Verschillen tussen kinderen in de ontwikkeling van het leren vermenigvuldigen

S. van der Ven & E. kroesbergen[1]
Universiteit van Amsterdam/Universiteit Utrecht

1 inleiding

Het leren van een nieuwe vaardigheid, zoals rekenen, is een proces dat geen rechte lijn volgt. Kinderen lijken zich sprongsgewijs te ontwikkelen: tot frustratie van de moderne leerkracht, gericht op opbrengstgericht werken, valt een kind steeds maar terug op oude, ingesleten gewoontes, zoals tellen op de vingers, en lijkt het soms of het niets in de les heeft opgestoken. Een tijdje later verloopt de ontwikkeling ineens razendsnel en gebruikt het kind veel slimme, nieuw geleerde strategieën, hoewel nog steeds af en toe een terugval zichtbaar is. Het lijkt erop dat kinderen over een repertoire aan strategieën beschikken, waaruit ze soms, maar lang niet altijd de handigste strategie kiezen die ze tot hun beschikking hebben. Dit is niet uniek voor kinderen: zelfs op volwassen leeftijd blijken veel mensen sommen die ze eigenlijk al lang geautomatiseerd hebben, zoals 8 + 7, in de praktijk toch regelmatig nog even na te rekenen.

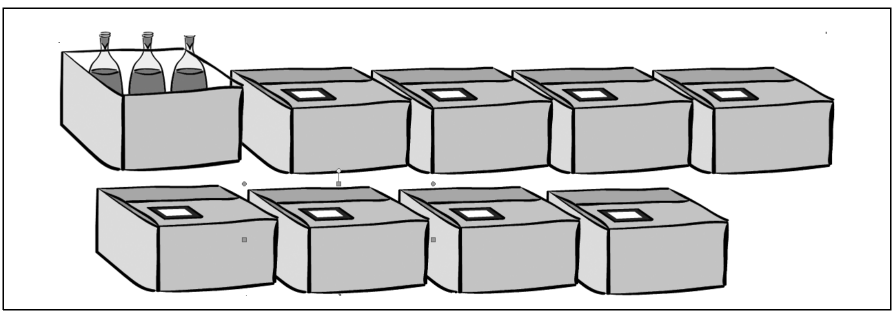
2 overlappende golven

Ruim vijftien jaar geleden zag Robert Siegler (1996) een patroon in deze ogenschijnlijke chaos. Het gebruik van een strategie komt geleidelijk op als het kind ermee kennis maakt: eerst langzaam, dan steeds sneller. Het gebruik daalt vervolgens weer langzaam wanneer het kind betere alternatieven ontdekt. Dit patroon lijkt op het stijgen en dalen van golven in de branding. Siegler noemde dit dan ook *Overlapping Waves*. Op ieder moment in de ontwikkeling heeft het kind de keuze uit meerdere strategieën: de golven lopen door elkaar heen. Welke strategieën een kind precies gebruikt, en welke het meest gekozen worden, verschuift in de loop

van de ontwikkeling geleidelijk naar steeds slimmere strategieën.
Er is inderdaad enige ondersteuning gevonden voor deze hypothese. Zo bleek dat in het begin van groep 4, Franse kinderen bij het uitrekenen van vermenigvuldigsommen een mix aan strategieën gebruikten, maar vooral veel gebruik maakten van optelstrategieën. Halverwege en aan het eind van het jaar was dit een stuk minder geworden, maar nog niet verdwenen. Deze resultaten tonen overlap aan tussen de strategieën, maar nog niet dat deze strategieën ook echt een patroon van golven vormen. Met slechts drie metingen is dit ook niet te achterhalen. Uitgebreider onderzoek is dus noodzakelijk.

3 ons eigen onderzoek

In ons onderzoek hebben we daarom gedetailleerder gekeken hoe de ontwikkeling van het leren vermenigvuldigen verloopt. Daartoe hebben 98 kinderen uit groep 4 in februari en maart elke week, in totaal acht keer, een korte vermenigvuldigtaak gemaakt. Deze taak bestond uit een aantal kale sommen en een aantal contextsommen met een kort verhaaltje en een plaatje (fig.1)).



figuur 1

De specifieke context was elke week verschillend, om herkenningseffecten te voorkomen. De sommen varieerden van vrij gemakkelijk (7×2) tot behoorlijk pittig (6×8). We keken niet alleen naar de juistheid van de gegeven antwoorden, maar vooral naar de strategieën die de kinderen gebruikten. Daarom zat er steeds een proefleider naast het kind, die observeerde en navroeg hoe het kind elke som had aangepakt. Aan de hand van deze wekelijkse metingen hebben we gekeken of het model van de overlappende golven van Siegler inderdaad een goede omschrijving vormt van het leerproces.

4 verschillende strategieën

De sommen werden door de kinderen op allerlei manieren uitgerekend. In totaal konden we maar liefst 34 verschillende strategieën en combinaties van strategieën identificeren. Dat was te veel voor de statistische methoden die we wilden gebruiken, maar we konden dit aantal terugbrengen tot vijf categorieën:

1 *Foute strategieën*
Foute strategieën geven aan dat het kind niet goed weet wat te doen met een som. Voorbeelden zijn gokken, zeggen ‘ik weet het niet’ en optellen ($7 \times 4 = 11$).

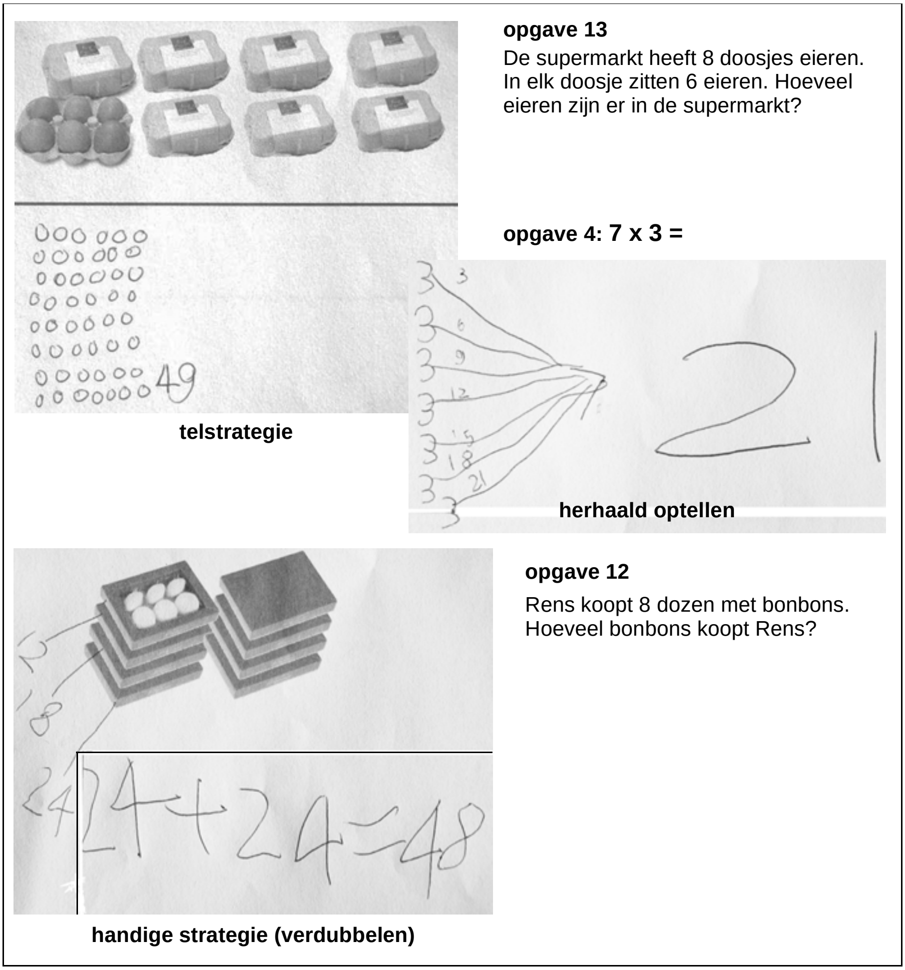
2 *Telstrategieën*
Het kind lost de som tellend op. Dit kan op de vingers of hardop gebeuren, of het kind maakt een tekening van de situatie. Een voorbeeld van zo’n tekening staat in figuur 2. Een telstrategie is een correcte strategie, maar de uitvoering is bewerkelijk. Het duurt lang en de kans op het maken van een fout is groot.

3 *Herhaald optellen*
Het kind gebruikt het al goed ingesleten optellen om tot een antwoord te komen: $5 \times 4 = 4 + 4 + 4 + 4 + 4$. Dit is een efficiëntere strategie dan de telstrategieën. Het aantal tussenstappen is immers flink gereduceerd. Ook hiervan is een voorbeeld te zien in figuur 2.

4 *Handige strategieën*
Bij de handige strategieën maakt het kind gebruik van bestaande kennis om via een kortere route dan herhaald optellen tot een antwoord te komen. Voorbeelden zijn verdubbelen, zoals in figuur 2 voor het oplossen van 6×8: $8 + 8 + 8 = 24$; $24 + 24 = 48$, of het gebruiken van kapstokken, zoals de relatief gemakkelijke tafels van 10 en 5 (bijvoorbeeld $6 \times 4 = 5 \times 4 + 4 = 20 + 4 = 24$).

5 *Geautomatiseerd*
Het kind heeft het juiste antwoord paraat, zonder dat er nog een berekening hoeft te worden uitgevoerd. In het huidige onderwijs is het streven nog steeds dat het kind de tafels onder de 10 leert te automatiseren. Dit stadium hoeft echter ten tijde van ons onderzoek, halverwege groep 4, nog niet bereikt te zijn.

Duidelijk is dat er in het algemeen een stijgende lijn zit in de mate van geavanceerdheid van deze strategieën. De statistische analyses die we hebben uitgevoerd, werken dan ook onder de aanname dat je een bepaald niveau van strategiegebruik alleen kunt bereiken na beheersing van de eerdere niveaus.



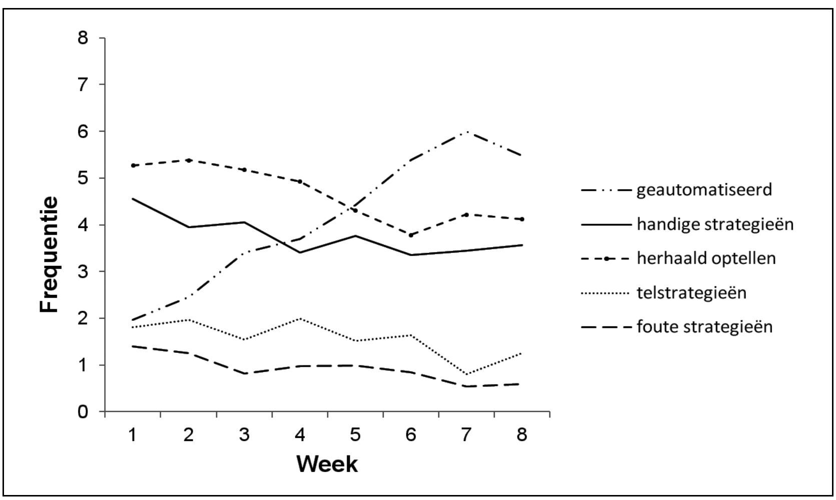
figuur 2: voorbeelden van verschillende strategieën

Voor de eerste vier strategieën lijkt het vrij duidelijk dat deze aanname geldig is. Je kunt bijvoorbeeld niet herhaald optellen als je niet kunt tellen. Er is meer discussie over de vraag of het vijfde niveau, ‘geautomatiseerd’, inderdaad het meest geavanceerde niveau van strategiegebruik is. Door ‘stampen’, bijvoorbeeld door het herhaaldelijk opdreunen van de tafels zonder daarbij aandacht te besteden aan onderliggend begrip, is het immers mogelijk om sommen te memoriseren zonder de voorgaande niveaus te beheersen.

Toch gaan wij er in dit onderzoek vanuit dat dit niveau inderdaad het meest geavanceerd is. In de huidige reken-wiskundemethodes wordt immers vrijwel zonder uitzondering gebruik gemaakt van realistische methodes. Hierin worden, in tegenstelling tot vroeger, de tafels niet of nauwelijks nog gememoriseerd door herhaaldelijk opdreunen. In plaats daarvan wordt er veel meer aandacht besteed aan een goed conceptueel begrip van de bewerking en het kunnen toepassen van eigen oplossingsmethodes, zoals beschreven in de overige categorieën van strategiegebruik. Het memoriseren van rekenfeiten is nog steeds een doel, maar ingebed in het gebruik van andere strategieën wordt dit doel pas bereikt als het kind ook tot het gebruik van andere strategieën in staat is. Wanneer deze aanname echt verkeerd blijkt, zal dit zijn weerslag hebben op de resultaten. Dit was gelukkig niet het geval. Bovendien zat er eenzelfde stijgende lijn in de mate waarin het gebruik van elke strategie tot een goed antwoord leidde. Wanneer er een foute strategie werd gekozen, was het antwoord slechts in 2 procent van de gevallen goed. Tellen ging vaker goed: in 55 procent van de gevallen. Bij herhaald optellen ging 62 procent goed, bij de handige strategieën 68 procent en de geautomatiseerde sommen waren in 85 procent van de gevallen correct.

5 een globaal beeld van de resultaten: groepsgemiddelden

Bij een eerste, globale analyse bleek dat kinderen, zoals we verwachtten, inderdaad variabiliteit in strategiegebruik lieten zien. Per sessie maakten vrijwel alle kinderen gebruik van strategieën uit meerdere van de hiervoor genoemde categorieën: meestal waren dat er twee tot vier van de vijf.



figuur 3: gemiddeld verloop van strategiegebruik

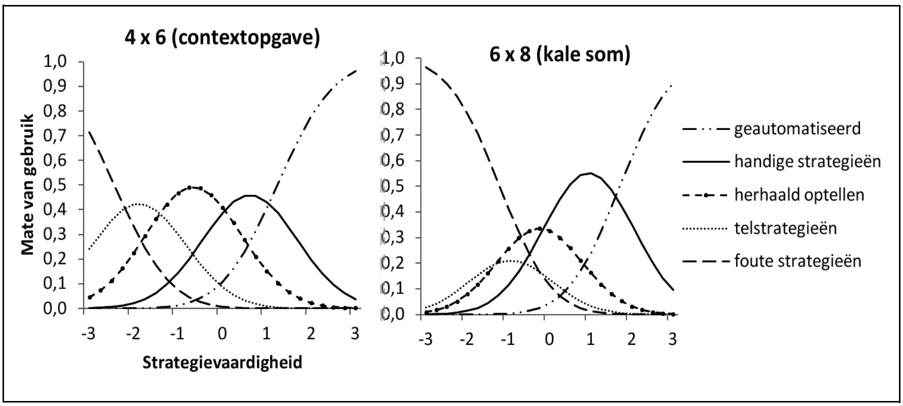
Ook vonden we, in overeenstemming met de theorie van overlappende golven, aanwijzingen voor een globale vooruitgang in strategiegebruik: er zit een stijgende lijn in de mate waarin sommen geautomatiseerd waren (fig.3). Ook bleek er sprake te zijn van regelmatige terugvallen. Ter illustratie: vaak lieten kinderen zien dat ze een som in principe hadden geautomatiseerd, door zonder gebruik van een rekenstrategie direct het correcte antwoord te geven. Ze beheersten dus het hoogste niveau. Toch vielen ze in 22 procent van de gevallen terug op een lagere strategie, wanneer dezelfde som in een latere week opnieuw werd aangeboden.Wel is duidelijk dat er geen patroon van golven zichtbaar is in figuur 3.
Toch is dit niet verbazingwekkend. De figuur is immers een gemiddelde van zo'n honderd kinderen, die weliswaar allen in groep 4 zitten, maar zeker niet allemaal even ver in hun ontwikkeling zijn. Dit kan het patroon van de golven sterk verstoren. Wanneer de lijn van een bepaalde strategie horizontaal loopt, kan het in theorie betekenen dat er geen enkele ontwikkeling is in het gebruik van deze strategie, maar het is even goed mogelijk dat sommige kinderen een daling in die strategie laten zien en anderen een stijging. In dat laatste geval kan er wel degelijk op individueel niveau sprake zijn van overlappende golven, maar het gemiddelde van al die golven levert geen duidelijk herkenbare golven meer op. Kortom: het volstaat niet om slechts te kijken naar gemiddeldes op groepsniveau. In plaats daarvan moet er een onderscheid gemaakt worden waarbij wordt gekeken hoe ver kinderen gevorderd zijn in hun ontwikkeling.

6 toetsing van de theorie van de overlappende golven

Daarom hebben we verder gekeken met behulp van geavanceerde statistische technieken: een combinatie van de itemresponstheorie en het gebruik van latente groeicurven. Met deze combinatie van technieken kan gekeken worden of het patroon van strategieën die kinderen gebruiken lijkt op een golfpatroon (het *Graded Response Model* van Samejima, 1969, uit de itemresponstheorie) en of dat patroon in de loop van de tijd voorspelbaar verandert naar het gebruik van steeds geavanceerdere strategieën (latente groeicurven).

Het *Graded Response Model* definieert de globale vorm en positie van de curves: uiterst links komt altijd de foute strategie, en elke volgende strategie komt een stukje meer naar rechts. Bij het uitvoeren van de analyses wordt er gekeken hoe de curves er precies uitzien om het best te kloppen bij de gegevens van de kinderen. Er wordt bepaald wat de precieze hoogte is van de curve van elke strategie, en ook hoe ver de curves precies uit

elkaar liggen. Daarna wordt er gekeken hoe precies de oorspronkelijke data passen bij deze curves; is het golfmodel een goede beschrijving van alle gegevens, of zijn er veel kinderen of sommen die juist helemaal niet in het model passen en zich heel anders ontwikkelen? Dit wordt aangeduid met *fit indices*. De fit van ons model was, zeker gezien de uitzonderlijk hoge complexiteit, redelijk tot goed.[2] Gemiddeld genomen ontwikkelen kinderen zich dus inderdaad volgens de theorie van de overlappende golven.
Er is in de analyses rekening gehouden met het feit dat de ene som de andere niet is: het is immers aannemelijk dat kinderen met gemakkelijke sommen al verder in hun ontwikkeling zijn dan met moeilijke sommen. Bovendien zullen sommige sommen zich meer dan andere lenen voor het gebruik van handige strategieën. Ook kan het uitmaken of een som kaal of in een context wordt aangeboden. Daarom zijn de curves voor elke som apart bepaald.



figuur 4: de overlappende golven van twee sommen

Het model in figuur 4 toont de uiteindelijke curves voor twee van de sommen. Uit de figuur blijkt dat het patroon van overlappende golven goed te herkennen is. Vooral bij de som 4×6 is dit het geval. Langs de horizontale as staat de strategievaardigheid van het kind: hoe hoger de vaardigheid, hoe meer naar rechts het kind zich bevindt en hoe meer het kind gebruik maakt van de geavanceerdere strategieën. De sommen zijn aan elkaar gekoppeld: de strategievaardigheidscore van een kind is hetzelfde voor alle sommen. Langs de verticale as staat de mate van gebruik weergegeven, oftewel de waarschijnlijkheid dat een kind met een bepaalde vaardigheid elke strategie zal gebruiken. Een waarschijnlijkheid van 0.5 betekent dat er 50 procent kans is dat het kind deze strategie zal kiezen. Een kind met een vaardigheid van 0 heeft bijvoorbeeld een kans van ongeveer 40 procent om de som 4×6 op te lossen met herhaald optellen, en nog eens 40% om een handige strategie te kiezen. De kans op een telstrategie is zo'n 10%, evenals de kans dat het kind gebruik maakt van geautomatiseerde kennis, en de kans op een foute strategie is vrijwel 0. Helemaal links, bij een lage vaardigheid, is het juist vrij zeker dat het kind een foute strategie zal gebruiken. In de loop van de ontwikkeling schuift het kind langzaam maar zeker naar rechts in de figuur. De getallen op de horizontale as zijn arbitrair: in ons geval zijn ze zo gekozen dat het nulpunt halverwege de studie ligt. Een precies gemiddeld kind had dus halverwege de studie een vaardigheid van 0, maar dat verschilde uiteraard tussen kinderen.[3] In de loop van de acht weken van de studie verschoven de kinderen gemiddeld 0,97 punt naar rechts, maar ook hiervoor gold dat het ene kind zich veel sneller ontwikkelde dan het andere.[3]

7 verschillende soorten sommen

Wat verder in het oog springt, is dat de golven voor beide voorbeeldsommen verschillend zijn. Voornamelijk opvallend is dat de curve van de telstrategieën bij de som 6×8 nauwelijks van de grond komt. Dit patroon bleek ook bij andere kale sommen terug te vinden. Bij contextsommen zoals 6×4 is er wel een mooie 'telgolf'. Dit betekent dat het voor kinderen met een lage vaardigheid veel verschil maakt hoe een som wordt aangeboden. Wellicht begrijpen ze de notatie van een kale som als 7×3 nog niet. Als ze deze interpreteren als '7 kruisje 3', kunnen ze dit logischerwijs niet uitrekenen. Wordt deze som echter in een verhaaltje aangeboden, dan begrijpen ze dit wel, en kunnen ze tellend tot een antwoord komen. Op dit niveau is het begrip van vermenigvuldigen dus alleen nog impliciet. Wanneer kinderen de notatie van een kale som wel begrijpen, is hun vaardigheid ook ver genoeg gevorderd om nauwelijks nog van telstrategieën gebruik te maken.

Wat niet in de figuur te zien is, maar wel duidelijk uit onze gegevens bleek, is dat de gekozen strategie ook samenhing met de juistheid van het gegeven antwoord: hoe slimmer de strategie, des te vaker was het gegeven antwoord correct. Dit is logisch: slimmere strategieën vereisen minder tussenstappen, dus bieden minder gelegenheid om rekenfouten te maken. Bovendien zijn alleen de kinderen die al verder gevorderd zijn in staat om slimmere strategieën toe te passen. Strategiegebruik en accuratesse gaan zo hand in hand.

8 goede en zwakke rekenaars: de verschillen

Naast het bevestigen van de overlappende golven hadden we nog een tweede vraag: hoe kunnen we verklaren dat sommige kinderen snel alle golven doorlopen terwijl andere kinderen daar meer tijd voor nodig hebben? Als we weten over welke vaardigheden goede rekenaars beschikken, biedt dat immers aanknopingspunten voor het ondersteunen van zwakke rekenaars. Ons vermoeden was dat het vermogen om informatie kort vast te houden, oftewel het werkgeheugen, hier wel eens een sleutelrol in zou kunnen spelen. Uit eerder onderzoek is immers al bekend dat kinderen met een goed werkgeheugen doorgaans ook betere rekenaars zijn, terwijl kinderen met rekenproblemen vaak een lage werkgeheugencapaciteit hebben (Een uitgebreid *review* is te vinden in Raghubar, Barnes, & Hecht, 2010). Ons vermoeden was dat dit verband tussen werkgeheugen en rekenprestaties wel eens te maken zou kunnen hebben met het strategiegebruik van de kinderen. Dit is te verklaren aan de hand van de zogenaamde netwerktheorie (zie Geary, Brown, & Samarayanake, 1991; Siegler, 1996).
Tijdens de ontwikkeling van de hersenen is het van cruciaal belang dat de juiste verbindingen tussen hersencellen aangelegd en versterkt worden. Bij het leren rekenen moeten er verbindingen gelegd worden tussen verschillende getallen, bijvoorbeeld tussen 6, 3 en 18. Als een som geautomatiseerd is, zal het getal 18 als vanzelf bovenkomen wanneer 6 × 3 worden getoond. Er is dus een sterke verbinding tussen de getallen. Door de som vaak uit te rekenen, kan een beginnend rekenaar deze verbinding vormen. Wanneer een kind echter een zwak werkgeheugen heeft, zal het moeite hebben om de som goed uit te rekenen. Zeker in de eerste stadia van het leerproces, wanneer er veel tellend wordt gerekend, wordt er immers een groot beroep op het werkgeheugen gedaan. Het kind moet de som onthouden, goed opletten dat het steeds precies 3 verder telt (en niet per ongeluk 2 of 4) en bovendien goed bijhouden hoeveel drieën er al zijn opgeteld en hoeveel er dus nog opgeteld moeten worden. De kans is reëel dat een kind met een zwak werkgeheugen hier ergens een foutje maakt en niet op 18 uitkomt. Of de kans bestaat dat het kind wel op 18 uitkomt, maar niet meer goed weet dat de som 6 × 3 was. In beide gevallen wordt de verbinding tussen som en uitkomst niet versterkt, heeft het kind weinig geleerd en kan het kind de volgende keer ook niet een slimmere strategie toepassen.

Kortom: we verwachtten een dubbel verband tussen werkgeheugen en rekenen. We verwachtten dat kinderen met een goed werkgeheugen beter grip hebben op de handelingen die ze uitvoeren, en daardoor minder procedurele fouten zouden maken. Bovendien verwachtten we dat deze kin-

deren beter in staat zijn om een rijk rekennetwerk op te bouwen dat ze in staat stelt steeds slimmere strategieën te gebruiken, waardoor ze nog weer minder fouten zouden maken. Alle kinderen hebben daarom naast de rekentaken ook eenmalig een aantal werkgeheugentaken gemaakt, waarin ze onder andere een steeds langer wordende reeks cijfers achterstevoren moesten nazeggen. Deze werkgeheugenscore hebben we gerelateerd aan de strategievaardigheid en accuratesse van de gemaakte sommen.[4]
Onze verwachtingen kwamen inderdaad uit. Hoe hoger de kinderen hadden gescoord op de werkgeheugentaken, des te meer maakten zij gebruik van geavanceerde strategieën: ze scoorden verder naar rechts in de grafieken in Figuur 4. Kinderen met een zwak werkgeheugen bevonden zich veel meer links in de figuur. Bovendien was er ook een duidelijk verband met accuratesse: hoe beter het werkgeheugen, hoe lager het aantal gemaakte fouten. Dit geeft aan dat kinderen met een zwak werkgeheugen daar op twee wijzen last van hebben bij het rekenen: ze zijn vanwege een onvoldoende opgebouwd rekennetwerk niet in staat om slimmere strategieën te gebruiken, en ze maken ook nog eens meer rekenfouten dan je al zou verwachten op basis van de strategieën die ze kiezen. Er is sprake van de paradoxale situatie dat kinderen met een zwak werkgeheugen noodgedwongen blijven hangen in het gebruik van strategieën die juist een groot beroep op het werkgeheugen doen, gezien het grote aantal stappen dat gezet moet worden om de som uit te rekenen.

9 sekseverschillen

Ten slotte hebben we gekeken of er verschillen waren tussen jongens en meisjes. Die bleken er niet te zijn in het totale aantal goede antwoorden, en ook niet in het werkgeheugen. Toch bleken er twee paradoxale andere verschillen: jongens kozen meer geavanceerde strategieën, maar juist de meisjes gingen in de loop van het onderzoek meer vooruit in het totale aantal goede antwoorden. Dit werd veroorzaakt door een verschil in gebruik van slechts één van de strategieën: gememoriseerd antwoord geven. Hierin waren de jongens duidelijk overmoediger dan de meisjes. Bijna twee keer zo vaak als de meisjes gaven zij aan dat ze het antwoord op een som gememoriseerd hadden. In 81 procent van de gevallen gaven de jongens dan ook inderdaad het correcte antwoord, terwijl dit bij de meisjes maar liefst 89 procent was: de jongens maakten bijna dubbel zo veel fouten! Een fout antwoord ophalen versterkt juist de verkeerde verbindingen, en dat bevordert het leerproces natuurlijk niet. Bij de overige strategieën deden de jongens het juist iets beter: ze maakten minder gebruik van telstrategieën en ze maakten bovendien minder fouten in de handige strategieën. Mogelijk zou er dus een duidelijker voordeel voor de jongens ontstaan als zij hun overmoed leren beteugelen.

10 praktische relevantie

Wat betekent dit nu in de dagelijkse onderwijspraktijk? Hoe kunnen zwakke rekenaars het best geholpen worden? Ons onderzoek was niet specifiek op deze vragen gericht, maar het biedt wel enkele aanknopingspunten.
Allereerst bleek een duidelijk verband tussen strategiegebruik en accuratesse. Hoe slimmer de strategie, des te vaker werd er een correct antwoord gegeven. Er bleek bovendien ook een samenhang te zijn tussen het geven van goede antwoorden en vooruitgang in strategiegebruik: het geven van goede antwoorden gaat samen met een snellere ontwikkeling van de gebruikte strategieën. Mogelijk is het dus zinvol om kinderen te stimuleren vaker slimmere strategieën te gebruiken. Die leiden immers vaker tot een goed antwoord. Voor sommige kinderen zal dit een goede methode zijn. Maar het kan heel goed zijn dat dit bij andere kinderen, met name de kinderen met een zwak werkgeheugen, tot averechtse resultaten leidt. Het kind moet immers wel in staat zijn om die slimmere strategieën te gebruiken, anders zal het alleen maar op nog meer foute antwoorden uitkomen. Wellicht is het voor deze kinderen beter om ervoor te zorgen dat het kind op een goed antwoord komt - desnoods wat langzamer. Door concrete hulpmiddelen aan te bieden wordt het zwakke werkgeheugen van het kind ontlast. Ook kan het helpen om terug te kijken naar wat de som ook alweer was. Op deze wijzen krijgt het kind de mogelijkheid om de verbinding tussen som en het antwoord alsnog te versterken. Het kind zal dan waarschijnlijk ook slimmere strategieën gaan gebruiken wanneer het daartoe in staat is. Verder onderzoek zal moeten uitwijzen wat uiteindelijk de beste methode is.

11 trainen van het werkgeheugen

Daarnaast zou het natuurlijk het allermooist zijn als het werkgeheugen van zwakke kinderen verbeterd kan worden door het te trainen. Dit zou vervolgens positieve effecten moeten hebben op de rekenprestaties van de kinderen. De vraag is of dit mogelijk is. Het onderzoek hiernaar staat in de kinderschoenen maar komt al wel steeds meer op gang. De eerste resultaten geven een gemengd beeld. Vaak wordt er gevonden dat het mensen wel beter worden op de getrainde taken, maar niet op vergelijkbare ongetrainde taken. Toch zijn er voorzichtig hoopvolle resultaten dat flexibele, jonge kinderhersenen wel degelijk getraind kunnen worden. Een leerkracht die daar oog voor heeft, kan zo'n training in gewone lessen verwerken zonder dat het veel moeite kost. Bijvoorbeeld door voorwerpen op een tafel af te dekken en kinderen te laten opschrijven wat eronder lag. Ook bekende spelletjes als *memory*, kwartet en 'ik ga op reis en ik neem mee...' doen een beroep op het werkgeheugen.

12 conclusies

Samenvattend zijn uit dit onderzoek drie conclusies te trekken. De eerste is dat strategieën zich, zoals Robert Siegler al voorspelde, ontwikkelen als overlappende golven. Variabiliteit in strategiegebruik is een normaal aspect in de ontwikkeling van rekenvaardigheid: na het kennismaken met een nieuwe strategie zal het een tijdje duren tot een kind deze ook echt veelvuldig zal gebruiken. Ten tweede bleek, niet onverwacht, dat het gebruik van slimmere strategieën vaker tot een goed antwoord leidt. Tenslotte bleek dat een beter werkgeheugen zorgt voor het gebruik van slimmere strategieën, en bovendien tot het maken van weinig fouten.

noten

1 Dit onderzoek is uitgevoerd door de auteurs, samen met prof.dr. Paul Leseman en dr. Jan Boom (beiden werkzaam aan de Universiteit Utrecht). Een korte versie van dit artikel is ook verschenen in 'Volgens Bartjen's. Een uitgebreidere, internationale publicatie zal binnenkort verschijnen: Ven, S.H.G. van der, J. Boom, E.H. Kroesbergen & P. Leseman (2012). Microgenetic patterns of children's multiplication learning: Confirming the overlapping waves model by latent growth modeling. Journal of Experimental Child Psychology, in press. doi: 10.1016/j.jecp.2012.02.001
2 De exacte fit indices zijn: $X^2(2214) = 3117.02$, $p < .001$, $NC = 1.41$, $CFI = .89$, $RMSEA = .065$.
3 $SD = 0{,}90$.
4 Accuratesse werd gemodelleerd met een Raschmodel: een van de standaardmodellen in de itemresponstheorie.

literatuur

Geary, D.C., S.C. Brown & V.A. Samaranayake. (1991). Cognitive addition: A short longitudinal study of strategy choice and speed-of-processing differences in normal and mathematically disabled children. *Developmental Psychology, 27*, 787-797.

Lemaire, P. & R.S. Siegler (1995). Four aspects of strategic change: Contributions to children's learning of multiplication. *Journal of Experimental Psychology: General, 124,* 83-97.

Mabbott, D.J. & J. Bisanz (2003). Developmental change and individual differences in children's multiplication. *Child Development, 74,* 1091-1107. doi: 10.1111/1467-8624.00594

Raghubar, K.P., M.A. Barnes & S.A. Hecht (2010). Working memory and mathematics: A review of developmental, individual difference, and cognitive approaches. *Learning and Individual Differences, 20,* 110-122. doi:10.1016/j.lindif.2009.10.005

Samejima, F. (1969). Estimation of latent ability using a response pattern of graded scores. *Psychometrika Monograph Supplement, 34,* 100-114.

Siegler, R.S. (1996). *Emerging minds, the process of change in children's thinking.* New York: Oxford University Press.