HOEVEELHEIDSGETAL EN MAAT - DAVYDOV IN 'DE REKENBOOM'

A.Treffers
OW & OC

In het volgende zal een beknopte vakdidactische analyse worden gemaakt van een klein onderdeel van het rekenprogramma, namelijk het getalbegrip i.c. het hoeveelheidsgetal. We doen dit om enkele basisopvattingen van 'Tien voor de basisvorming' wat meer reliëf te geven.[1] En wel speciaal de kernonderdelen B1 en B2, respectievelijk getiteld 'grotere nadruk op toepasbaarheid' en 'heroriëntatie van het aanvangsonderwijs (4-7 jarigen)'. We nemen daartoe de ideeën van Davydov over hoeveelheidsgetal en maat tot object van een analyse, en maken daarna nog enkele opmerkingen over 'De Rekenboom'.[2] Deze nieuwe rekenwiskundemethode, waarvan de boeken en materialen voor het eerste en tweede leerjaar zojuist zijn verschenen, baseert zich op Davydovs ideeën over maat en voegt daaraan nog wat nieuwe elementen toe.

1 *Het maatbegrip bij Davydov*

In de achtergrondinformatie (Handleiding 1) van 'De Rekenboom' lezen we:

'Zo kan ik tien lucifers voor een leerling leggen en afspreken dat 2 lucifers voor 1 worden geteld. Het resultaat zal dan 5 zijn. Het tellen van een veelheid met een afgesproken maat levert een resultaat op dat het hoeveelheidsgetal wordt genoemd.

Samenvattend stellen we vast dat een hoeveelheidsgetal ontstaat als resultaat van het nagaan hoevaak een afgesproken maat op een afgebakende veelheid past.

In formulevorm: hoeveelheidsgetal $= \frac{\textit{veelheid}}{\textit{maat}}$ *.'(p.295)*

Opmerkelijk is hier dat hoeveelheid onder de noemer van maat wordt gesteld, hetgeen op z'n zachtst gezegd voor niet-meetgetallen hoogst ongebruikelijk is.

Zoals reeds aangeduid, is deze omschrijving afkomstig van Davydov.[3] Iemand die in het geval van de 12 lucifers, op de vraag om 1 te geven met één lucifer aankomt, heeft slechts empirisch getalbegrip. Het getal één wordt dan geïdentificeerd met één object: Het is zogezegd object-gebonden en richt zich op een oppervlakkig, zichtbaar en niet-essentieel kenmerk van het getal - aldus Davydov. Iemand die wel theoretisch begrip heeft, zal die vraag beantwoorden met de wedervraag, 'wat is de maat?'

Een nadere uitwerking van dit idee staat in het boekje 'Rekenen'[4] met artikelen van Davydov, Minskaja en anderen.
In tal van onderwijs-leertheoretisch georiënteerde geschriften over reken-onderwijs is op een enkele uitzondering na[5] met instemming of stilzwijgende goedkeuring op Davydovs ideeën over het getalbegrip gereageerd. Van meer vakdidactisch gerichte zijde is wel kritisch op enkele consequenties van deze ideeën voor het voortgezette rekenen ingegaan, namelijk ten aanzien van het vermenigvuldigen[6] en het breuken-onderwijs.[7] Maar wat het aanvangsonderwijs betreft, is het slechts bij een enkele aanduiding van kritiek gebleven.[8] We stellen dit met enige spijt vast. Want ten eerste valt er vakdidactisch heel wat op die opvattingen af te dingen. En ten tweede blijkt dat Davydovs ideeën over maat nu ook in een Nederlandse methode zijn neeggelegd, met alle consequenties vandien voor de onderwijspraktijk.

2 *Kritiek op Davydovs opvattingen over hoeveelheids-maat.*

We bepalen ons hier tot het maatbegrip bij het vaststellen van aantallen. Over het belang van het werken met meetgetallen, waarop talloze reken-didactici uit de vorige en deze eeuw hebben gewezen en waarop ook Gal'perin, Georgiev en later Davydov aansluiten, bestaat er namelijk geen verschil van mening. Maar over het hoeveelheidsgetal, althans over de interpretatie die Davydov daarvan geeft, des te meer.
We sommen straks een serie punten van kritiek op. Maar om het kader waarin onze didactische bedenkingen worden geplaatst goed te kunnen begrijpen, moeten we eerst enkele opmerkingen over de aspecten van het getalbegrip maken.
Reeds de Duitse didacticus Diesterweg (eerste helft 19e eeuw) onderscheidde de volgende aspecten van het getalbegrip die tot de dag van vandaag vak-didactisch gemeengoed zijn;

- het getal als aantal, het kardinaalaspect, duidt op hoeveelheden: 5 knikkers, 25 kinderen ...
- het getal als telgetal, het ordinaalaspect, duidt op het tellen, dus op het aflopen van de geordende telrij, of op het bepalen van het ranggetal: één, twee, drie, vier ...; zij zit in de vierde rij ...
- het getal als meetgetal, het meetaspect, duidt op grootheden: 50 kg, 2 gulden, 7 dagen, ...
- het getal als rekengetal, het rekenaspect, duidt op de formele betekenissen, eigenschappen en regels die voor getallen binnen het (of een) rekensysteem gelden: 2 x 5 (2 is de operator); 2^5 (5 is de macht); 2 + 5 = 5 + 2

(commutatieve eigenschap); 2 x 5 = 10 (rekenregel, inwisselen) ...

- het getal als naamgetal, het coderingsaspect, duidt op bepaalde objecten en hun betekenis: tel. 611611, postcode 3561 GG; a1 - a3;

Welnu , al deze aspecten spelen in het aanvangsonderwijs een rol, en hebben dit sinds mensenheugenis gedaan. Alleen verschilden de accenten nogal eens: in de monografische aanpak van de vorige eeuw moesten van meet af aan alle getalaspecten steeds weer bij ieder getal apart door de kinderen bestudeerd worden, terwijl in de tijd daarvoor vooral het telgetal in het aanvangsonderwijs werd benadrukt, en in de twintigste eeuw krijgt de geleidelijke opbouw van het rekengetal meer aandacht. Soms ook werden bepaalde aspecten overgeaccentueerd en andere verwaarloosd: bij 'Bouman en Van Zelm' stond het 'zuivere' rekengetal voorop; de 'New-Math'-methoden als ook vele mechanistische methoden legden grote nadruk op het kardinaalgetal, verwaarloosden het meetgetal en schonken geen aandacht aan de getallenlijn; het belang van het ordinaalgetal en het tellen is voortdurend een bron van didactische (en filosofische) twist; en zo meer. Maar hoe het ook zij, men kan in z'n algemeen niet stellen dat het getalbegrip in de gangbare rekendidactiek uitsluitend objectgebonden, dus als kardinaalgetal, en via een rigide opvatting van het telobject wordt aangeboden. En dit laatste nu is precies wat Davydov beweert...

1. Davydovs analyse van empirisch en theoretisch getalbegrip geeft een simplistische voorstelling van zaken omtrent het getalbegrip. Ten eerste bindt hij het theoretische getalbegrip al te zeer aan het kardinaalaspect- ik neem zijn terminologie nu maar even over hoewel ik denk dat het onderscheid tussen empirisch en theoretisch ten aanzien van begrippen, en ook wat het denken betreft, moeilijk houdbaar is (althans) binnen de wiskunde. Terwijl er, zoals we gezien hebben, naast dit aantal nog tal van andere aspecten aan het getal kleven. Ten tweede, en daarmee samenhangend, is het getal in het aanvangsonderwijs helemaal niet zo object-gebonden en opgesloten als Davydov doet voorkomen. Dat geldt uiteraard voor het meetgetal, maar ook het rekengetal ('3 keer 4' bijvoorbeeld) heeft een operator-aspect dat niet object-gebonden is, en het naamgetal is evenmin het resultaat van object-bepaalde telling. En ten derde - en dat is wellicht de meest zwaarst wegende bedenking - is Davydovs onderwijs-remedie voor die vermeende object-binding van het getal in de vorm van een variabele uitschep-

maat voor het bepalen van hoeveelheden noch theoretisch noch onderwijs praktisch hecht te funderen - hetgeen we in de volgende kritiekpunten zullen proberen aan te tonen.

2. Bij de kwestie van de maat-bepaling bij hoeveelheden valt allereerst de onnatuurlijke vraagstelling op. Bij Davydor (zie (3),p.108) is dat 'Geef me één'. En in het startprobleem van 'De Rekenboom' laat de leerkracht 6 blokjes zien en vraagt 'Hoeveel tel jij hier?' Op het antwoord 6 volgt dan: 'maar je kunt ook 3 zeggen' ... Op zulke onbepaalde, suggestieve vragen probeer je er (al dan niet met theoretisch getalbegrip begiftigd zijnde) maar het beste van te maken. En als dan blijkt dat 3 slaat op 3 torentjes van elk 2 blokken, ben je geneigd op te merken waarom daar dan niet direct naar wordt gevraagd.
Je kunt toch in alle gevallen vragen hoeveel groepjes van zoveel er zijn? Of iets eenvoudiger: hoeveel groepjes er volgens dat 'model' zijn te maken? Het betreffende antwoord slaat in dat geval op het aantal groepjes objecten (met die- en die kenmerken) en niet op het aantal objecten. In het ene en in het andere geval gaat het dan wel om verschillende verzamelingen c.q. om verschillende vragen. Of om het probleem van de 10 lucifers nog eens te nemen: 5 groepjes van 2, is iets anders dan 10 van 1, of 20 van ½ (!).
Kortom, de vraagstelling van de maat bij hoeveelheden is in zichzelf triviaal omdat je ofwel precies vraagt wat je bedoelt, of per definitie onduidelijk bent omdat je dat nalaat. En als je wilt dat de telling niet te zeer object-gebonden is, vraag je naar samengestelde groepjes - alleen kun je die na de samenstelling toch ook weer als nieuwe 'objecten' zien. (Bij meetgetallen, bijvoorbeeld volumes, geld, etc. ligt dat anders, maar daarover zouden we het hier niet hebben, omdat het belang daarvan geen twistpunt is).

3. In 'De Rekenboom' reciteren de kinderen het rijmpje 'Zeg me voor het te laat is, eerst wat de maat is'.
Maar wat is maat eigenlijk en wat levert het meten ermee op?
Stel bijvoorbeeld, we hebben 16 blokjes en we meten met een maateenheid bestaande uit 3 blokjes, wat is dan het resultaat?
'De kinderen die met die maat gingen werken stelden vast dat ze het getal 5 en nog een restje kregen. Ze concludeerden er zelf uit dat ze het afzonderlijke blokje niet erbij konden tellen: 'je kan niet zeggen dat het zes is - dat is toch niet volgens de maat'. (Minskaja in (4), p.69)

Het antwoord is dus 5. Meten we 17 blokjes met deze maat dan zou het antwoord eveneens 5 zijn. Samen maakt dat 10. Maar voegen we de hoeveelheden bij elkaar dan wordt het antwoord 11 ... Kortom als de resten worden 'weggegooid' krijgen we problemen. (In 'De Rekenboom' gebeurt dat overigens probleemloos) Dan maar breuken introduceren? Wat betekent dan $\frac{1}{3}$ maateenheid in 't zojuist gegeven voorbeeld? Is het $\frac{1}{3}$ van drie blokjes, oftewel 1 blokje, of 3 keer $\frac{1}{3}$ blokje of nog een ander samenstel? Het antwoord op deze vraag is van cruciaal belang voor het kunnen samenstellen van resten tot maateenheden. Er is trouwens nog een derde mogelijkheid, namelijk alleen maateenheden toelaten die precies 'passen'. Maar dan rijst het probleem hoe je die bij grotere hoeveelheden (en vooral grotere priemgetallen) in het aanvangsonderwijs kunt bepalen.
Wat zeggen Davydov en Minskaja over deze kwesties? Vrijwel niets. De restproblematiek wordt meestal zorgvuldig gemeden en als hij zich voordoet wordt er niet nader op ingegaan. Toch doen zich bij het vergelijken, wat Davydov wel uitvoerig bespreekt, ook al dergelijke problemen voor. Juist ook en vooral door de problematiek die we onder punt 1 bespraken. Het zojuist genoemde voorbeeld kan dit verduidelijken: indien we de verzameling van zestien blokken gemeten met maat drie, vergelijken met die van zeventien met maat drie dan is er sprake van gelijkheid (evenveel torentjes van drie). Maar als we van daaruit zorgeloos overstappen naar de verzamelingen van de afzonderlijke blokken, dan geldt die gelijkheid niet meer. Davydov en Minskaja nu maken dit essentiële onderscheid niet en komen tot allerlei 'logische' uitspraken over transiviteit van gelijkheid die in feite niet geldig zijn bij het werken met resten.
Over de maatkwestie bij optellen en aftrekken merkt Minskaja op: 'Deze vragen die hier niet het onderwerp van onze analyse zijn, verdienen een apart onderzoek'. (in (4) p. 98)
Maar indien men zich verder in het gebied van het rekenen moet begeven, zonder zo'n 'apart onderzoek' te kunnen afwachten, zoals bijvoorbeeld bij het ontwikkelen van een methode het geval kan zijn, en men wil het aangeduide spoor verder blijven volgen, dan staan er nog meer problemen te wachten.

4. Bij bijvoorbeeld het vergelijken (en dus ook bij het aftrekken en optellen) zal naar gelijke maten moeten worden toegewerkt (we gaan er nu maar vanuit dat er geen resten zijn!). Als de ene blokkenverzameling een aantal van 6 bevat, gemeten met een maat van 3 blokken, en de andere een aantal van 4, gemeten met een maat van 5, dan kan niet zonder meer op de getallen 6 en 4 worden afgegaan. Bij 9 van 2, en 10 van 2 valt er echter wel direct iets te concluderen.
In 'De Rekenboom' wordt dan ook op p.133 terecht geschreven 'je mag alleen vergelijken wanneer de maat gelijk is'.
Maar wat is gelijke maat bij minder homogene, maar wel meer natuurlijke verzamelingen dan de genoemde blokkenverzamelingen waartoe Davydov zich als 't om hoeveelheden (dus niet - meetgetallen) gaat vrijwel uitsluitend beperkt?
Om de problematiek van gelijke maat duidelijk te maken hoeven we trouwens niet eens zo ver van de blokkenverzameling weg te gaan. Stel we hebben vier torentjes van 1 blokje, en drie van 2 blokjes hoog. En de vraag luidt: waarvan zijn er meer, van de lage of de hoge torens? Wat is in dit geval de gemeenschappelijke maat? In het ene geval gaat het om torens met maat één, en in het andere geval met een maat van twee blokken. Moeten we er nu allemaal torentjes van één van maken als gemeenschappelijke maat? Dat zou het geval zijn als we de blokken als grootheden konden opvatten, dus als 't zou gaan om het aantal blokken, en de toren van twee-hoog equivalent (inruilbaar) zou zijn met twee van één-hoog.
Maar hier gaat het om een vergelijking van aantallen torens ongeacht hun hoogte, waarbij één lage als het ware weggestreept kan worden tegen één hoge. Dan blijft de vraag staan: wat is in dit geval dan de gemeenschappelijke maat?
Consequent in Davydov maat-lijn doordenkend komt 'De Rekenboom' voor deze kwestie tot de volgende oplossing: zoek in zo'n geval een categorienaam voor een bovenschikkend begrip (p.152). En dat kan in dit voorbeeld zijn 'torens', zonder enige hoogte aanduiding.
De vraag is in dit geval echter of het rijmpje 'Zeg me voor het te laat is, eerst wat de maat is?' ook nog wel gehonoreerd kan worden. Begrijpen kinderen nu zo'n vraag en zien ze het subtiele verschil tussen hoeveelheden en grootheden? Wat het laatstgenoemde aangaat, kan men in z'n algemeenheid vaststellen dat ze dit onderscheid opmerken. Die hele maatrecitatie is natuurlijk een onoverkomelijke moeilijkheid die maar

op één manier kan worden overwonnen, namelijk door bij niet- homogene hoeveelheden die vergeleken of samengevoegd moeten worden, niet over de gemeenschappelijke maat te praten. En dat gebeurt in 'De Rekenboom' dan ook niet als 't om optellen en aftrekken gaat - men doet er bij deze opgaven wat de gemeenschappelijke maat betreft vrijwel steeds het zwijgen toe.
Uit dit alles kan men afleiden hoe onvruchtbaar en misleidend dit hele maatidee bij hoeveelheden is. Dat blijkt trouwens ook bij het noteren. Op de vraag die op p.130 van 'De Rekenboom' wordt gesteld, of er meer halve boterhammen (4) zijn dan hele (3), is het antwoord uiteraard: halve. We trachten dit met de maat erbij op te schrijven (□ staat voor een halve en ⊟ voor een hele):

4□ - 3⊟ = 1□

Maar dit is niet acceptabel, want daaruit zou volgen:

1□ + 3⊟ = 4□

en dat is onjuist.
Wel juist zou zijn:

4 - 3 = 1

waarbij dus de 'maten' van de hoeveelheids-getallen worden weggelaten.
Anders gezegd: je kunt *aantallen* halve en hele boterhammen vergelijken, en die aantallen aftrekken en optellen, maar dan moet je juist van de maat afzien. Je opereert in dit geval met getallen en niet met objecten of maten.
Natuurlijk is het ook mogelijk met echte maten i.c. meetgetallen te rekenen. Indien we de hele en halve boterhammen niet op hun aantallen beschouwen, maar ze als meetgetallen bekijken, krijgen we bijvoorbeeld het volgende:

4□ + 3⊟ = 5⊟

of

4□ + 3⊟ = 10□

Beschouwen we hun aantal dan noteren we:

4 + 3 = 7

en laten de maataanduiding weg.

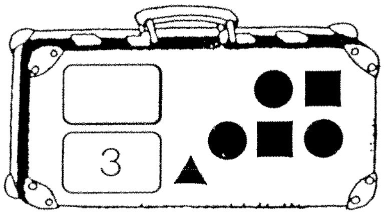
5. Door de geschetste maat-obsessie en de onnatuurlijke vraagstellingen daarbij (zie 1) krijgt het rekenonderwijs een formeel en weinig realistisch karakter. Dat zien we bij de vraagstellingen en proeven van Davydov en Minskaja in (4), althans als het om hoeveelheden gaat, en dat nemen we ook waar in 'De Rekenboom'. Het onderwijs krijgt daardoor een sterk opgelegd karakter. Van Oers stelt in (5) dan ook terecht dat het zeer de vraag is of deze overdracht van (zogenoemde) theoretische begrippen ook het theoretische denken bevordert. Vanuit vak-didactisch oogpunt beschouwd, kan men niet anders dan constateren dat dergelijk onderwijs verre staat van de realiteit, niet kindnabij is en wiskundig gezien arm van structuur.
6. Wiskundig 'rijk' onderwijs gaat van meer realistische probleemstellingen uit, besteedt aan alle aspecten van het getalbegrip aandacht en probeert het niet-object-gehouden tellen en rekenen op een natuurlijke wijze uit te lokken. Dit kan bijvoorbeeld door het laten vergelijken van grote hoeveelheden: het tellen kan daarbij als ordeningsmiddel dienen, en als dit niet lukt gaan kinderen (vaak spontaan) groepjes tekenen en die gelijke groepjes tellen of op elkaar afbeelden. Ook kan er worden gewerkt met (kralen) patronen waarbij de 'maat' een kraal kan zijn of één groepje kralen van gelijke kleur wat handig is bij het vergelijken van het aantal kralen op de kettingen. Ook stroken waarop 'eenheden' een variabele waarde krijgen, kunnen die zogenoemde object-binding terugdringen. Er kan gerekend worden met geld, met knikkers, etc. (zie verder 9))

   Dit is een breed ingebedde veelzijdige en realistische benadering van het getalbegrip, welke in tal van opzichten verschilt met Davydovs aanpak van het rekenonderwijs. Deze laatste wordt namelijk sterk bepaald en beperkt door de zucht tot één essentiële ingang i.c. de maat-bepaalde aanpak in een rijk wiskundig gebied. Daartoe is echter niet één bepaalde ingang mogelijk om het hele terrein te onderzoeken, zoals we in het voorgaande hebben proberen aan te tonen (zie verder 10) en 11)).

   Het verschil tussen de realistische werkwijze en 'De Rekenboom' is overigens nog groter, omdat er in deze methode nieuwe didactische posities worden ingenomen.

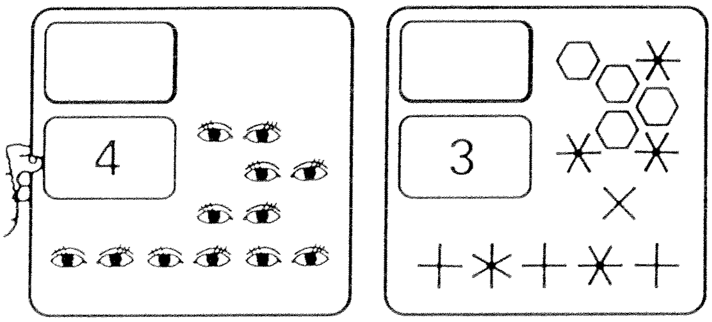
3 *Additionele kritiek op 'De Rekenboom'*

Zoals gezegd zijn alle geschetste didactische bedenkingen tegen Davydovs benadering van het (hoeveelheids-) getalbegrip in afgeleide zin ook op 'De Rekenboom' van toepassing. We herhalen deze kritiek hier niet, maar richten ons op een belangrijk bijkomend fenomeen, namelijk de inkleding van opgaven via maat-of criteriumkaartjes, welke tot misverstanden aanleiding geeft omtrent de bedoeling van de tel- en rekenopdrachten.
Het gaat daarbij om opgaven als de volgende (zie figuur 1, uit handleiding 1, p.52).



figuur 1

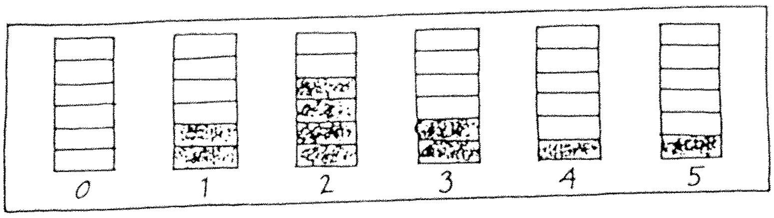
De vraag luidt hierbij: Wat is de maat geweest? En het antwoord: één zwart rondje.
De antwoorden bij de opgaven in figuur 2 zijn resp. drie ogen en een plus-teken (zie handleiding deel 1, p.53).



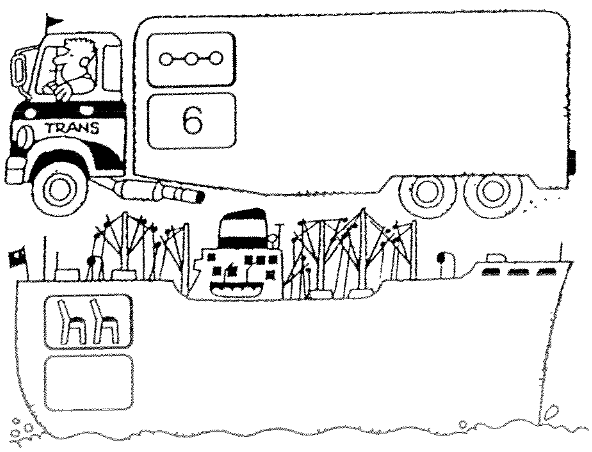
figuur 2

En met deze maatkaartjes is de verwarring compleet in de klas gehaald, want soms moeten alle objecten geteld worden, soms niet; nu eens doet de ligging en of de grootte er wel toe dan weer niet; de ene keer is de maat louter de naam van een object (een zwart rondje) en de andere keer een aantal objecten (3 ogen); er wordt vaak net gedaan of er éénduidige oplossingen zijn ('t gaat om zwarte rondjes) terwijl er in alle gevallen vele andere mogelijkheden zijn (bijvoorbeeld 3 *soorten* rondjes); soms mag je objecten breken en samenstellen, dan weer niet; en zo

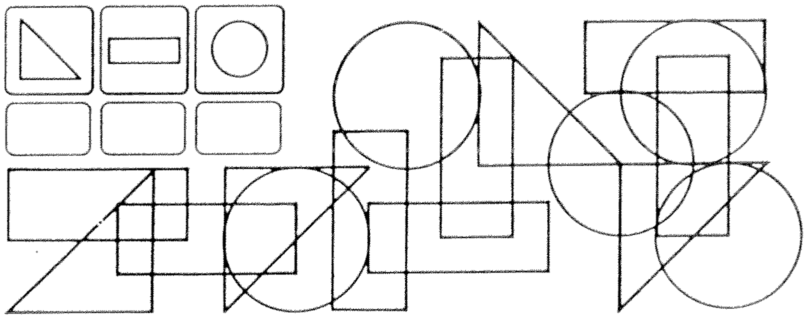
voort.
We laten de hele lappendeken van inconsistenties en misverstanden maar niet zien, want deze zou vele pagina's overdekken, en geven slechts een paar voorbeelden.



'U vertelt dat de maat is: het aantal kinderen bij je thuis. Tien kinderen (bijvoorbeeld) mogen een vakje kleuren boven het cijfer dat bij hem/haar past'. (Handleiding deel 1, p.50)
Een ander voorbeeld van wijdere strekking: bij verzamelingen heterogene objecten moet in 'De Rekenboom' altijd het meer homogene deel per stuk worden geteld, terwijl 't bij homogene verzamelingen steeds om meerdere stuks per maateenheid gaat. Waarom zou ook in het eerste geval geen 'grotere' maateenheid genomen mogen worden? Waarom mag je bij deze opgaven geen bovenschikkend begrip nemen als maataanduiding? Het antwoord ligt voor de hand: dan zou pas recht duidelijk worden dat de gestelde vragen volkomen onbepaald zijn, en zou blijken dat de leerstellige antwoorden in de handleiding misplaatst zijn.
Door de gewrongen vraagstellingen en inkledingsvormen van de opgaven krijgt 'De Rekenboom' welhaast een *surrealistisch* karakter. Zie bijvoorbeeld de opgaven weergegeven in figuur 3 en figuur 4 (uit de werkboeken afkomstig)



figuur 3



figuur 4

Voor het overige zou er nog heel wat over 'De Rekenboom' zijn op te merken buiten het kader van het hoeveelheidsgetal om, zoals over oppervlakte en omtrek, het splitsen bij 10, het rekenen onder 100, het gebruik van materiaal, het verband tussen materiële handelingen en notatiewijzen, de toepassingen ... Elders zal zo'n analyse in de nabije toekomst zeker worden gemaakt en beschreven, waaruit naar voren zal komen dat het didactisch gehalte in tal van opzichten onder de maat is. Wat 'onder de maat' precies inhoudt, hebben we hier naar we menen objectief, ja welhaast wiskundig zuiver kunnen aangeven via de maat van het hoeveelheidsgetal en met hulp van het maatkaartje.
Duidelijk moge zijn, dat we in het geval van 'De Rekenboom' (deel 1 en 2) niet van een didactische grootheid kunnen spreken. Hetzelfde geldt, naar mijn mening, overigens ook voor Davydovs ideeën over grootheden bij hoeveelheidsgetallen.
Tenslotte de moraal van dit verhaal: bij het ontwikkelen en beproeven van reken-wiskundeonderwijs zou eerst een flinke wiskunde-boom met vakdidactici en vakdidactisch geschoolde onderwijs-leertheoretici moeten worden opgezet, ten einde na te gaan of de betreffende basis-theorie en- praktijk houdbaar is tegen elementaire vakdidactische kritiek. Doet men dit niet, dan loopt men het risico Davydov in de 'Rekenboom', en de onderwijsmensen in de gordijnen te jagen.

NOTEN

1) Zie:
Treffers, A en E. de Moor: *Tien voor de basisvorming.* (Werkboek)
Utrecht: OW & OC, 1984.

2) Werkgroep Hans Puttenstein: *De Rekenboom* (1 en 2).
Groningen: Wolters-Noordhoff, 1984.

3) Zie bijvoorbeeld:
Nelissen, J.M.C., A.C. Vuurmans en M.A.D.Wolters: Wat Tanecka niet leert zal Tanja nooit weten - verslag van een studiereis naar Arnhem.
In: *Met Oosteuropese psychologen in gesprek* (C.F. van Parreren en J.M.C. Nelissen (red.)). Groningen: Wolters-Noordhoff, 1979, p.108.

4) Parreren, C.F. van en J.M.C. Nelissen (red.): *Rekenen.*
Groningen: Wolters-Noordhoff, 1977.

5) Oers, B. van: Davydov over begrippen in het onderwijs.
In: *Begrippen in het onderwijs. De theorie van Davydov.*
(J.Haenen en B.van Oers (red.)). Amsterdam: Pegasus, 1983.

6) Treffers, A.: Fundering. In: *Cijferend vermenigvuldigen en delen.*
(A.Treffers (ed)).
Utrecht: IOWO /thans OW & OC), 1979, p.77-107.

7) Streefland, L.: Davydov, Piaget en de breuken, in *'Pedagogische Studiën'*, p. 56, 1979, p.289-307.

8) Treffers, A.: Mathematisch-didactische stromingen en onderzoek van wiskunde-onderwijs. In: *Rekenen* (P.G.Vos, K.Koster en J.Kingma (red.)).
Lisse: Swets en Zeitliger, 1984, p.21-49.

9) Zie hiervoor bijvoorbeeld:
Brink, J.v.d.: Het grote 1 + boek, Utrecht, IOWO, 1975.

10) Freudenthal, H.: *Appels en Peren - wiskunde en psychologie.*
Apeldoorn: Van Walraven, 1984.
Freudenthal, H.: Didactische fenomenologie van wiskundige structuren (deel 1).
Utrecht: OW & OC, 1984.

11) Goffree, F.: *Wiskunde en didactiek* (delen 1,2 en 3)
Groningen: Wolters-Noordhoff, 1982-1985.