
excellent rekenen: rekenen met (hoog)begaafde leerlingen

S. Sjoers
APS, Utrecht

1 inleiding

In het 'Referentiekader' (OCW, 2009) is er naast het *F*-niveau ook een *S*-niveau beschreven voor leerlingen die sneller dan gemiddeld door de rekenstof heen gaan. Toch blijkt dit streefniveau nog niet voldoende aan te sluiten op de onderwijsbehoeften van een bepaalde groep leerlingen: de (hoog)begaafde rekenaars. Voor deze leerlingen heeft APS een extra 'niveau' ontwikkeld: het zogenaamde *X*-niveau, waarbij de *X* verwijst naar excellent. Dit niveau bestaat uit uitdagende reken-wiskundeopdrachten uit alle vier de domeinen van het Referentiekader. Het *X*-niveau is vormgegeven in posters en een bijbehorende website met passend lesmateriaal.

Verder voert APS in 2012 en 2013 een SLOA-onderzoek uit naar hoe een leerlijn excellent rekenen er op po- en vo-scholen uit kan zien.

In dit artikel neem ik u mee op een ontdekkingsreis door het *X*-niveau. Ook bekijken we onderweg de opbrengsten van het lopende onderzoek: Wat zijn de resultaten van literatuurstudie en interviews? Wat zijn de ervaringen van scholen? Welke handvatten levert dit op voor scholen die aan de slag willen met een rekenlijn voor hun (hoog)begaafde rekenaars?

Plusklas rekenen, groep 5, Jeroen van 7 jaar maakt een ontdekkingsreis door het *X*-niveau en zijn aandacht wordt al snel getrokken door het Land van Okt: 'Wat leuk is dit, ik dacht dat ik alles al van rekenen wist, maar je kunt bij rekenen dus nog veel meer dan alleen maar sommen maken, waarom zetten ze dit niet in de rekenboeken?'

Deze ontdekkingsreis gaat door het *X*-niveau van rekenen. Ik hoop dat uw reactie eender zal zijn als die van Jeroen.

2 streefniveau ontoereikend

In 2008 werd het rapport 'Doorlopende Leerlijnen' gepresenteerd. Een rapport waarin een fundamenteel en een streefniveau rekenen beschreven

wordt, maar waar ook de opmerking staat dat dit hoogste niveau voor een deel van de leerlingen (naar schatting 20 procent) structureel beneden hun potentiële mogelijkheden ligt (Expertgroep Doorlopende Leerlijnen Taal en Rekenen, 2008, pag.24).

In een reactie van de PO-raad die volgde op dit rapport, was te lezen dat een extra niveau voor deze excellente rekenaars niet noodzakelijk werd bevonden, alhoewel 'het scholen wel een extra impuls kan geven om juist ook te gaan investeren in de bovenkant' (PO-raad, 2008).

Excellentie staat inmiddels in de schijnwerpers. En investeren in de bovenkant is noodzakelijk om ook onze beste leerlingen tot bloei te laten komen, wat met het oog op onze kenniseconomie van belang is.

In het 'Actieplan Beter presteren' (OCW, 2011) wordt dit onderschreven: 'Het is nu tijd om alles uit onze beste leerlingen te halen', luidt de ondertitel. En dat geldt dan natuurlijk ook bij het vak rekenen.

Maar ervaring leert dat scholen niet vanzelf massaal het initiatief nemen om te gaan investeren in de bovenkant. Dat moet aangezwengeld worden. Dit aanzwengelen is in volle gang.

3 x-niveau van eXcellent rekenen

APS heeft in 2012 een aantal uitdagende, creatieve ideeën verzameld om daarmee scholen te inspireren hoe rekenen voor (hoog)begaafde kinderen er uit kan zien.

Basis van het hele denken achter excellent rekenen zijn de hogere denkniveaus van de taxonomie van Bloom: in het nieuwe wiskunde-examenprogramma voor het vwo worden vragen die op de drie hoogste denkniveaus gesteld worden, ook wel 'denkactiviteiten' genoemd.

denkactiviteiten	Creëren	Bedenk een rechthoek waarbij oppervlakte = 24 m^2 en omtrek = 24 cm.
	Evalueren	Is de omtrek altijd gelijk bij verschillende rechthoeken met oppervlakte = 24 m^2 ?
	Analyseren	Welke verschillen zie je tussen rechthoeken met een oppervlakte van 24 m^2 ?
	Toepassen	Welke rechthoeken zijn mogelijk bij een oppervlakte van 24 m^2 ?
	Begrijpen	Wat moet de andere zijde zijn wanneer de ene zijde 8 is en de oppervlakte 24 m^2 ?
	Onthouden	Hoeveel is de oppervlakte van een rechthoek met zijden 3 en 8?

figuur 1: bron: Sjoers, 2012

In figuur 1 is te zien hoe op zes verschillende denkniveaus een vraag kan

worden gesteld over het berekenen van oppervlakte. (Hoog)begaafde leerlingen worden uitgedaagd door een beroep te doen op de hogere orde denkvaardigheden. Deze taxonomie geeft de mogelijkheid om binnen de toch wel heterogene groep van (hoog)begaafde leerlingen relatief eenvoudig te differentiëren, bijvoorbeeld door meerdere en complexere denkactiviteiten te formuleren:

De leerlingen die al doorhadden wat het geheim was van het magische vierkant in de plusklas van groep 3 [analyseren], kregen de opdracht er zelf één te maken [creëren], toen Karin er één had gevonden, vroeg juf of ze ook een magisch vierkant kon maken van 4 bij 4 [ook weer creëren, maar nog complexer].

Er is er voor de vier domeinen in het najaar van 2011 een groot aantal denkactiviteiten verzameld en geformuleerd. Gebaseerd op de referentieposters van APS voor het *F*- en *S*-niveau (APS, 2009) zijn deze denkactiviteiten verwerkt op *X*-posters.¹ Het *X*-niveau van eXcellent rekenen was geboren. Het *X*-niveau is weliswaar geen officieel niveau, maar vormt voor scholen een bron van inspiratie om een passend rekeraanbod voor (hoog)begaafde leerlingen te gaan ontwikkelen.

X-posters

Er zijn twee versies van de *X*-posters ontwikkeld:

- *X*-poster voor leerlingen in het basisonderwijs, vormgegeven op een blauwe poster.
- *X*-poster voor leerlingen onderbouw voortgezet onderwijs, vormgegeven op een oranje poster.

Deze *X*-posters zijn in 2012 gepresenteerd op de Panama-conferentie. Scholen maken inmiddels veel gebruik van de posters. Vaak worden deze in plusklassen als verrijkingsmateriaal ingezet.

Echter, de poster was niet compleet, kregen we van scholen te horen: er ontbrak inhoud. Deze inhoud is aan de posters toegevoegd door een prezi gevuld met uitdagende rekenopdrachten toe te voegen aan de *X*-posters.² In deze prezi is allerlei lesmateriaal verzameld uit diverse bronnen, passend bij de onderwerpen van de *X*-poster. Het is een groeidocument, dus de prezi wordt regelmatig aangevuld met opdrachten. Zo kreeg ik recent een mail van een plusklas met daarin een aanvulling voor de prezi:

Onze juf van de plusklas had vorige week een opdracht waarbij we de zaden van uitgebloeide zonnebloemen moesten kleuren en tellen. Wist u dat hier ook de Fibonacci-reeks in terug te vinden is?

Een voorbeeld uit de prezi is een opdracht die hoort bij het onderwerp 'grote getallen'. Leerlingen onderzoeken bij het maken van een planetarium naar de werkelijke afstanden tussen de planeten en moeten zelf een

passende schaal bedenken. Deze opdracht werd in een plusklas erg gewaardeerd, want het paste uitstekend in het project 'Ruimte' waar de hele school mee bezig was, toen de Nederlandse astronaut André Kuipers nog in het internationale ruimtestation zat.

We hoorden van deze school dat het hen erg was meegevallen dat ze betrekkelijk eenvoudig het onderwijs voor hun (hoog)begaafde leerlingen zo interessant konden maken.

verschil S- en X-niveau

Waarin verschilt het *x*-niveau dan van het streefniveau? Het *x*-niveau is een niveau dat wél tegemoet komt aan de onderwijsbehoeften van deze 20 procent best presterende leerlingen. Het is een niveau dat niet kwantitatief verschilt van het streefniveau, maar juist kwalitatief. Het *x*-niveau start vanaf het punt waar hoogbegaafde rekenaars de rekenstof interessant gaan vinden en komt tegemoet aan de talloze vragen van hoogbegaafde rekenaars zoals: Tot hoever loopt dat metriek stelsel dan door? Wat is het kleinste deeltje dat je nog kunt meten? Of, zoals een jongetje in groep 2 aan zijn leerkracht vroeg: 'Wat is googleplex?'

4 van poster naar onderzoek

Maar een poster en een prezi vormen nog geen traject. Wat is er dan nog meer nodig om een traject excellent rekenen voor (hoog)begaafde rekenaars te realiseren? In 2011 heeft APS bij het Ministerie van OCW een aanvraag voor een SLOA-onderzoek ingediend om zo onze ideeën over excellent rekenen te gaan toetsen. Begin 2012 is APS gestart met dit onderzoek met als doel het ontwikkelen van een doorlopende leerlijn van primair onderwijs naar de onderbouw van het voortgezet onderwijs. De onderzoeksvraag luidt:

Welke aanpakken zijn uitdagend en motiveren hoogbegaafde leerlingen bij rekenen-wiskunde tot het bereiken van een eXcellent rekenniveau en hoe kunnen de succesvolle ingrediënten uit deze aanpakken tot een schoolbreed traject/aanpak worden gebracht waarmee scholen excellent reken-wiskunde-onderwijs kunnen vormgeven en inrichten? Hoe kunnen deze trajecten in po en vo op elkaar afgestemd worden zodat het een doorgaande leerlijn eXcellent rekenen vormt?

Na literatuurstudie en interviews kwamen we tot drie succesvolle ingrediënten waaraan de trajecten moeten voldoen:

- 1 In de trajecten moeten inhouden uit alle vier de domeinen aan de orde komen. Een inventarisatie van bestaand verrijkingsmateriaal leerde

ons dat verrijking bij het vak rekenen-wiskunde met name gehaald wordt uit het domein meetkunde (waarbij opdrachten rondom werk van Escher op nummer 1 staan).

- 2 De trajecten mogen geen lesstof bevatten uit vervolgcursussen of vervolgoopleiding, anders wordt het probleem van het gebrek aan passende lesstof voor (hoog)begaafde leerlingen alleen maar verplaatst. In het rapport Doorlopende Leerlijnen staat het advies om verdieping te zoeken in onderwerpen als de structuur van het getalsysteem of Egyptische breuken.
- 3 De trajecten moeten aansluiten op de specifieke onderwijsbehoeften van deze groep rekenaars, waardoor de motivatie voor het vak rekenen (weer) toeneemt.

eigenschappen en onderwijsbehoeften (hoog)begaafde rekenaars

Het onderzoek is gestart met een literatuurstudie naar eigenschappen van (hoog)begaafde rekenaars. Enkele kenmerken van (hoog)begaafde rekenaars zijn:

- ze kunnen gemakkelijk relaties en (causale) verbanden leggen;
- ze kunnen snel problemen analyseren;
- ze zijn vindingrijk in oplossingsmethoden;
- ze kunnen grote denksprongen maken;
- ze kunnen goed abstract denken;
- ze bezitten creatief denkvermogen.³

Uit deze eigenschappen is af te leiden wat excellente rekenaars nodig hebben om uitgedaagd te worden en gemotiveerd te blijven: open, creatieve opdrachten. De opbrengsten uit literatuurstudie hebben we in interviews met leerlingen, docenten en schoolleiders getoetst: leerlingen gaven aan hier inderdaad behoefte aan te hebben. Docenten gaven aan dat de reguliere lesmethoden niet aansluiten op bovenstaande onderwijsbehoeften. Een leerling uit 2-vwo vatte het mooi samen: 'Wij willen niet meer van hetzelfde, wij willen wat anders'.

Na de interviews hebben we op de po-scholen, havo- en vwo-scholen met de leerlingen en docenten gewerkt aan het ontwikkelen van een lessenserie voor (hoog)begaafde rekenaars. Deze lessenserie is in het onderzoek een te maken tussenstap op weg naar de trajecten. Leerlingen en docenten werden hierbij gevoed met zogenoemd inspiratiemateriaal. Dit inspiratiemateriaal bevat onder andere het 'Actieplan Beter presteren' (Ministerie van OCW, 2011), bijlage 1 'Hoe leren leerlingen eigenlijk rekenen?', uit het protocol ERWD vo (Van Groenestijn, Van Dijken & Janson, 2012), de waaier 'Excellentie in ontwikkeling' (LPC, 2011), x-posters (APS, 2011) en de resultaten van de interviews met leerlingen, docenten en schoolleiding van de

betreffende scholen. Elke deelnemende school heeft een unieke lessenserie ontwikkeld: van een serie over Pythagoras in Emmen tot een over het metriek stelsel XXXS in Dronten.

Voordat deze lessenserie uitgevoerd gaat worden, krijgen de 20 procent best presterende leerlingen van alle deelnemende scholen eerst de APS-rekentoets aangeboden om het startniveau vast te stellen (2F-toets voor groep 8, 3F-toets voor 2 havo en 2 vwo), en meten we met de PMT-K-test (Hermans, 1976) de motivatie. Vervolgens wordt in één klas de ontwikkelde lessenserie uitgevoerd en in de parallelklas blijft de docent lesgeven als voorheen. Op het moment van dit schrijven bevindt het onderzoek zich in deze fase. Na deze periode vindt in beide klassen de nameting plaats met de APS rekentoets en PMT-K. Hiermee willen we meten of de lessenserie excellent rekenen een positieve invloed heeft op de motivatie en rekenprestaties van hoogbegaafde rekenaars in po en vo. Aan de hand van evaluatie van deze toetsen en evaluatiegesprekken met leerlingen en docenten, wordt de lessenserie aangescherpt en zullen we de ervaringen op de scholen bundelen tot een format van een traject dat andere scholen kunnen gaan gebruiken om een traject op maat te ontwikkelen voor hun eigen schoolsituatie. In de laatste fase van het onderzoek vindt afstemming tussen de trajecten in po en vo plaats om zo tot de gewenste leerlijn excellent rekenen te komen.

5 handvatten voor leerlijnen

Voor deze laatste fase van het onderzoek, die van traject naar leerlijn, hebben interviews en literatuurstudie al een aantal belangrijke aandachtspunten opgeleverd:

- 1 Routeboekjes werken niet voor alle (hoog)begaafde leerlingen. Het gevaar van het schrappen van oefenmateriaal is voor sommige leerlingen te groot. (Hoog)begaafde leerlingen hebben nog al eens (onverwacht misschien) hiaten in hun rekenkennis. Een van de meest genoemde hiaten is het ontbreken van gememoriseerde tafelsommen (Noteboom & Klep, 2004). Door de cognitieve capaciteiten kunnen deze leerlingen tafelsommen heel snel uitrekenen, de tafels zijn dus wel geautomatiseerd. Maar de snelheid van oplossen ligt nog altijd lager dan bij gememoriseerde tafelskennis. Om leerlingen tot memoriseren van tafels te verleiden, hebben we leerlingen een opdracht aangeboden waarbij gememoriseerde tafels noodzakelijk waren om de opdracht snel en goed te kunnen maken. Dit was een opdracht om met behulp van de zeef van

Eratostenes de priemgetallen zo snel mogelijk af te leiden. Door deze leerlingen te laten ervaren dat gememoriseerde tafelnis noodzakelijk is om deze boeiende opdrachten te kunnen maken, ontstond voor het eerst de motivatie om de tafels te gaan leren. Tafelsommen als middel, niet als doel. Dit vraagt dan ook om andere oefenstof en niet per definitie om minder oefenstof.

Femke (8 jaar): Tafelsommen zijn niet het allerlaatste wat je kunt doen met vermenigvuldigen, maar eigenlijk het begin van véél interessantere dingen zoals priemgetallen en machtsverheffen.

Een ander voorbeeld is beschreven door de wetenschapper Kruteskii in de jaren zeventig van de vorige eeuw. Hij beschrijft de leerling Sonia die, als ze in groep 4 zit, kan wedijveren met leerlingen uit groep 8 bij het oplossen van problemen. Kruteskii wijst hierbij op het feit dat Sonia natuurlijk minder 'weet' (de leerstof), maar dat ze snel en efficiënt redeneert, verbanden legt en zo oplossingen geeft (Kruteskii, 1976). Om het kennisniveau op het ontwikkelingsniveau te krijgen en te houden, is aandacht voor leerstof nodig in de vorm van instructie en oefenstof op maat.

- 2 Een tweede handvat is leerlingen betrekken bij het opzetten van de leerlijn. Door leerlingen hierbij te betrekken, kwamen heel creatieve ideeën naar voren. Door deze op te nemen, voelen leerlingen zich mede-eigenaar van de rekenlijn, wat een positieve invloed heeft op de motivatie. Deze leerlingen hebben de capaciteiten om met leuke creatieve oplossingen komen, zoals de Kieskast in Dronten. Daar stelden de leerlingen een Kieskast samen: spelletjes, puzzeltjes, oefenmateriaal, enzovoort gerubriceerd naar domein: groen voor getallen, rood voor meetkunde, geel voor verhoudingen en blauw voor verbanden. Leerlingen vullen de Kieskast voortdurend aan en sluiten elke rekentaak af met een onderdeel eruit van het domein waar ze aan hebben gewerkt.
- 3 Het voldoende ruimte geven voor het maken van keuzes, is handvat nummer 3. Bij de Kieskast is dat het geval, maar ook het kiezen van onderwerpen van de x -poster in de plusklaslessen. Omdat de opdrachten van de x -poster vaak buiten de comfortzone van de leerling liggen, is de ervaring op scholen dat leerlingen voor het eerst bij rekenen gaan ervaren dat ze iets niet kunnen. Dit is een voor de leerling moeilijk, maar belangrijk moment. Het kunnen kiezen van een onderwerp waar de interesse ligt, is dan een veilige start om de stap naar de zone van de naaste ontwikkeling te zetten. Bij het oefenen van basisvaardigheden kan het hebben van keuze de motivatie vergroten.

Groep 8, leerkracht heeft blad met oefenopgaven gemaakt met 20 opgaven over procenten: 'Kies van deze 20 opgaven eens 10 opgaven waarvan jij denkt dat je ze nog moet maken om de stof te beheersen'.

- 4 Ten slotte is passende instructie heel belangrijk, passend bij de manier van leren van deze kinderen. Passende instructie start met een goede opening van de rekenles: dit is goed voor alle leerlingen, niet alleen voor (hoog)begaafde leerlingen. Zo wordt de voorkennis geactiveerd en wordt de nieuwsgierigheid geprikkeld, een beïnvloedende factor wanneer het gaat om leren (Harty & Beall, 1984):

Toen in de plusgroep van groep 3 als lesopening een magisch vierkant op het bord kwam, ontstond er geroezemoes. Na een tijdje vroeg de juf: 'Wat is er zo bijzonder aan dit vierkant?' Leerlingen die het sneller zagen dan de anderen, kregen een vervolgoopdracht: 'Maak er zelf eens zo een'. Karin van 6 kwam aan het eind van de les vertellen dat ze dit soort dingen zo leuk vindt: 'Het is een kietelvraag, juf!'

De denkactiviteit kan altijd de lesopening zijn en daarmee de kern van de instructie vormen. (Hoog)begaafde leerlingen kunnen hun bestaande kennis in hoge mate met elkaar verbinden en nieuwe kennis daar vaak direct aan koppelen. Door het kunnen maken van deze denksprongen, zijn ze in staat snel af te leiden welke lesstof hoort bij de denkactiviteit. Hierdoor hebben (hoog)begaafde leerlingen minder instructie over de inhoud nodig: globale hints die leerlingen in de goede richting wijzen, zijn dan voldoende (Van Dijk, Eysink & De Jong, 2012). Een vooroordeel is dat hoogbegaafde leerlingen helemaal geen instructie nodig hebben. Ook zij hebben zeker instructie nodig, maar wel op een manier die aansluit op de kenmerken van deze groep leerlingen. Naar instructie aan (hoog)begaafde leerlingen op het gebied van rekenen is nog weinig onderzoek gedaan. Het model van directe instructie en het zelfontdekkend leren werd door meerdere leerkrachten en leerlingen als een plezierige, effectieve methode ervaren.

6 tot besluit

Hier eindigt de ontdekkingsreis, maar het onderzoek loopt nog door. De trajecten moeten nog geëvalueerd worden en op basis van de trajecten en de evaluaties wordt vervolgens de leerlijn excellent rekenen opgesteld. In het najaar van 2013 zullen alle resultaten beschikbaar zijn. Gezien de reactie van een leerling uit groep 7 die meewerkt aan dit onderzoek, zal het onderzoek wat ons betreft ook een vervolg krijgen, om het rekenonderwijs nog beter af te kunnen stemmen op hoogbegaafde leerlingen: 'Als dit rekenen is, hoop ik dat er nog véél meer x-posters gemaakt worden...'

noten

- 1 Zie: www.aps.nl
- 2 Via de website www.excellentrekenen.nl is deze prezi te downloaden.
- 3 Zie: www.hoogbegaafdheid.slo.nl

literatuur

- APS (2009). *F-posters en S-posters*. Utrecht: APS.
- APS (2011). *X-posters, rekenposters voor hoogbegaafden*. Utrecht: APS.
- Dijk, A.M. van, T. Eysink & T. de Jong (2012). *Instructie, structuur en ondersteuning op maat voor verschillende competentieniveaus*. Wageningen: Paperpresentatie op Onderwijs Research Dagen.
- Expertgroep Doorlopende Leerlijnen Taal en Rekenen (2008). *Over de drempels met taal en rekenen*. Enschede: Expertgroep Doorlopende Leerlijnen.
- Groenesteijn, M, van, G. van Dijken & D. Janson (2012). *Protocol Ernstige Reken-Wiskunde-problemen en Dyscalculie VO*. Assen: Koninklijke Van Gorcum.
- Harty, H. & D. Beall (1984). *Toward the developments of a children's science curiosity measure*. *Journal of Research in Science Teaching*, 21(4), 425-436.
- Hermans, H.J.M. (1976). *Motivatie en prestatie*. Amsterdam: Swets & Zeitlinger.
- Krutestkii, V.A. (1976). *The psychology of mathematical abilities in school children*. Chicago, IL: University of Chicago Press.
- LPC (2011). *Excellentie in ontwikkeling*. Utrecht: APS.
- Noteboom, A., J. Klep (2004). *Compacten in het reken-wiskundeonderwijs voor begaafde en hoogbegaafde leerlingen in het basisonderwijs*. Enschede: SLO.
- OCW (2009). *Referentiekader taal en rekenen*. Den Haag: OCW.
- OCW (2011). *Actieplan Beter presteren*. Den Haag: OCW.
- PO-raad (2008). *Advies aan staatssecretaris Dijksma over referentieniveaus taal en rekenen*. Utrecht: PO-raad.
- Sjoers, S. (2012/2013). *eXcellent rekenen, rekenen voor hoogbegaafde leerlingen. Volgens Bartjens*, 32(1), 4-7.
- SLO (2013). *Begaafdheidskenmerken*. Via www.hoogbegaafdheid.slo.nl (april).