

GRAFISCHE PROBLEMEN EN PROBLEMEN GRAFISCH OPLOSSEN

Hans Krabbendam

Jan Speelpenning

SLO, Enschede

Functies van grafieken.

Grafische weergaven -we zullen ze verder voor het gemak gewoon grafieken noemen- spelen in het dagelijks leven een belangrijke rol. Veel informatie in kranten, folders, boeken uit andere schoolvakken wordt vastgelegd en aangeboden met sektordiagrammen, histogrammen en lijngrafieken.

De grafiek heeft dan een sterk communicatieve functie, als weergever en producent van informatie. Een doel van het reken/wiskundeonderwijs is om die grafieken te kunnen lezen en begrijpen. Dan komt de boodschap over.

Daarnaast kan een grafiek ook een belangrijke functie hebben in de oplossing van een probleem: "Even een grafiekje maken, dan kan ik een beetje zien hoe het in elkaar zit en misschien weer wat verder komen". Naast het visualiseren van gegevens doe je dan ook iets met de grafiek. Het is dan één van de wiskundige instrumenten geworden.

Globaal en lokaal.

Hoewel grafieken bij uitstek geschikt zijn om grote hoeveelheden "getallige" informatie op te slaan en overzichtelijk weer te geven is het zeker niet altijd zo dat die informatie ook het belangrijkste is.

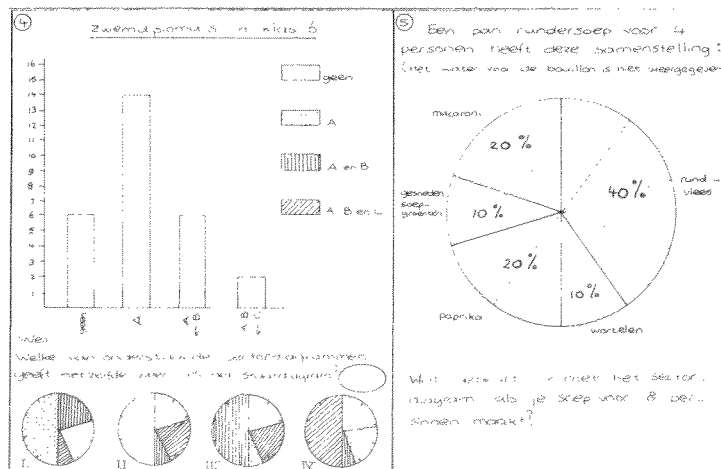
De opbouw van een grafiek zorgt er juist ook voor dat globale kenmerken zichtbaar worden: "zo is het gebeegaan", "toen is er iets gebeurd" of "zo zal het wel verder gaan". Juist het op deze manier weergeven van paren van gegevens (bijv. vanuit een tabel) maakt de grafiek tot een krachtig middel omdat hij extra informatie geeft die met andere middelen (bijv. een tabel) veel moeilijker zichtbaar te maken zou zijn.

Omgekeerd, afhankelijk van wat er op dat moment nodig of beschikbaar is, is het ook mogelijk een verloop van een verschijnsel, zonder veel kwantitatieve gegevens weer te geven en pas later, indien nodig, te verfijnen naar een grotere, meer lokale, exactheid.

Soorten.

Een grafiek is altijd een grafiek van "iets" en dat "iets" is dan een verschijnsel of verband dat bedacht is of in de werkelijkheid voorkomt.

Veel verbanden zijn statistisch van aard en representeren gegevens die vaak door meten, tellen en dergelijke verkregen zijn.



Binnen die statistische grafieken kunnen we nog een in dit kader belangrijke soort onderscheiden, namelijk de zogenoemde "verhaaltjes grafieken", waarbij de gegevens veelal globaal zijn, afkomstig uit de eigen ervaring en waarbij de tijd altijd impliciet of expliciet een rol speelt.

JAN, JANS EN DE KINDEREN 16

Hier zie je de hele strip. Lees 'm eerst maar 's.

Teken zelf een grafiek van het verloop van de temperatuur van het douche-water. Overleg voor je gaat tekenen eerst in je groepje hoe de grafiek er ongeveer moet gaan uit zien.

Fysische verbanden zijn van een ander soort. Ze geven eenduidig bepaalde verbanden ($k = m \times a$; $s = v \times t$) weer. Vaak spelen ze een rol in een model van de werkelijkheid.

HIJZEN

Huiskranen kunnen enorme vrachten tillen en verplaatsen. Sommige wel tot 8000 kg! Je kunt je wel voorstellen dat aan het einde van de giek (zie foto) minder zware dingen mogen hangen dan aan het begin. Ook huiskranen kunnen onvallen! Daarom moet de kraandrijver dit ook goed uitkijken dat hij niet per ongeluk te zware dingen té ver probeert te tillen of verplaatsen. Om dat te voorkomen voorkomen zich er op de giek van de huiskraan bordjes bevestigd. Daarop kan de kraandrijver lezen hoeveel kg hij op die plaats nog mag tillen. Op de foto kun je een paar van die bordjes zien. Hier zijn er vijf overgenomen:

15 M	21 M	38 M	45 M	54 M
8000 KG	5200KG	2500KG	2000 KG	1600 KG

Hoe zou je er achter kunnen komen hoever een betonplaat van 1500 kg nog verplaatst mag worden? Proberen jullie eens een schatting te maken. Gebruik de informatie van de bordjes.

a. We denken: minstens.....meter; zeker niet méér danmeter.

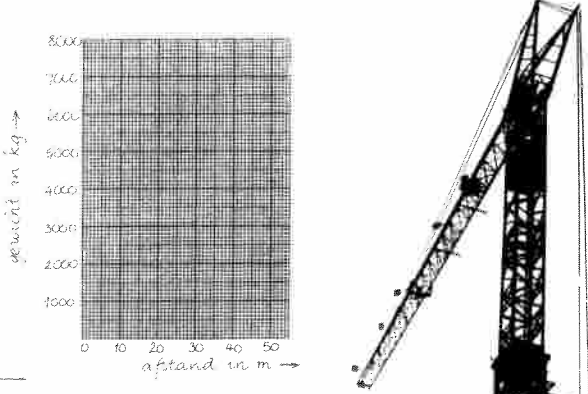
Jullie zullen zien dat het schatten gemakkelijker gaat als je een grafiek heeft ontworpen. Dan kun je het ongeveer 'zien', zonder dat je hoeft te rekenen.

Vandaar:

b. Teken de gegevens van de bordjes in het rooster.

c. Als je door je oorspronk naar de vijf punten in het rooster kijkt, dan kun je zien dat ze op een (kromme) lijn liggen. Teken die lijn.

d. Hoe ver mag, volgens jullie grafiek, 1500 kg ongeveer verplaatst worden?



Tenslotte kunnen we nog wiskundige verbanden onderscheiden. Ze zijn bedacht (bijv. $f(x) = 3x + 5$, of de tarieven van het gasbedrijf). De grafiek speelt dan een bepaalde rol in het onderzoeken of visualiseren van die verbanden. "Onderzoek de functie $f(x) = 3x^2 + 5x + 6$ ".

Grafische weergaven in basisschoolmethoden.

Met het vorige in gedachten kunnen we naar basisschoolmethoden gaan kijken en de vraag stellen op welke manier(en) ze daar nu eigenlijk gebruikt worden en waarom?

Op deze plaats kunnen we uiteraard niet meer doen dan een globale indicatie geven.

Voor de duidelijkheid gebeurt dat puntsgewijs in conclusievorm:

- Als grafieken gebruikt worden worden ze geplaatst in konteksten, die meestal getallig van aard zijn en meestal verzonnen. Ze sluiten veelal wel redelijk aan bij mogelijke reële situaties.
- Het gebruik van globale grafieken of nadruk op globale kenmerken komt vrijwel niet voor.
- Een grafiek treedt meestal op aan het begin van een probleem, als een soort zoekplaatje waar de informatie uitgehaald moet worden. Meestal betreft het dan sektordiagrammen en histogrammen. Lijngrafieken komen in mindere mate voor.
- Het tekenen van grafieken door leerlingen zelf komt veel minder sterk aan bod en als het al gebeurt is dat vanuit tabellen of eventueel -maar zeer weinig- vanuit door leerlingen verzamelde gegevens. Vrijwel nooit spelen ervaringen van kinderen daarbij een rol (zoals bijvoorbeeld bij Jan, Jans en de kinderen).
- In de gevallen waar verhaaltjes grafieken voorkomen gebeurt dat binnen konteksten zoals fietsen, hardlopen, e.d., waarin tijd en afstand de variabelen zijn.
- De grafiek als middel om een probleem op te lossen komt nergens aan de orde.
- Slechts heel weinig wordt gewezen op slecht of misleidend gebruik van grafieken, zoals bijv. veelvuldig gebeurt in de reclame.

Grafieken in het voortgezet onderwijs.

Als je het huidige wiskundeprogramma in de onderbouw van het Voortgezet Onderwijs op grafieken en grafiekengebruik doorlicht dan kom je tot een zelfde beeld als bij het basisonderwijs.

Naast enige grafische weergave van, meest statistische, informatie bij kansrekening en statistiek komen grafieken voor als plaatjes van wiskundige functies: teken de grafiek van $x \rightarrow x^2 - 4x + 3$; bereken de nulpunten en de top.

Het tekenen van de grafiek heeft nooit tot doel iets te bewijzen of aan te tonen; de grafiek vervult meer de rol van samenvattende tekening van resultaten die op algebraïsche wijze zijn gevonden.

Hoe die situatie ontstaan is weten we niet, maar de historische tendens alles zo exact/formeel mogelijk aan te pakken en vrij te maken van informele methoden zal daartoe wel hebben bijgedragen.

Gelukkig is de laatste jaren het tij enigszins aan het keren; de nieuwe methoden die op de markt zijn gekomen getuigen daarvan, zij het nog wat voorzichtigjes.

Er zijn overigens argumenten in overvloed om grafieken een prominenter plaats in het reken/wiskundeonderwijs te geven.

We noemen er nog enkele, naast eerder genoemde:

- Een grafiek geeft een visualisering van grote hoeveelheden data, van verbanden tussen grootheden, ...
- Een grafiek geeft globale informatie over trends, maxima, limieten etc., maar kan ook exacte informatie bevatten.
- De grafiek en, wellicht beter, het praten over grafieken geeft een

- uitbreiding van je vocabulair die behoefte bestaat bij het beschouwen van verbanden en samenhangen: onze taal beschikt nauwelijks over woorden die iets over de aard van verbanden zeggen.
- Veel problemen (ook traditionele) zijn met behulp van grafieken op te lossen, soms zelfs veel gemakkelijker, maar zeker vaak inzichtelijker.

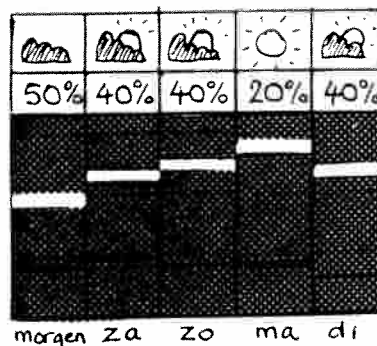
$$(4-16) \neq (4-12) + (12-16)$$

Reken/wiskundeonderwijs is gebaat bij zoveel mogelijk vanuit basisonderwijs voorbereide en doorlopende lijnen naar voortgezet onderwijs. De vraag is hier hoe dat realiseerbaar is voor de grafiekenlijn. Om dit te kunnen beantwoorden schetsen we hier in grote trekken het begin van de "VERBANDEN-GRAFIEKEN & FUNCTIES-lijn" zoals we die hebben uitgegoid. Wellicht luidt het antwoord dat het beginpunt van die lijn (nu eerste klas v.o.) zonder veel problemen naar voren geschoven kan worden ...

Centraal in de V-G & F-lijn staan verbanden, of, beter gezegd: het leggen, ontdekken, beschrijven, en vooral het gebruiken van verbanden. Om de abstractie "verband" bespreekbaar te maken is een taal nodig: een taal die zich daar heel goed voor leent is grafiekentaal. Het eerste pakketje (GRAFIEKENTAAL) uit V-G & F-lijn houdt zich dan ook bezig met het exploreren van verbanden door middel van het ontwikkelen van zo'n taaltje.

GLOBAAL KIJKEN

De eerste grafiek die aan de leerlingen wordt voorgelegd is deze. De grafiek waarmee het NOS-journaal de weersvoorspelling voor de komende dagen illustreert. De grafiek maakt het mogelijk in enkele seconden de voorspelling in je op te nemen, waarbij in het algemeen niet de "getallige" informatie blijft hangen maar de globale: "de komende dagen steeds beter".



Het is juist dit soort globale informatie over verbanden die velen uit eigen ervaring kennen en een waardevol aanknopingspunt geeft om exacter soorten verbanden te onderscheiden. Starten vanuit eigen ervaring(en) geeft de mogelijkheid het communi- ceren van data centraal te stellen en niet de data zelf; bovendien is verificerbaarheid van de resultaten als het ware ingebouwd.

HOCKEY-HUMEUR 19

Gisteren was het eindelijk zover.
Hockeyliefhebbers konden hun hart ophalen.
Nederland tegen Duitsland in de finale van de wereldkampioenschappen hockey voor dames.
Marie-José was in het stadion aanwezig.
Hier zie je een grafiek die het verloop van haar humeur tijdens de finálwedstrijd weergeeft.
Proberen jullie de grafiek te verklaren.

humeur →

heel goed

heel slecht

begin wedstrijd einde wedstrijd

Enkele voorbeelden uit GRAFIEKENTAAL:

BADKUIP OP PAPIER (2) 11

Probeer uit de grafiek te lezen wat er gebeurd is. Probeer er een zo logisch mogelijk verhaal bij te verzinnen.

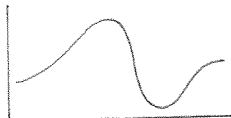
Frits gaat een bad nemen. Hij zet de kraan aan. Na een tijdje voelt hij het water en merkt hij dat het 's veel te warm is geworden. Dus: koude kraan oék open. Dan gaat de telefoon. Een oude vriendin belt. Hij vergeet totaal waar hij mee bezig was, zó leuk is het om haar weer te spreken. Voelen jullie al nattigheid?

Teken de grafiek die het verloop van de waterhoogte in Frits' Badkuip aangeeft.

Teken ook de grafiek die hier bij'hoort. De 'gebeurtenissen' staan in de wolkjes geschreven. We beginnen met: warm-dicht, koud-dicht en afvoer-open.

De grafieken hier geven globale informatie over de processen; geen kwantitatieve. Bij HOCKEY-HUMEUR vanwege de onmogelijkheid humeur te kwantificeren, bij BADKUIP vanwege het ontbreken van een exacte schaalverdeling.

Later in het pakketje komt de verdeling van de assen, en daarmee kwantificeerbaarheid aan de orde.



Erna, Jeroen, Sjoerd en Kim hebben alle vier een verhaaltje bedacht dat bij deze grafiek zou kunnen horen.

Erna: Ik heb dit het weg een mooie gaat dat lekker ligt te rennen in de stad. 's Middags 's heel warm. Plotseling wordt daar zaden een oerwoud worden weg naar heen. Soms de draagt alom gauw af en gaat naar verder met rennen.

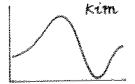
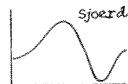
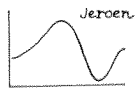
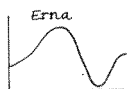
Jeroen: Mijn verhaaltje gaat over een bus die naar de stad rijdt. De stoppen steeds meer mensen in. In de stad stopt bijna iedereen uit, want er is kerstmis. De bus rijdt verder en er komen weer naar mensen bij.

Sjoerd: Ik heb een heel wat andere gedacht. Bij mij gaat het over mensen die op vakantie zijn. In een vakantie-keuken gaat dit gaat ook bij de niemand-misserspot. Later stond de de kant dat er steeds meer mensen gaan kijken. Nijkt mij ik kerstlike leuk.

Kim heeft nog een ander verhaaltje.
Verzinnen jullie 's waar Kim misschien aan gedacht heeft.

Kim:

Bij elk van de verhaaltjes zou er wat bij de assen van de grafiek gezet moeten worden. Het ene verhaaltje speelt zich af in een paar minuten terwijl het andere wel over een heel jaar gaat.
Ook bij de verticale as moet overal wat bij gezet worden.
Bedenken jullie wat dat steeds zou kunnen zijn.
Let ook op de grootte van de getallen.

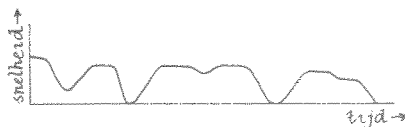
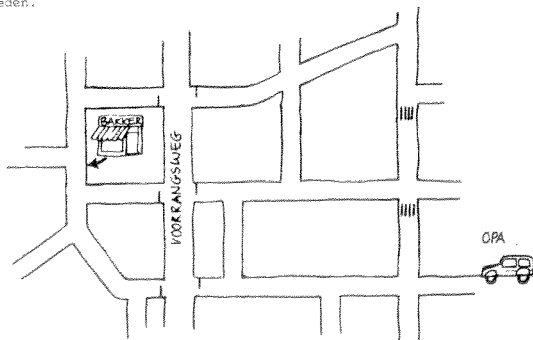


Opa is op weg naar de bakker. Daar verkopen ze van die heerlijke gewilde koeken waar de kleinkinderen zo dol op zijn.
In de plattegrond hieronder zie je Opa rechtsonder aan komen rijden.

Jullie weten natuurlijk dat auto's (en fietsers!) die een voorrangsweg naderen altijd moeten stoppen.
En dat verkeer van rechts voorrang heeft hoeven we natuurlijk helemaal niet meer te vertellen.

In de grafiek zie je het verloop van de snelheid van Opa. De grafiek begint op het moment dat Opa op de plattegrond verschijnt en eindigt als Opa voor de bakker stopt.

Proberen jullie er maar eens achter te komen via welke route Opa is gereden.



OP TIJD ZIJN

Een belangrijke keuze in GRAFIEKENTAAL is dat de onafhankelijke variabele in de contexten steeds de tijd is. De overweging daarbij is dat je dan in feite maar één grootheid in de gaten hoeft houden; de tijd loopt vanzelf en doet geen rare dingen.

Bovendien zijn zowel de in dit verband belangrijke wiskundige begrippen afhankelijke variabele (grootheid) als onafhankelijke variabele fenomenologisch aan tijd gerelateerd.

Een bijkomend (didactisch) voordeel is dat verbanden een zekere dynamiek krijgen die je in een tijd-nogwat grafiek zichtbaar kunt maken. De grafiek beschrijft een proces en als je wat aan het proces verandert, dan verandert de grafiek mee. Diè veranderingen leiden je naar specifieke kenmerken van verbanden en naar de wijze waarop je die kunt vastleggen en herkennen.

Discussiestellingen.

1. Kinderen van meet af aan "puntsgewijs" met grafieken om laten gaan degradeert de grafiek tot een plaatje van een tabelletje en negeert de globale kenmerken, waarin de grafiek nu juist zo sterk is.
2. De grafiekentaal geeft een onontbeerlijke aanvulling op de gewone taal als je wilt praten over verbanden en met name over de aard van verbanden.
3. Voor zover in basisschoolmethoden aandacht wordt besteed aan grafieken ligt de nadruk op statistische. Binnen de wiskunde in het voortgezet onderwijs wordt hier niet of nauwelijks op voortgebouwd. Alleen andere schoolvakken doen dit. Op deze wijze ontstaat er een breuk tussen de grafische lijn in het

reken/wiskundeonderwijs en het wiskundeonderwijs in het voortgezet onderwijs.

4. Histogrammen met een ongeordend domein kunnen beter vermeden worden, evenals lijngrafieken met een discontinu domein.

Voor dit onderwerp relevante artikelen:

- * Kindt M., Wiskunde waar je warm of koud van wordt, in De achterkant van de Möbiusband, IOWO, 1980.
- * Krabbendam H., Globaal of lokaal, Nieuwe Wiskrant, 1e jrg. nr. 4.
- * Krabbendam H., De taal van grafieken, Nieuwe Wiskrant, 2e jrg. nr. 4.
- * Speelpenning J., Over microcomputers, watermeters, badkuipen en couveuses, Nieuwe Wiskrant, 2e jrg. nr. 4.
- * Streefland L., Grafieken inhoud geven (1), Nieuwe Wiskrant, 3e jrg. nr. 2.
- * Streefland L., Grafieken inhoud geven (2), Nieuwe Wiskrant, 3e jrg. nr. 3.