
4. Het op de conferentie gebruikte computerprogramma is door ons ontwikkeld naar analogie van de programma's die Tall ontworpen heeft. (zie literatuurlijst)

Literatuur:

Ausubel, D. P.; Educational Psychology, a cognitive view; Holt, Rinehart & Winston inc.; New York; 1986.

Freudenthal, H.; Geometry Between the Devil and the Deep Sea; Educational Studies in Mathematics; 1971, 3, 413-435.

Tall, D. O.; Using Computer Graphics as Generic Organisers for the Concept Image of Differentiation; in Streefland, L.; Procedings of the Ninth International Conference for the Psychology of Mathematics Education, Vol.1; OW&OC; Utrecht; 1985.

Whitney, H.; Taking Responsebility in School Mathematics Education; in : Streefland, L.; Procedings of the Ninth International Conference for the Psychology of Mathematics Education, Vol.2; Utrecht; 1985.