
Opportunity-to-learn van aftrekken tot 100 in twee reken-wiskundemethodes

M. van Zanten

Saxion Lerarenopleiding Hengelo/FIsme, Universiteit Utrecht

M. van den Heuvel-Panhuizen

FIsme, Universiteit Utrecht

1 inleiding

Reken-wiskundemethodes vervullen een belangrijke rol bij wat en hoe leerkrachten onderwijzen; wat in de methode staat is over het algemeen ook hetgeen wordt onderwezen (Haggarty & Pepin, 2002; Mullis, Martin & Foy, 2008; Reys, Reys & Chávez, 2004; Schmidt, Houang & Cogan, 2002; Stein & Smith, 2010). Van de Nederlandse leerkrachten geeft 94 procent aan dat de methode die zij gebruiken de voornaamste bron is voor hun reken-wiskundeonderwijs (Meelissen, Netten, Drent, Punter, Droop & Verhoeven, 2012). PPON-onderzoek laat verder zien dat 80 procent van de bevraagde leerkrachten zegt dat zij hun methode voor meer dan 90 procent volgen (Hop, 2012), en dat 62 procent aangeeft geen andere materialen naast de methode te gebruiken (Scheltens, Hemker & Vermeulen, 2013). Methodes zijn, kortom, van grote invloed op de zogenoemde *opportunity-to-learn*. Dit begrip verwijst naar alle omstandigheden die van invloed zijn op de gelegenheid die leerlingen hebben om rekenen-wiskunde te leren (Hiebert & Grouws, 2007; Stein & Smith, 2010).

In dit artikel wordt verslag gedaan van een onderzoek naar de *opportunity-to-learn* die twee reken-wiskundemethodes bieden voor een relatief eenvoudig onderwerp: aftrekken tot 100.¹ De *opportunity-to-learn* die een reken-wiskundemethode biedt, wordt bepaald door de inhoud die aan bod komt, de prestatieverwachtingen die daarbij worden gesteld en de wijze waarop de presentatie hiervan het leren faciliteert (Stein & Smith, 2010; Valverde, Bianchi, Wolfe, Schmidt & Houang, 2002). Deze perspectieven zijn alle drie betrokken in het onderzoek. Voor wat betreft inhoud en prestatieverwachtingen zijn de methodes geanalyseerd op de overeen-

stemming met het Nederlandse beoogde curriculum. Ten aanzien van het faciliteren van leren is gekeken naar de mate en de opbouw van het aanbod en naar de geboden didactische ondersteuning. De onderzoeksvragen luiden: (1) In hoeverre stemmen leerinhoud en prestatieverwachtingen in reken-wiskundemethodes overeen met het beoogde curriculum ten aanzien van het aftrekken tot 100? en (2) Op welke wijze faciliteren reken-wiskundemethodes het leren van aftrekken tot 100?

2 aftrekken tot 100: wat valt er te leren?

aftrekken tot 100 in het beoogde curriculum

Het Nederlandse beoogde curriculum bestaat uit twee wettelijk vastgestelde documenten: de 'Kerndoelen' en het 'Referentiekader' (OCW, 2006; 2009).

De Kerndoelen geven aan dat kinderen in de loop van het basisonderwijs vertrouwd raken met onder meer getallen, bewerkingen en wiskundetaal. Leerinhouden die (onder meer) het aftrekken tot 100 betreffen zijn notaties, getalinzicht, parate kennis, toepassingen en rekenroutines. Specifiek voor de basisbewerkingen tot 100 wordt gesteld dat kinderen rekenen tot 100 snel uit het hoofd leren uitvoeren en optellen en aftrekken tot 20 van buiten kennen (OCW, 2006, pag.37-43).

Het Referentiekader onderscheidt 'paraat hebben', 'functioneel gebruiken' en 'weten waarom' en kan als zodanig worden beschouwd als een omschrijving van prestatieverwachtingen. Onder 'paraat hebben' valt het kennen van getalfeiten en het kunnen aftrekken uit het hoofd, inclusief efficiënt rekenen (rekenen waarbij gebruik wordt gemaakt van eigenschappen van getallen en bewerkingen) en aftrekken als verschil bepalen. 'Functioneel gebruiken' refereert aan het (inzichtelijk) toepassen van oplossingsmethoden in situaties. 'Weten waarom' ten slotte, betreft begrip (OCW, 2009, pag.22-26).

Beide wettelijke documenten zijn relatief globaal geformuleerd. Hieronder wordt nader ingegaan op aftrekken als wiskundig concept en oplossingswijzen bij aftrekken tot 100.

aftrekken als wiskundig concept

De bewerkingen aftrekken en optellen refereren allebei aan een deelgeheelrelatie tussen getallen (Fuson, 1992). Optellen is het samenvoegen van delen tot een geheel en aftrekken is het wegnemen van een deel van een geheel. Aftrekken is de inverse bewerking van optellen; als $a + b = c$, dan geldt ook $c - b = a$.

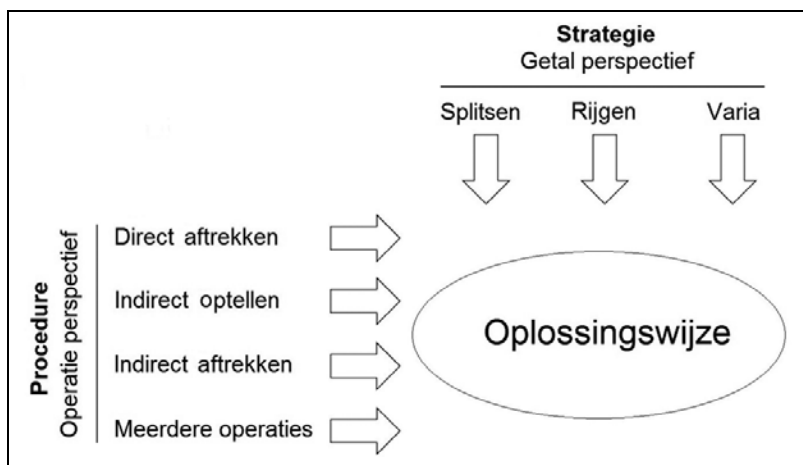
Afhankelijk van de semantische structuur van een aftrekking, kan het resultaat ervan twee verschillende betekenissen hebben: hetgeen overblijft of een verschil (Usiskin, 2008). De symbolische notatie $c - b = a$ kan dus twee betekenissen representeren: b weghalen van c , waarna a overblijft, of het vergelijken van c en b , waarbij a het verschil aangeeft.

De bewerking aftrekken is niet uitsluitend verbonden aan opgaven met het min-symbool (Freudenthal, 1983). Opgaven met een plus-symbool als $\dots + b = c$ en $a + \dots = c$ kunnen worden opgelost met een aftrekking en kunnen derhalve, ondanks de notatie, worden opgevat als aftrekopgaven (Selter, Prediger, Nührenbörger & Hußmann, 2012).

oplossingswijzen bij aftrekken tot 100

De mogelijke oplossingswijzen bij aftrekken tot 100 kennen twee perspectieven: de procedure waarmee de bewerking wordt uitgevoerd en de strategie waarmee wordt omgegaan met de getallen (Van den Heuvel-Panhuizen, 2012; Peltenburg, Van den Heuvel-Panhuizen & Robitzsch, 2012) (fig.1).

Procedures waarmee de operatie aftrekken kan worden uitgevoerd zijn: direct aftrekken (de aftrekker weghalen van het aftrektal); indirect optellen (optellen vanaf de aftrekker tot het aftrektal is bereikt); en indirect aftrekken (weghalen vanaf het aftrektal totdat de aftrekker is bereikt) (De Corte & Verschaffel, 1987; Torbeyns, De Smedt, Stassens, Ghesquière & Verschaffel 2009; Kraemer, 2011).



figuur 1: procedures en strategieën bij aftrekken tot 100

Strategieën betreffen splitsen (zowel aftrektal als aftrekker worden gesplitst in tientallen en eenheden), rijgen (alleen de aftrekker wordt opge-

splitst en in delen van het aftrektal weggehaald) en varia (aftrektal en/of aftrekker worden zo veranderd dat een makkelijker aftrekking ontstaat). Een oplossingswijze kan bijvoorbeeld bestaan uit indirect optellen gecombineerd met rijgen (bijvoorbeeld $67 - 41$ oplossen door $41 + 9 = 50$ en $50 + 10 = 60$ en $60 + 7 = 67$, gevolgd door $9 + 10 + 7 = 26$) of meerdere operaties met een variastrategie (bijvoorbeeld $77 - 29$ oplossen door $77 - 30 = 47$ uit te rekenen, gevolgd door $47 + 1 = 48$). Niet alle mogelijke combinaties van strategieën en procedures zijn even gebruikelijk of gemakkelijk (zie voor een gedetailleerde bespreking Peltenburg e.a., 2012).

3 faciliteren van leren van aftrekken tot 100

De wijze waarop een methode leren faciliteert, wordt bepaald door de mate waarin de te verwerven leerinhoud aan bod komt en de opbouw ervan (Valverde e.a., 2002). Daarnaast draagt didactische ondersteuning bij aan de gelegenheid tot leren, zoals het gebruik van adequate contexten en modellen.

Contexten kunnen betekenis geven aan een reken-wiskundig concept en daardoor bijdragen aan begrip (De Corte & Verschaffel, 1987).² Als methodes voldoende gevarieerde contexten aanbieden voor het aftrekken tot 100, kunnen deze bijdragen aan het begrijpen en leren van zowel de semantische structuren van aftrekken als de verschillende oplossingsmethoden ervan (vergelijk Fuson, 1992).

Modellen kunnen het leren van oplossingswijzen, met name strategieën, ondersteunen. Voorwaardelijk hiervoor is dat de modellen passen bij de te leren strategieën (Van den Heuvel-Panhuizen, 2008). Strategie en model moeten epistemologisch consistent zijn: de onderliggende wiskundige structuur moet overeenkomen. Zo kan de strategie rijgen, die is gerelateerd aan het ordinale getalsaspect, worden ondersteund met een lijnmodel, dat refereert aan dit getalsaspect, zoals de getallenlijn.

Het presenteren van verschillende symbolische representaties tenslotte, zoals $c - \dots = a$ en $a + \dots = c$, naast de standaardrepresentatie $c - b = \dots$, kan bijdragen aan begrip van de inverse-relatie van optellen en aftrekken en aan het leren van indirect aftrekken en indirect optellen (vergelijk Fuson, 1992).

4 methodeanalyse

onderzochte materialen

Er zijn twee methodes gekozen die door hun gemeenschappelijke uitgever

worden gepresenteerd als representanten van verschillende didactieken: Rekenrijk (RR), die wordt gepresenteerd als een realistische methode en Reken Zeker (RZ), die wordt gepresenteerd als een alternatief voor de realistische benadering.

In beide methodes wordt aftrekken tot 100 in groep 4 aangeboden, dus daarvan zijn de materialen geanalyseerd. Alleen leerlingmaterialen³ die bedoeld zijn voor alle leerlingen zijn onderzocht. Opgaven voor enkel de snelle leerlingen, toetslessen, herhalingslessen, verrijkingslessen en kopiëerbladen zijn buiten beschouwing gelaten.

analysecategorieën

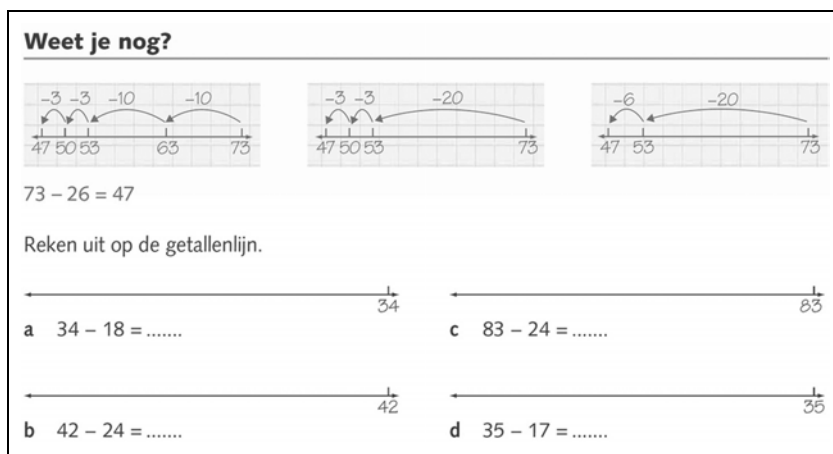
Voor alle drie de perspectieven leerinhoud, prestatieverwachtingen en faciliteren van leren zijn analysecategorieën vastgesteld (fig.2). Voor leerinhoud en prestatieverwachtingen is dat gebeurd op grond van het beoogde curriculum, kenmerken van aftrekken als wiskundig concept en voorkomende oplossingswijzen bij aftrekken tot 100 (zie paragraaf 2). Voor faciliteren van leren is gekeken naar mate en opbouw van aanbod en naar didactische ondersteuning (zie paragraaf 3).

Perspectief	Categorie	Subcategorie	
Leerinhoud	Opgaventypen	Benodigde voorkennis	Splitsen van getallen tot 10
			Terugtellen met sprongen van 10
		Aftrekken tot 10	
		Aftrekken tot 20	Tussen 20 en 10
			Met overbruggen van 10
		Aftrekken tot 100	Zonder overbruggen van tiental
			Met overbruggen van tiental
	Abstractieniveau	Opgaven met kale getallen	
		Opgaven in context	
	Semantische structuur	Aftrekken als weghalen	
Prestatie-verwachtingen	Weten dat	Aftrekkingen tot 10 kennen	
		Aftrekkingen tot 20 kennen	
		Standaardoplossingswijzen gebruiken	
	Weten hoe	Alternatieve oplossingswijzen gebruiken	
	Toepassen	Aftrekken gebruiken in toepassingssituaties	
	Begrijpen	Kunnen uitleggen	
		Passende oplossingswijzen kiezen	
Faciliteren van leren	Mate van aanbod	Hoeveelheid en verdeling van opgaven	
	Opbouw van aanbod	Sequentie in opgaventypen	
		Sequentie in abstractieniveau	
		Gebruik van contexten voor betekenisverlening	
	Didactische ondersteuning	Gebruik van modellen	
		Gebruik van verschillende symbolische representaties	
		Gebruik van tekstuele instructie	

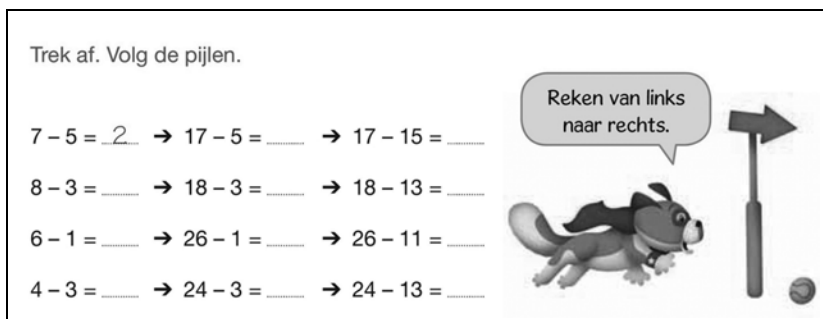
figuur 2: analysecategorieën voor aftrekken tot 100 in groep 4

analyse-eenheid

Als analyse-eenheid is de 'opgave' genomen: de kleinste eenheid (vraag of opdracht) waarop een leerling een antwoord moet geven. In beide methodes zijn opgaven geclusterd in opgavensets (fig.3a, 3b). Voor het analyseren van de opbouw is mede gebruikgemaakt van opgavensets als analyse-eenheden.



figuur 3a: RR-opgavenset van vier opgaven (Werkboek 4b-1, pag.30)



figuur 3b: RZ-opgavenset van elf opgaven (Leerlingenboek 4c, pag.26)

5 resultaten van de analyse

leerinhoud

opgaventypen

Beide methodes bieden in groep 4 aftrekopgaven tot 10, tot 20, en tot 100

(fig.4). RR biedt meer aftrekopgaven tot 10 en tot 20. RZ biedt meer aftrekopgaven tussen 20 en 100.

RR besteedt aandacht aan voorwaardelijke kennis, maar RZ vrijwel niet. Daarom zijn we nagegaan in hoeverre bijvoorbeeld het splitsen van getallen tot 10 al in groep 3 aan de orde komt. In beide methodes wordt deze voorkennis inderdaad in groep 3 al aangeboden. Echter, evenals in groep 4, biedt RR in groep 3 meer van deze opgaven aan (418) dan RZ (167). Er is dus een groot verschil tussen de methodes ten aanzien van het verschaffen van deze benodigde voorkennis.

Opgaventypen	RR-opgaven		RZ-opgaven	
	<i>f</i>	%	<i>f</i>	%
Benodigde voorkennis	130	11%	5	0%
Splitsen van getallen tot 10	107	9%	4	0%
Terugtellen met sprongen van 10	23	2%	1	0%
Aftrekken tot 10	153	13%	78	5%
Aftrekken tot 20	311	27%	261	18%
Tussen 20 en 10	79	7%	135	9%
Met overbruggen van 10	232	20%	126	9%
Aftrekken tot 100	572	49%	1096	76%
Zonder overbruggen van tiental	194	17%	616	43%
Met overbruggen van tiental	378	32%	480	33%
Totaal aantal aftrekopgaven	1166	100%	1440	100%

figuur 4⁴

abstractieniveau

Beide methodes bieden meer opgaven met kale getallen dan opgaven in context (fig.5). RZ biedt de meeste opgaven met kale getallen en RR biedt de meeste contextopgaven.

Abstractieniveau	RR-opgaven		RZ-opgaven	
	<i>f</i>	%	<i>f</i>	%
Opgaven met kale getallen	1026	88%	1415	98%
Opgaven in context	140	12%	25	2%
Totaal aantal aftrekopgaven	1166	100%	1440	100%

figuur 5

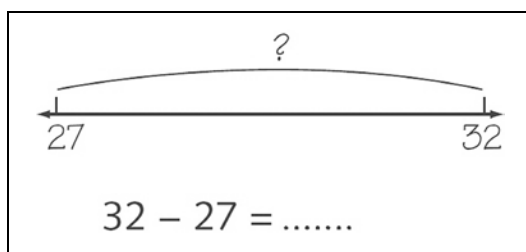
semantische structuur

In beide methodes is slechts bij een deel van de opgaven sprake van een eenduidige semantische structuur (fig.6). In beide methodes komt aftrek-

ken als weghalen aan bod. Alleen RR biedt eveneens aftrekken als verschil bepalen aan (fig.7).

Semantische structuur	RR-opgaven		RZ-opgaven	
	f	%	f	%
Aftrekken als weghalen	210	18%	403	28%
Aftrekken als verschil bepalen	53	5%	0	0%
Zowel weghalen als verschil bepalen	28	2%	0	0%
Geen eenduidige semantische structuur	874	75%	1037	72%
Totaal aantal aftrekopgaven	1166	100%	1440	100%

figuur 6



figuur 7: aftrekken als verschil bepalen in RR (Werkboek 4b-2, pag.58)

overeenstemming leerinhoud met het beoogde curriculum

In figuur 8 wordt samengevat in hoeverre de leerinhoud van aftrekken tot 100 in de methodes, zoals hierboven gepresenteerd, overeenstemt met het beoogde curriculum. Beide methodes stemmen voor de categorieën opgaventypen en abstractieniveau overeen met het beoogde curriculum: alle onderscheiden subcategorieën komen in beide methodes aan bod, al verschilt de mate waarin per subcategorie. Voor de categorie semantische structuur stemt RR in sterkere mate overeen met het beoogde curriculum dan RZ, doordat alleen RR beide semantische structuren die zijn opgenomen in het beoogde curriculum aanbiedt.

prestatieverwachtingen

In beide methodes zijn duidelijke prestatieverwachtingen te onderscheiden. In RR is dat het geval bij 1081 opgaven en in RZ bij 800 opgaven. In beide methodes gaat het vooral om 'weten hoe', gevolgd door 'weten dat'. RR biedt meer opgaven waarbij het gaat om toepassen dan RZ. Prestatieverwachtingen op het gebied van begrijpen treffen we alleen aan in RR (fig.9).

	Beoogd curriculum	RR	RZ
Opgaventypen	Aftrekken tot 100	Aftrekken tot 100	
Abstractie-niveau	In situaties	In contextsituaties (minder) en met kale getallen (meer)	
	Met kale getallen	RR heeft de meeste contextopgaven	RZ heeft de meeste kale opgaven
Semantische structuur	Wegnemen	Aftrekken als wegnemen	
	Verskil bepalen	Aftrekken als het verschil bepalen	-

figuur 8: overeenstemming van de leerinhoud aftrekken tot 100 in RR en RZ met het beoogde curriculum

Prestatieverwachtingen	RR-opgaven		RZ-opgaven	
	<i>f</i>	%	<i>f</i>	%
Weten dat	346	32%	229	29%
Aftrekkingen tot 10 kennen	258	24%	55	7%
Aftrekkingen tot 20 kennen	88	8%	174	22%
Weten hoe	513	47%	546	68%
Standaardoplossingswijzen gebruiken	413	38%	546	68%
Alternatieve oplossingswijzen gebruiken	100	9%	0	0%
Toepassen	111	10%	25	3%
Begrijpen	111	10%	0	0%
Passende oplossingswijzen kiezen	74	7%	0	0%
Kunnen uitleggen	37	3%	0	0%
Totaal aantal prestatieverwachtingen	1081	100%	800	100%

figuur 9⁵

weten dat

RR biedt meer opgaven waarbij het gaat om 'weten dat' dan RZ. In RR ligt de meeste nadruk op het paraat hebben van de aftrekkingen tot 10 en in RZ op de aftrekkingen tot 20.

weten hoe

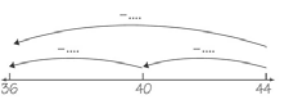
In beide methodes wordt van leerlingen groep 4 verwacht dat ze één standaardoplossingswijze leren, namelijk direct aftrekken met rijgen. Bij het overbruggen van tientallen vergt deze oplossingswijze (aanvankelijk) meerdere tussenstappen en tussenantwoorden en hier gaan de methodes verschillend mee om. RR laat zowel tussenstappen als tussenantwoorden aangeven op de lege getallenlijn (zie fig.3a). RZ verwacht dat leerlingen het eerste tussenantwoord direct na het =-teken noteren, maar laat de tussenstappen en het tussenantwoord voor het overbruggen van het tiental

uit het hoofd uitvoeren (fig.10). Deze aanpak kan makkelijk foute notaties uitlokken (bijvoorbeeld $12 - 3 = 12 - 2 = 10 - 1 = 9$ in plaats van $12 - 3 = 10 - 1 = 9$).

Reken uit met tussenstap. 26 - 17 Stap 1: Eerst de tientallen eraf. Stap 2: Dan de eenheden eraf. 51 - 23 = 31 - 3 = 61 - 27 = 41 - 7 = 73 - 34 = 43 - 4 = 95 - 38 = 65 - 8 = 	Trek af met tussenstap. 43 - 25 = 23 - 5 = 18 33 - 16 = 23 - = 53 - 27 = 33 - = 63 - 36 = 33 - =
---	---

figuur 10: direct aftrekken met rijen in RZ (Leerlingenboek 4c, pag.71; 74)

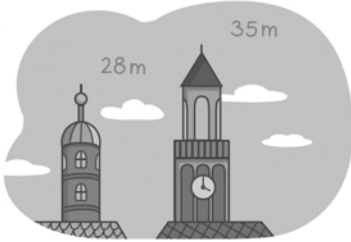
In RR wordt van leerlingen verwacht dat ze tevens alternatieve oplossingswijzen leren, namelijk indirect optellen, indirect aftrekken en een variastrategie (fig.11). Hoewel RZ stipsommen aanbiedt (bijvoorbeeld $28 - \dots = 23$) die indirect aftrekken kunnen uitlokken, besteedt deze methode geen expliciete aandacht aan deze of andere alternatieve oplossingswijzen.

Reken uit met aanvullen. 27 + = 32 32 - 27 =	Welke som hoort bij de getallenlijn? Vul eerst de sprongen in.  =	Reken met teveel - 20 + 1 65 - 19 =
---	---	--

figuur 11: indirect optellen (links), indirect aftrekken (midden) en een variastrategie (rechts) in RR (Werkboek 4b-2, pag.61; 4b-1, pag.2; 4b-2, pag.78)

toepassen

In beide methodes passen leerlingen eerder geleerde oplossingswijzen toe in contexten. In RR gebeurt dat ruim vier keer zo vaak (in 111 van de 140 contexten) als in RZ (in alle 25 contexten). RR biedt toepassingscontexten in verschillende vormen en met beide semantische structuren (fig.12). RZ biedt toepassingscontexten in één vaste (tekstuele) vorm, met één semantische structuur (fig.13).

Van verhaal naar rekentaal	Van plaatje naar rekentaal
Kim heeft € 32. Zij koopt iets voor € 17. som: antwoord:	Hoe groot is het verschil? 

figuur 12: contexten in RR met aftrekken als weghalen (links) en als verschil bepalen (rechts) (Werkboek 4b-2, pag.37; 78)

Luister goed! 

Floris heeft 12 ballonnen.
Hij geeft er 5 aan Tess.
Hoeveel ballonnen houdt Floris over?

De som is: ____ - ____ = ____ ballonnen.




In het weiland staan 53 paarden.
De boer brengt er 9 naar de stal.
Hoeveel paarden staan er nu nog in het weiland?

De som is: ____ - ____ = ____ paarden.



figuur 13: contexten in RZ met aftrekken als weghalen
(Leerlingenboek 4a, pag.20; 4b, pag.27)

begrijpen

RR biedt 111 opgaven aan die expliciet redeneren uitlokken. Dit zijn opgaven waarin leerlingen gevraagd wordt hun denken uit te leggen (bijvoorbeeld 'Hoe heb je dit uitgerekend?'), hun oplossingswijze te tekenen of een passende strategie te kiezen voor een aftrekopgave met bepaalde getallen (fig.14).⁶ In RZ treffen we geen opgaven aan met prestatieverwachtingen betreffende begrijpen.

Reken uit op jouw manier

Als je rekent met teveel, mag je ook het wolkje invullen.

rijg met twee of drie sprongen of reken met teveel

a $63 - 27 = \dots\dots$

b $52 - 28 = \dots\dots$

d $63 - 29 = \dots\dots$

e $75 - 36 = \dots\dots$

figuur 14: RR-werkboek 4b-2, pag.64

overeenstemming prestatieverwachtingen met het beoogde curriculum

In figuur 15 is samengevat in hoeverre de prestatieverwachtingen bij aftrekken tot 100 in de geanalyseerde methodes overeenstemmen met het beoogde curriculum. Voor wat betreft de categorie 'weten dat' stemmen

	Beoogd curriculum	RR	RZ
Weten dat	Tot 20 uit het hoofd	Meeste nadruk tot 10	Meeste nadruk tot 20
Weten hoe	Standaardprocedure	Rijgstrategie	
	Handig / Efficiënt	indirect aftrekken, indirect optellen, varia	-
Toepassen	Binnen situaties	Contextopgaven voor toepassen	
		Verschillende vormen en semantische structuren	Eén vorm en één semantische structuur
Begrijpen	Redeneringen weergeven / Aanpakken onderbouwen	Uitleggen hoe je rekent, Oplossingswijze laten zien, Passende oplossingswijze kiezen.	-

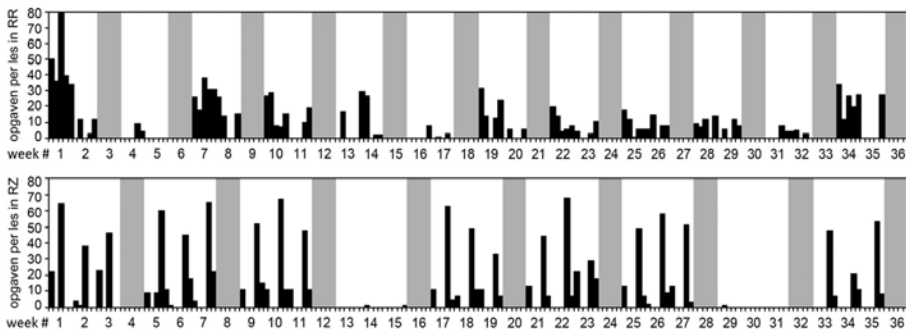
figuur 15: overeenstemming van prestatieverwachtingen aftrekken tot 100 in RR en RZ met het beoogde curriculum

beide methodes overeen met het beoogde curriculum. Bij de drie andere onderscheiden categorieën stemt RR in sterkere mate overeen met het beoogde curriculum dan RZ. Bij de categorie ‘weten hoe’ biedt alleen RR handig en efficiënt aftrekken tot 100 aan. Bij ‘toepassen’ biedt RR een grotere variëteit aan van toepassingssituaties dan RZ, en ten aanzien van ‘begrijpen’ zijn alleen in RR prestatieverwachtingen te onderscheiden.

faciliteren van leren

mate van aanbod

In beide methodes betreft ongeveer 20 procent van het totale aantal opgaven in groep 4 aftrekken. In RR is dit 1166 van in totaal 5331 opgaven (22 procent) en in RZ 1440 van 7051 opgaven (20 procent). Figuur 16 visualiseert hoe deze opgaven zijn gespreid over het schooljaar. Beide methodes bieden vijf lessen per week, voor 36 schoolweken. Elke derde week van RR en elke vierde week van RZ zijn grijs gemaakt. Deze weken zijn bedoeld voor toetsing, herhaling en verrijking en zijn buiten de analyse gehouden.



figuur 16: aantal aftrekopgaven per les in RR (boven) en RZ (onder)

In RR varieert de mate van aanbod: in week 1, 7 en 34 worden meer aftrekopgaven aangeboden dan in andere weken. Het gaat daarbij respectievelijk om herhaling van voorwaardelijke kennis uit groep 3 (splitsen van getallen tot 10), introductie van aftrekken boven de 20 en introductie van de procedure indirect optellen.

RZ biedt in zeven van de negen periodes een regelmatig aanbod van wekelijkse lessen met steeds 50 tot 70 aftrekopgaven.

opbouw van aanbod

Figuur 17 toont de opbouw van opgaventypen over het schooljaar. Hoe donkerder een vakje is, des te hoger het aantal opgaven het representeert.

Beide methoden hebben een opbouw met progressieve complicering, maar het tempo verschilt. RZ bereikt de moeilijker opgaventypen eerder dan RR.

Opgaventype	Aantal RR-opgaven								
Aftrekken tot 100, met overbruggen van tiental					50	54	84	45	145
Aftrekken tot 100, zonder overbruggen van tiental	3		70	49	22	10	31	5	4
Aftrekken tot 20	58	173	25	24	23	1	7		
Aftrekken tot 10	111	27		12	3				
Benodigde voorkennis	107		21	1	1				
Maand #	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Opgaventype	Aantal RZ-opgaven								
Aftrekken tot 100, met overbruggen van tiental	4	3	138		25	97	115		98
Aftrekken tot 100, zonder overbruggen van tiental		166	58	1	150	107	88	1	45
Aftrekken tot 20	151	57	29	1	13	3	2		5
Aftrekken tot 10	39	18	12		9				
Benodigde voorkennis	4					1			
Maand #	1	2	3	4	5	6	7	8	9

figuur 17: aantal opgaven per type per maand in RR (boven) en RZ (onder)

De opbouw in abstractieniveau verschilt eveneens. Beide methodes bieden kale opgaven, contextopgaven en opgaven met modellen. Figuur 18 visualiseert de opbouw in abstractieniveau voorbeeldmatig aan de hand van de eerste tien lessen met aftrekopgaven tot 20 met overbrugging van de 10.

Abstractieniveau	Opgavensets aftrekken tot 20 met overbruggen 10 in RR									
Context, toepassen										
Kale getallen										
Modelondersteund										
Context, betekenisverlenend										
Les #	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Abstractieniveau	Opgavensets aftrekken tot 20 met overbruggen 10 in RZ									
Context, toepassen										
Kale getallen										
Modelondersteund										
Context, betekenisverlenend										
Les #	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

figuur 18: opbouw in abstractieniveau bij aftrekken tot 20 met overbruggen van 10 in RR (boven) en RZ (onder)

Elk zwart blokje representeert een opgavenset. RR biedt eerst opgaven met betekenisverlenende contexten, gevolgd door opgaven met ondersteunende modellen en dan toepassingscontexten. In de zesde les komen voor het eerst kale opgaven aan bod. RZ biedt eerst kale opgaven aan, waarna opgaven met ondersteunende modellen en kale opgaven elkaar afwisselen. In deze tien lessen komt één keer, in de vierde les, een opgave in een toepassingscontext aan bod.

didactische ondersteuning

Beide methodes bieden didactische ondersteuning bij een deel van de opgaven. In RR is dit het geval bij 821 opgaven (ongeveer 70 procent van het totaal) en in RZ bij 280 opgaven (ongeveer 19 procent) (fig.19).⁷

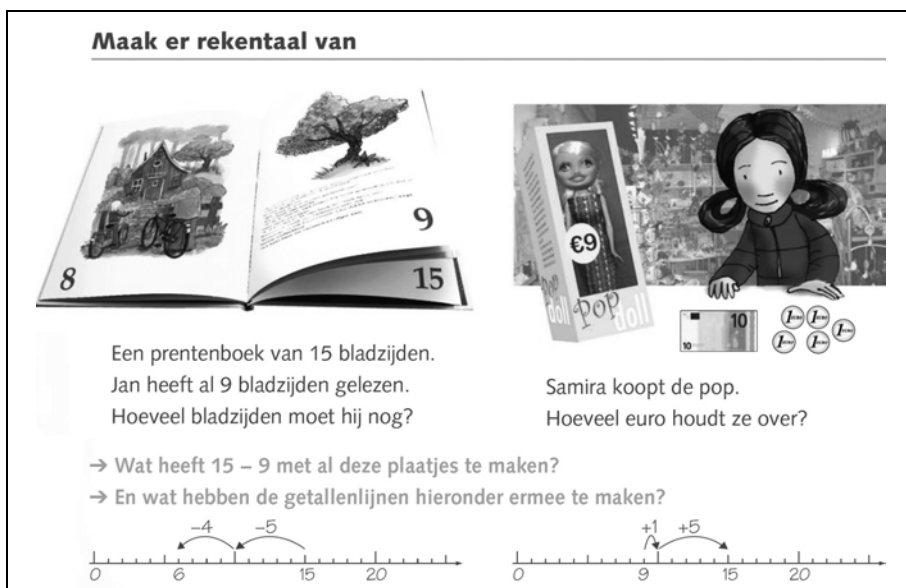
Didactische ondersteuning	RR-opgaven		RZ-opgaven	
	<i>f</i>	%	<i>f</i>	%
Gebruik van contexten voor betekenisverlening	29	4%	0	0%
Gebruik van modellen	423	52%	108	39%
Rekenrekje	102	12%	0	0%
M.A.B. lossen en staafjes	0	0%	98	35%
Getallenlijn (gestructureerd)	11	1%	10	4%
Getallenlijn (leeg)	305	37%	0	0%
Strook	5	1%	0	0%
Gebruik van tekstuele instructie	369	45%	172	61%
Instructie hoe de opgave moet worden opgelost	186	23%	108	39%
Voorgelegde keuzes bij opgaven	146	18%	64	23%
Vragen die reflectie oproepen	37	5%	0	0%
Totaal aantal opgaven met didactische ondersteuning	821	100%	280	100%

figuur 19⁸

Beide methodes bieden contexten, maar alleen in RR worden deze benut bij de introductie van nieuwe leerstof ter ondersteuning van betekenisverlening (bij 29 van de 140 contexten).⁹ Een voorbeeld is te zien in figuur 20, waarin indirect optellen wordt geïntroduceerd en gerelateerd aan direct aftrekken.

Hoewel beide methodes de strategie rijgen aanbieden, hanteren ze daarbij verschillende modellen. RR gebruikt vooral de lege getallenlijn, ook voor de alternatieve strategieën die deze methode aanbiedt (zie fig.11 & fig.14). RZ biedt afbeeldingen van MAB-materiaal, ondanks dat dit model niet epistemologisch consistent is met rijgen; MAB refereert aan een groepsstructuur en rijgen aan een lijnstructuur. RZ benut bovendien de 10-structuur van MAB niet consequent voor het aftrekken van tientallen (fig.21).

Naast de standaardrepresentatie $c - b = \dots$, bieden beide methodes weinig alternatieve representaties. RR biedt aftrekkingen aan met een plus-sym-



figuur 20: (RR-leerlingenboek 4a, pag.24)

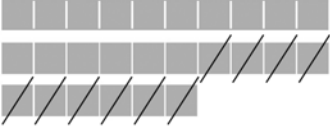
bool in de representatie $a + \dots = c$ (twaalf opgaven), waarbij het gaat om het relateren van aftrekken aan optellen of de procedure indirect optellen (fig.11, links). Aan de andere kant biedt alleen RZ stipopgaven aan met een min-symbool (bijvoorbeeld $19 = 20 - \dots$ en $26 - \dots = 21$) (44 opgaven).

Beide methodes geven met tekstuele instructies aan hoe oplossingswijzen moeten worden uitgevoerd. In RR gebeurt dit vooral bij aftrekkingen tot 20 (120 van de 186 gevallen), zoals: 'Haal eerst af tot 10'. In RZ gebeurt dit vooral bij aftrekkingen tot 100 (35 van de 108 gevallen), bijvoorbeeld: 'Eerst de tientallen eraf. Dan de eenheden eraf'.

Beide methodes geven ook tekstueel keuzemogelijkheden aan bij het oplossen van opgaven. Een keuze die beide methodes bieden is het al dan niet gebruikmaken van een model (in RR in 53 van de 146 gevallen en in RZ in 21 van de 64 gevallen). Andere aangeboden keuzes verschillen in aard. In RR gaat het om het kiezen van een passende oplossingswijze, bijvoorbeeld het kiezen voor rijgen of een variastrategie, of om het maken van meer of minder sprongen bij de rijgstrategie (bij de overige 93 gevallen). In RZ gaat het bij de overige (43) gevallen om het wel of niet gebruiken van kladpapier.

Een laatste vorm van tekstuele instructie betreft vragen die reflectie kunnen oproepen. Deze vorm is alleen in RR aangetroffen. Voorbeelden zijn: 'Hoe heb je dit uitgerekend?' en de vragen in figuur 20.

Trek af.



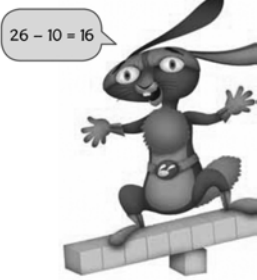
26 - 10 = 16

26 - 10 = 16 37 - 20 = ____ 45 - 30 = ____

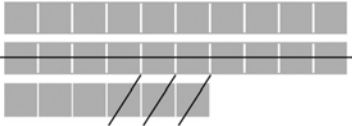
46 - 10 = ____ 55 - 20 = ____ 33 - 30 = ____

75 - 10 = ____ 64 - 20 = ____ 48 - 30 = ____

81 - 10 = ____ 72 - 20 = ____ 69 - 30 = ____



Trek af met tussenstap.



26 - 13 = 16 - 3 = 13

26 - 13 = 16 - 3 = 13 57 - 22 = ____ - ____ = ____

34 - 22 = 14 - ____ = ____ 45 - 31 = ____ - ____ = ____

58 - 31 = 28 - ____ = ____ 74 - 12 = ____ - ____ = ____

47 - 11 = 37 - ____ = ____ 87 - 11 = ____ - ____ = ____



figuur 21: RZ-leerlingenboek 4c, pag.25 & 39

6 besluit: opportunity-to-learn

Om de *opportunity-to-learn* die RR en RZ bieden ten aanzien van aftrekken tot 100 in kaart te brengen, is in dit onderzoek geanalyseerd in hoeverre leerinhoud en prestatieverwachtingen van de methodes overeenstemmen met het beoogde curriculum (onderzoeksvraag 1) en op welke wijze leren wordt gefaciliteerd (onderzoeksvraag 2).

De geanalyseerde methodes stemmen ten aanzien van twee analysecategorieën van leerinhoud en één categorie van prestatieverwachtingen beide overeen met het beoogde curriculum. Echter, voor wat betreft de vier overige analysecategorieën van leerinhoud en prestatieverwachtingen, stemt

RR in sterkere mate overeen met het beoogde curriculum dan RZ. Dit impliceert dat de overeenstemming van methodes met het beoogde curriculum nogal uiteen kan lopen. De analyseresultaten suggereren bovendien dat methodes kunnen verschillen ten aanzien van het beeld dat zij bieden van rekenen-wiskunde: RZ biedt een beperkt beeld van aftrekken tot 100 met één semantische structuur, één betekenis en één oplossingswijze, terwijl RR een breder beeld biedt met twee semantische structuren, twee betekenissen en vier oplossingswijzen. Verder laat de analyse bij vrijwel alle onderscheiden subcategorieën relatief grote kwantitatieve verschillen tussen de methodes zien. Hoewel moeilijk te kwantificeren is hoeveel aandacht voor bijvoorbeeld een bepaald opgavetype genoeg is, kan een kwantitatief verschil op zich wel een kwalitatief verschil impliceren. Het kan voor leerlingen immers uitmaken of er bijvoorbeeld meer of minder aandacht wordt besteed aan benodigde voorkennis of dat er meer of minder gelegenheid is voor het oefenen van overbruggen van 10 bij aftrekken.

De geanalyseerde methodes verschillen ook in de mate waarin en wijze waarop zij leren faciliteren. Zo biedt RZ meer aftrekopgaven aan dan RR en bereikt deze methode de moeilijkste opgaventypen eerder. RR biedt daarentegen een steviger basis voor het leren aftrekken tot 100, in die zin dat deze methode meer gelegenheid biedt voor het verwerven van de benodigde voorkennis (ook in groep 3) en contexten benut voor betekenisverlening. RR biedt bijna drie keer zoveel didactische ondersteuning aan als RZ, waaronder vormen die in RZ in het geheel niet worden aangeboden, zoals het aanbieden van vragen die reflectie oproepen. Verder valt op dat RZ bij het leren van de strategie rijgen een model aanbiedt dat epistemologisch inconsistent is met deze strategie en daarbij een notatiewijze aanbiedt die vraagt dat leerlingen van meet af aan tussenstappen uit het hoofd uitvoeren en die makkelijk kan leiden tot foutieve notaties.

De analyseresultaten laten zien dat de methodes aanzienlijk verschillen in de *opportunity-to-learn* die zij bieden ten aanzien van het leren van aftrekken tot 100. Natuurlijk is de *opportunity-to-learn* die een methode biedt niet noodzakelijkerwijze hetzelfde als de *opportunity-to-learn* die de leerkracht daadwerkelijk realiseert in zijn of haar reken-wiskundeonderwijs. Echter, gezien de grote invloed van reken-wiskundemethodes op wat en hoe (Nederlandse) leerkrachten onderwijzen, moet het belang van de mate waarin een methode overeenstemt met het beoogde curriculum en waarin deze het leren faciliteert, in geen geval worden onderschat.

noten

- 1 Dit artikel is gebaseerd op: Zanten, M. van & M. van den Heuvel-Panhuizen (in druk). Freedom of design: The multiple faces of subtraction in Dutch primary school textbooks. In Y. Li & G. Lappan (eds.), *Mathematics curriculum in school education*. Heidelberg, Germany: Springer.
- 2 Contexten kunnen ook worden gebruikt om iets toe te passen, bijvoorbeeld een oplossingsmethode die reeds is geleerd. In dat geval is er sprake van een prestatieverwachting. Deze twee functies van contexten – toepassen en didactische ondersteuning – worden in deze analyse strikt onderscheiden.
- 3 De handleidingen zijn niet betrokken in de analyse omdat we verwachten dat de invloed daarvan op de *opportunity-to-learn* minder eenduidig is dan de invloed van leerlingmaterialen. De handleiding kan bijvoorbeeld verschillend worden gehanteerd en geïnterpreteerd, en in verschillende mate overeenstemmen met de leerlingmaterialen. We hebben ons daarom gericht op materialen die de leerlingen zelf onder ogen krijgen en gebruiken. De handleidingen zijn wel geraadpleegd bij de controle van de analysegegevens.
- 4 Sommige deelpercentages lijken samen geen 100% te vormen. Dit wordt veroorzaakt door afrondingen.
- 5 Zie noot 4.
- 6 Hoewel de kop 'Reken uit op jouw manier' ook de connotatie heeft van een persoonlijk favoriete oplossingswijze.
- 7 Het gebruik van verschillende symbolische representaties is hierin niet meegeteld, omdat elke (formele) opgave per definitie een bepaalde symbolische representatie heeft.
- 8 Zie noot 4.
- 9 Zie noot 2.

literatuur

- Corte, E. De & L. Verschaffel (1987). The effect of semantic structure on first graders' strategies for solving addition and subtraction word problems. *Journal for Research in Mathematics Education*, 18(5), 363-380.
- Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*. Dordrecht/Boston/Lancaster: Reidel Publishing Company.
- Fuson, K.C. (1992). Research on whole number addition and subtraction. In: D.A. Grouws (red.). *Handbook of research on mathematics teaching and learning*. New York: MacMillan, 243-275.
- Haggarty, L. & B. Pepin (2002). An investigation of mathematics textbooks and their use in English, French and German Classrooms: Who gets an opportunity to learn what? *British Educational Research Journal* 28(4), 567-590.
- Hiebert, J. & D.A. Grouws (2007). The effects of classroom mathematics teaching on students' learning. In: F.K. Lester (red.). *Second handbook of research on mathematics teaching and learning*. Charlotte: NCTM, 371-404.
- Hop, M. (red.) (2012). *Periodieke Peiling van het Onderwijsniveau (PPON). Balans van het reken-wiskundeonderwijs halverwege de basisschool 5*. Arnhem: Cito.
- Heuvel-Panhuizen, M. van den (2008). Learning From "Didactikids": An Impetus for Revisiting the Empty Number Line. *Mathematics Education research Journal*, 20(3), 6-31.
- Heuvel-Panhuizen, M. van den (2012). Mathematics education research should come more often with breaking news. *Lecture on the occasion of receiving the*

- Svend Pedersen Lecture Award 2011*. Retrieved from http://www.mnd.su.se/polopoly_fs/1.75423.1328790378!/menu/standard/file/svendPedersenLecture_120205.pdf.
- Kraemer, J-M. (2011). *Oplossingsmethoden voor aftrekken tot 100*. Arnhem: Cito (proefschrift).
- Meelissen, M.R.M., A. Netten, M. Drent, R.A. Punter, M. Droop & L. Verhoeven (2012). *PIRLS en TIMSS 2011. Trends in leerprestaties in Lezen, Rekenen en Natuuronderwijs*. Nijmegen/Enschede: Radboud Universiteit/Universiteit Twente.
- Mullis, I., M. Martin & P. Foy (2008). *TIMSS 2007 International Mathematics Report. Findings from IEA's Trends in International Mathematics and Science Study at the Fourth and Eighth Grades*. Boston: TIMSS & PIRLS International Study Center, Lynch School of Education, Boston College.
- OCW (1993; 2006). *Kerndoelen basisonderwijs*. Den Haag: OCW.
- OCW (2009). *Referentiekader taal en rekenen*. Den Haag: OCW.
- Peltenburg, M., M. van den Heuvel-Panhuizen & A. Robitzsch. (2012). Special education students' use of indirect addition in solving subtraction problems up to 100 - A proof of the didactical potential of an ignored procedure. *Educational Studies of Mathematics*, 79, 351-369.
- Reys, B., R. Reys & O. Chávez (2004). Why mathematics textbooks matter. *Educational Leadership*, 61(5), 61-66.
- Scheltens, F., B. Hemker & J. Vermeulen (2013). *Periodieke Peiling van het Onderwijsniveau (PPON). Balans van het reken-wiskundeonderwijs aan het einde van de basisschool 5*. Arnhem: Cito.
- Schmidt, W., R. Houang & L. Cogan (2002). A coherent curriculum. The case of mathematics. *American Educator*, 26(2), 1-18.
- Selter, C., S. Prediger, M. Nührenböcker & S. Hußmann (2012). Taking away and determining the difference - a longitudinal perspective on two models of subtraction and the inverse relation to addition. *Educational Studies in Mathematics*, 79, 389-408.
- Stein, M.K. & M.S. Smith (2010). The influence of curriculum on students' learning. In: B.J. Reys, R.E. Reys & R. Rubenstein (red.). *Mathematics curriculum. Issues, trends, and future directions*. Reston: National Council of Teachers of Mathematics, 351-362.
- Torbeyns, J., B. De Smedt, N. Stassens, P. Ghesquière & L. Verschaffel (2009). Solving Subtraction Problems by Means of Indirect Addition. *Mathematical Thinking and Learning*, 11, 79-91.
- Usiskin, Z. (2008). The arithmetic curriculum and the real world. In: D. de Bock, B. Dahl Søndergaard, B. Gómez Alfonso & C. Litwin Cheng (eds.). *Proceedings of ICME-11-Topic Study Group 10: Research and Development in the Teaching and Learning of Number Systems and Arithmetic*, 11-16. Retrieved from <https://lirias.kuleuven.be/bitstream/123456789/224765/1/879.pdf>.
- Valverde, G.A., L.J. Bianchi, R.G. Wolfe, W.H. Schmidt & R.T. Houang, (2002). *According to the book. Using TIMSS to investigate the translation of policy into practice through the world of textbooks*. Dordrecht/Boston/London: Kluwer Academic Publishers.

reken-wiskundemethodes

- Bokhove, J., C. Borghouts, K. Kuipers & A. Veltman, A. (2009). *Rekenrijk*. Groningen/Houten: Noordhoff Uitgevers (materialen voor groep 4).
- Terpstra, P. & A. de Vries, A. (2010). *Reken Zeker* (leerlingenboeken voor groep 4). Groningen/Houten: Noordhoff Uitgevers (materialen voor groep 4).