
Opbrengstgericht werken volgens de PARWO-visie

- de tafels gekeerd -

D. van der Straaten & F. Moerlands
De Roode Kikker, Eindhoven/SSOT, Tilburg

1 inleiding

Iedereen die onderwijs een warm hart toedraagt is er op gericht het leerrendement van kinderen zo optimaal mogelijk te benutten. Toch lijken resultaten op (inter)nationale toetsingen niet het gewenste effect te geven. Dit is voor (met name) de PO-raad aanleiding om extra focus te zetten op het leerrendement. Ze doen dat onder andere door van scholen die gericht hun opbrengsten weten te verhogen de aanpak te analyseren (Gelderblom, 2011). Hoewel we het initiatief om zo veel mogelijk rendement uit de kinderen te halen toejuichen, zijn we ook kritisch ten aanzien van de aandacht voor opbrengsten. We zien namelijk dat dit door leerkrachten opgepakt wordt als ‘de opbrengsten moeten omhoog’. Ze lijken daardoor niet breder naar de ontwikkeling van kinderen te kijken, maar juist smaller, door de aandacht te richten op wat er in de toetsen gevraagd wordt. Het te eenzijdig richten op opbrengsten is vergelijkbaar met alsmaar lagen verf aanbrengen op een kozijn dat onderhoud vraagt. Wij denken dat kwaliteitsverbetering vooral plaatsvindt vanuit een inhoudelijke focus. Niemand heeft baat bij een glimmende laag lak die er na verloop van tijd weer afbladdert. Zoals in deze verfmetafoor het schuren, ontvetten en gronden bepalend zijn voor het resultaat, zo geldt dat in het onderwijs vooral de funderende activiteiten zorgen dat kennis ‘hecht’ en goed wordt opgebouwd.

In dit artikel bespreken we als alternatieve bandering een *try-out* van een lessencyclus vanuit de PARWO-visie en de bijzondere resultaten daarvan.

2 visie

Binnen de ‘Stichting Speciaal Onderwijs Tilburg’ (SSOT) en het project ‘PAssend ‘Reken-Wiskunde Onderwijs’ (PARWO), werken we aan ontwikkelings-

gericht reken- wiskundeonderwijs. We hanteren daarbij de ijsbergmetafoor (Boswinkel & Moerlands, 2003; Moerlands & Van der Straaten, 2009). Dit beeld past - ons inziens - erg goed bij de grondbeginselen van realistisch rekenonderwijs. Freudenthal (1991) benadrukt met de term *mathematization* dat het bij het leren van de wiskunde gaat om een proces van abstraheren en hij typeert dat wiskundige (leer)proces in twee richtingen:

Horizontal mathematization leads from the world of life to the world of symbols. In the world of life one lives, acts (and suffers); in the other one symbols are shaped, reshaped, and manipulated, mechanically, comprehendingly, reflectingly: this is vertical mathematization. The world of life is what is experienced as reality (), as is a symbolworld with regard to abstraction. To be sure the frontiers of these worlds are vaguely marked. The worlds can expand and shrink – also at one another's expense. (pag.41-42)

In de ijsbergmetafoor is de horizontale 'mathematisering' de interactie tussen de omgeving (de werkelijkheid) en de ijsberg (de wiskunde). Het uitkristalliseren van de omgeving vormt de ijsberg. Door het groeien en krimpen van de ijsberg zal ook meer of minder van het topje (de uiteindelijke algemeen aanvaarde wiskunde) boven komen drijven (verticale mathematisering). Zo 'ontstaat' de wiskunde als uitgekristalliseerde werkelijkheid (fig.1) en gebruiken we de ontstaansgeschiedenis van de wiskunde als didactisch principe.



figuur 1: wiskunde als uitgekristalliseerde werkelijkheid

Freudenthal gebruikte de term *guided reinvention* om te onderstrepen dat het leren van wiskunde gaat volgens het herontdekken van de wiskundige principes zoals deze door wiskundigen zijn bedacht. Zo is voor elk wiskundig domein een didactische ijsberg voor te stellen. Het belangrijkste dat we met de ijsbergmetafoor echter duidelijk willen maken is dat kinderen wiskunde leren begrijpen door wiskundig actief te zijn en vanuit de bonte werkelijkheid steeds abstracter leren redeneren.

3 kritiek

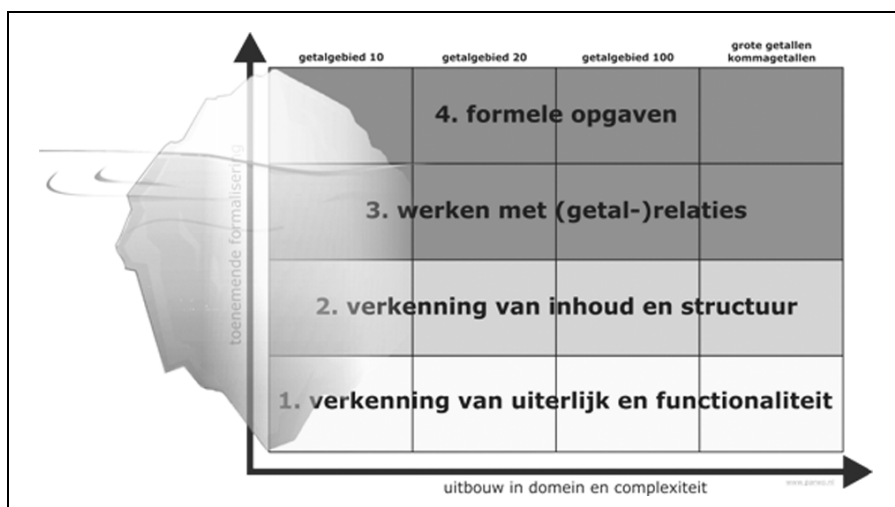
Op de realistische benadering is ook veel kritiek (Keune, 1998; Van de Craats, 2007). Met name Keune (1998) verwoordt dat scherp:

Wat is er volgens mij nu echt mis met veel van ons wiskundeonderwijs? De meest diepgaande fout is het verwarren van abstractie en realiteit. Abstractie is ontstaan uit de behoefte tot helderheid. In de hersenspinsels van de wiskunde is er sprake van absolute helderheid. In ons onderwijs wordt dat mistig gemaakt en dat is zonde. Het is een gemiste kans voor het leren van exact denken (para. 4).

Daarmee is hij niet kritisch op de grondbeginselen van de realistische didactiek, maar eerder op de uitwerking daarvan. De uitwerking van de realistische didactiek heeft onder andere plaats gevonden door de invoering van zogenoemde ‘realistische rekenmethoden’. Men kan zich daarbij afvragen in hoeverre het de uitgevers en schrijvers van deze methoden is gelukt het wiskundig denk- en leerproces - het beoogde abstractieproces - bij kinderen op gang te brengen. Dolk (2004; 2007) waarschuwt dat door de invoering van deze methoden (en vooral de uitgewerkte beschrijvingen in de handleidingen) het lijkt dat het didactische denkwerk niet meer door leerkrachten gedaan hoeft te worden. Bovendien is het de vraag of de achterliggende didactische structuur helder is (Van der Straaten, Moerlands & Den Ouden, 2011) en of deze leerkrachten echt helpt om kinderen wiskundig actief te krijgen. Goed onderwijs ontstaat niet door alleen een mooie methode te schrijven die de problemen voor de leerkracht oplost. Er moet ook naar het lerende kind worden gekeken. Verder zijn ook de realiteit en de wiskundige processen lastig in boekjes te vangen en zullen deze ook los van de methode recht gedaan moeten worden. Al deze aandachtsgebieden (het onderwijs, het lerende kind, de inhoud en/of de wiskunde en de realiteit) moeten in balans zijn om goed onderwijs te realiseren (Van der Straaten, Moerlands & Den Ouden, 2011).

4 didactisch kader

In een poging om goed reken-wiskundeonderwijs te ontwikkelen, proberen wij leerkrachten houvast te geven met een compact didactisch kader. We leggen daarbij een groot deel van het didactisch denkwerk nadrukkelijk bij de leerkracht en streven ernaar de kinderen wiskundig actief te krijgen. Daarvoor hebben we een aantal wiskundige domeinen geanalyseerd en didactisch uitgewerkt. Deze 'ijsbergen' hebben we op basis van de wiskundige samenhang samen laten smelten tot een matrix (fig.2). De matrix toont dat wiskundige groei in twee richtingen mogelijk is, waarbij de ene richting het proces van abstrahering weergeeft – van verkennen van uiterlijk en functionaliteit naar verkennen van inhoud en structuur, naar werken met getalrelaties tot formele sommen, congruent aan het principe van *mergent modeling* (Gravemeijer, 2002; Van der Straaten & Moerlands, 2010) en de andere richting de uitbouw in domein en complexiteit.



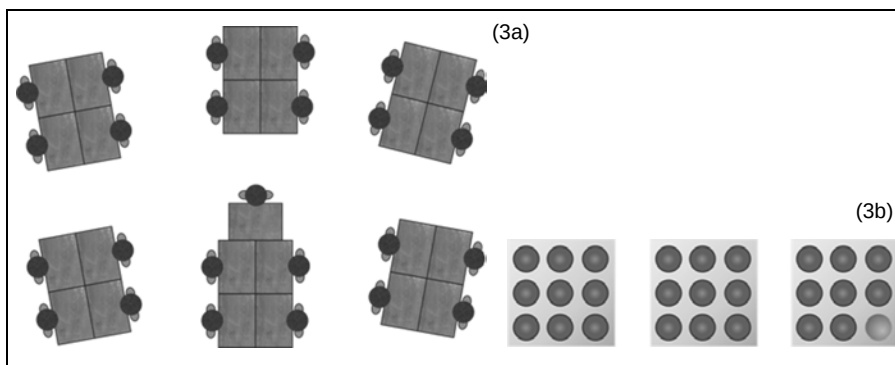
figuur 2: de matrix als didactische uitkristallisering van de ijsbergmetafoor

De uitbouw in domein en complexiteit geeft ook aan welke domeinen wiskundig gezien sterk aan elkaar gerelateerd zijn. De bundeling in de eerste matrix beslaat de domeinen optellen en aftrekken tot 10, 20, 100 en met grote getallen en kommagetallen. Getalbegrip, meten en geld zijn daarbij integraal verwerkt. Met dit artikel geven we een meer concrete invulling van een tweede matrix. De wiskundige samenhang die we daarvoor als bundeling gebruiken gaat over verhoudingsaspecten en beslaat de domeinen vermenigvuldigen, delen, breuken, procenten en verhoudingen.

5 vermenigvuldigen als herstructureren

In het hedendaagse onderwijs wordt vermenigvuldigen vaak snel op som-niveau aangeleerd. Kinderen blijven daarbij vaak lang hangen in primitieve strategieën als herhaald optellen (vgl. Devlin, 2008a; 2008b; 2008c; 2011). Grondig investeren in drijfvermogen kan effectiever werken. We laten kinderen daarom eerst vooral de fenomenologie van vermenigvuldigen bestuderen op basis waarvan inzichten en strategieën opgebouwd worden. Hoe komen we vermenigvuldigingen in het dagelijkse leven tegen? De wereld zit vol met structuren; in ordeningen, verpakkingen, stapelingen, ritmes en patronen. Een vermenigvuldiging is niet meer dan een beschrijving van zo'n structuur: 4×6 als de beschrijving van het aantal stickers op een stickervelletje; 3×5 als beschrijving van het aantal koeken in een verpakking; $3 \times 5 \times 7$ als beschrijving van het aantal waxinelichtjes in een doos; en 4×7 als beschrijving van het aantal dagen in vier weken. Op zich is deze beschrijving helder, maar vanuit praktische oogpunt zou het wenselijk zijn om deze dagelijkse structuren in elkaar over te kunnen zetten. Stel daarbij de volgende situatie voor:

De leerkracht wil trakteren op soesjes. In de klas zitten de kinderen in vijf groepen van vier en in één groep van vijf. De soesjes zitten verpakt in dozen van negen stuks. Ze heeft drie dozen met soesjes, maar uit één doos is al één soesje opgegeten. Beide structuren (zowel de manier waarop de kinderen in de klas zitten als de soesjes in de dozen) zijn in sommentaal te beschrijven. De kinderen in de klas als ' $5 \times 4 + 1 \times 5$ ' (fig. 3a) en de soesjes als ' $2 \times 9 + 8$ ' of: ' 2×9 rest 8' (fig.3b). De vraag is dan of er voldoende soesjes zijn voor elk kind. Om vergelijking mogelijk te maken zou de ene structuur omgezet moeten worden in de andere. Dus de kinderen in groepjes van negen zetten of de soesjes in groepen van vier en vijf. Dat is geen werk-bare oplossing, maar hoe dan wel?



figuur 3a en 3b: kinderen in de klas ' $5 \times 4 + 1 \times 5$ '; soesjes in dozen ' 2×9 rest 8'

We zijn gewend om van beide structuren ‘het totaal’ te bepalen. Dat totaal is een getal, een decimaal getal met een decimale structuur. Het getal 25 staat voor twee groepen van 10 en vijf lossen, in een binair getalstelsel zou dat heel anders beschreven worden. We gebruiken dus het decimale ‘totaal’ als intermediair om alledaagse structuren met elkaar te kunnen vergelijken. In dit voorbeeld vormen de kinderen twee groepen van 10 en vijf lossen samen ‘25’ en de soesjes twee groepen van 10 en zes lossen ‘26’.

In wezen is vermenigvuldigen ‘herstructureren’ van structuren uit de werkelijkheid naar een decimale getalstructuur. Daardoor is het niet verwonderlijk dat kinderen de tafel van vijf snel de baas zijn. De vijfstructuur is immers erg verwant aan de tienstructuur. Zulke structuurverwantschappen zijn er meer, zoals bij de tafel van twee, vier en acht. Hoe beter kinderen deze verwantschappen doorzien, des te beter zullen ze deze ook als strategieën kunnen inzetten op somniveau.

6 relatie met delen

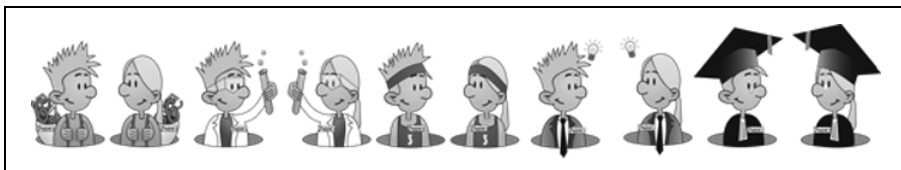
Delen en vermenigvuldigen hebben veel verwantschap. Een vermenigvuldiging is een transformatie van een ‘informele’ structuur naar een decimale structuur en delen is de transformatie van een decimale structuur naar een ‘informele’ structuur. Ze zijn dus elkaars inverse. In de *try-out* hebben we kinderen veelvuldig structuren laten verkennen en zij hebben daarmee zowel inzichten voor vermenigvuldigen als voor delen ontwikkeld.

7 karakters

In het proces van herontdekking en geleide abstrahering zijn voor lerende kinderen verschillende leerrollen weggelegd. Leren is immers meer dan luisteren en nadoen. Er is een aantal algemene fasen in leerprocessen te typeren. Deze fasen zijn gebaseerd op de leercurve (Vermeulen, Moerlands & De Wert, 2008), onze persoonlijke reflecties en jaren aan ervaring met kinderen in het speciaal onderwijs. Om recht te doen aan deze leerfasen hebben we een vijftal karakters¹ uitgewerkt. Dit zijn: de verzamelaar, de onderzoeker, de atleet, de ondernemer en de professor (fig.4).

Kinderen zie je in het begin van een leerproces vaak eerst verzamelen. Als ‘verzamelaar’ stoppen jonge kinderen hun zakken vol met eikels, steentjes, enzovoort. In de loop van de tijd neemt dat ook abstractere vormen aan doordat kinderen ook ervaringen, indrukken en gedachten verzamelen. Al

snel wordt een verzameling onderwerp van onderzoek. Dan komt het kind in de rol van ‘onderzoeker’ die fenomenen bestudeert, verschillen en overeenkomsten ontdekt en gedragingen probeert te doorgronden. Vooral deze rol is van belang voor het ontwikkelen van inzichten die voorwaardelijk zijn voor het formeel denken en opereren.



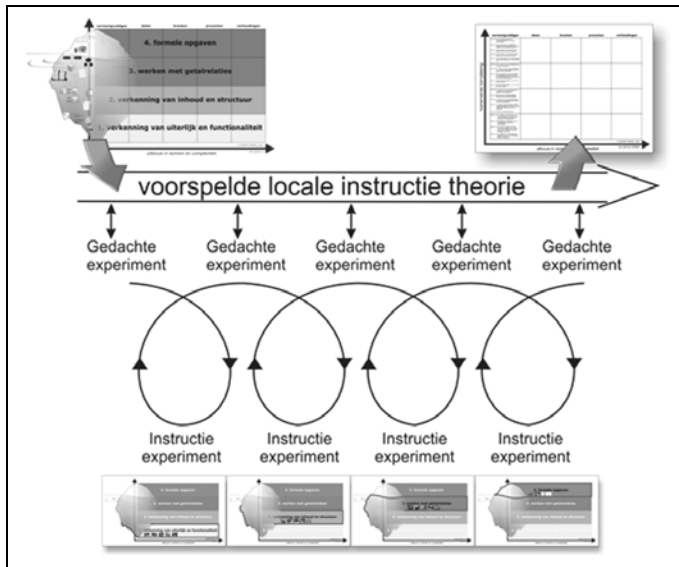
figuur 4: de vijf karakters: de verzamelaar, de onderzoeker, de atleet, de ondernemer en de professor

Door dingen vaker te doen worden min of meer bewust al vaardigheden getraind. Op het moment dat het oefenen expliciet wordt, is de leerling in de rol van ‘atleet’. Als atleet oefent het kind vaardigheden en inzichten, zodat deze steeds sneller en efficiënter uitgevoerd en gebruikt kunnen worden. Met de ontwikkelde inzichten en vaardigheden kan het kind in de rol van ‘ondernemer’ vervolgens verbanden leggen en inzichten en vaardigheden op een nieuwe manier combineren. Het kind onderneemt dus iets met kennis die het in eerdere rollen heeft opgedaan. Als de leerervaringen eenmaal voldoende verdiept zijn en een kind in staat is om het geleerde te overzien, dan kan deze ‘kennis’ met anderen worden gedeeld. Het kind komt dan in een rol van ‘professor’, die informatie uitlijnt en presenteert. Deze karakters zijn ontwikkeld om de dynamiek van het leren een gezicht te geven. In het huidige onderwijs zien we vooral veel aandacht voor de atleet. In deze *try-out* plaatsen we de kinderen bewust ook in de andere karakterrollen om te zorgen dat het leerproces evenwichtig en volwaardig is. Voor ons gevoel is deze insteek breed inzetbaar.

8 *try-out* rondom vermenigvuldigen

Omdat we niet geloven in het *top-down* overdragen van theorie kiezen we ervoor theorie in een reflexieve relatie met de praktijk te ontwikkelen. We volgen daarbij de opzet die Gravemeijer in eerste instantie betitelt als *developmental research* (Gravemeijer, 1994) en waarvoor hij later de meer gangbare term ‘design research’ (Gravemeijer, 2004; Edelson, 2002) hanteert. We hebben een lestraject opgezet waarbij we de didactische opbouw van de eerste matrix (fig. 2) als uitgangspunt hebben genomen. We wilden

daarbij ook de hierboven beschreven ideeën over vermenigvuldigen en karakterrollen van leren toepassen met als doel om de tweede matrix voor het onderdeel vermenigvuldigen specifiek in te vullen (fig.5).



figuur 5: onderzoeksopzet *try-out* vermenigvuldigen

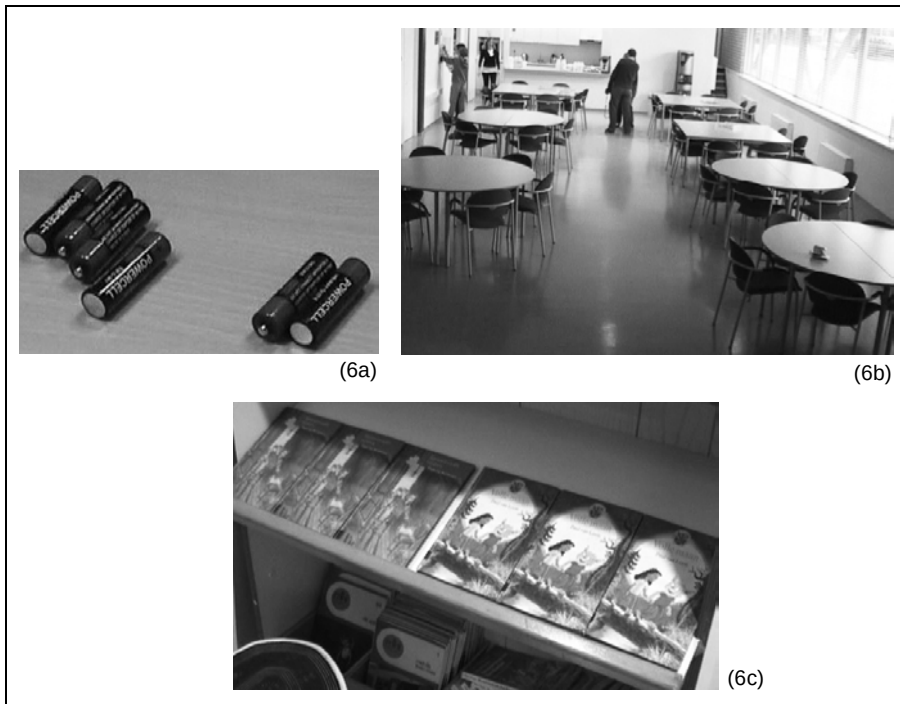
We gingen in gesprek met Jikke van der Sluijs, een leerkracht van groep 5 van sbo Westerwel, een van de scholen van de SSOT. Jikke was door middel van PARWO-kadertrainingen al goed op de hoogte van de gehanteerde visie betreffende de ijsbergdidactiek. We bespraken daarom in de voorbereiding op de *try-out* vooral de ideeën over vermenigvuldigen en karakterrollen van leren.

We besloten om de lessen in blokken van twee lessen per week op video op te nemen en na elk blok een nabespreking met Jikke te voeren en ook deze op te nemen. Vooraf werd een hypothetisch leertraject (vgl. Simon, 1995) in kaart gebracht. Doordat we alle lessen op video opnamen, konden we samen met Jikke reflecteren op haar onderwijsgedrag (vgl. Dolk, 1997), maar ook op onze eigen interventies. Bovendien bood het videomateriaal een schat aan inzichten in de denkprocessen van kinderen.

9 verkennen van uiterlijk en functionaliteit

We begonnen door de kinderen, in de rol van verzamelaars, in school op zoek te laten gaan naar vermenigvuldigingen. Gewapend met een digitaal

fototoestel moesten ze zo veel mogelijk ‘tafeltjes’ op de foto zetten. Dat het niet ging om de houten tafels waar ze normaal aan werken was snel duidelijk. De echte verwarring werd duidelijk toen de batterijen van een van de camera’s leeg bleken te zijn. Toen de batterijen in een groepje van vier en een groepje van twee op tafel kwamen te liggen zagen de kinderen daar wel een vermenigvuldiging in: 4×2 (fig. 6a). Deze misinterpretatie kwam veel voor. Zo werden de tafels en stoelen in de aula gezien als 39×7 (tafels) (fig. 6b) en twee stapels van drie boeken als 3×3 (fig. 6c).



figuur 6a, 6b en 6c: 4×2 ; 39×7 ; 3×3

Ondanks dat kinderen ook veel mooie en correcte voorbeelden gaven, werd in de nabespreking duidelijk dat de verwarring nog niet weg was. Een verklaring lijkt te zijn dat deze kinderen weliswaar al met de tafels hadden gewerkt, maar vooral op formuleniveau. We zagen de kinderen (wellicht onbegrepen) formules op de werkelijkheid leggen in plaats van de werkelijkheid in een formule te beschrijven.

Dit was aanleiding om de kinderen extra tijd te geven om te verzamelen. We deden dat door ze tijdens een volgende les in folders of op internetpagina's van winkels nog meer vermenigvuldigingen te laten zoeken. Deze

keer met de opmerking dat ze de vermenigvuldiging die ze er in zagen er bij moesten schrijven.



figuur 7a en 7b: formele sommen 'echt'(?) gemaakt en 3D-beschrijving

Ook nu zagen we sommige kinderen weer 'sommen' maken met realistische beelden zonder dat ze echt vermenigvuldigbegrip lieten zien (fig.7a). Aan de andere kant was er ook een jongen die zelfs buiten het platte vlak ging en een 3D-beschrijving maakte van een doos suikerklontjes (fig.7b). Door de foto's op het digibord te tonen en te bespreken werd voor alle kinderen duidelijk dat een vermenigvuldiging een beschrijving is van een

structuur en niet ‘een hoeveelheid en een andere hoeveelheid met een vermenigvuldigingsteken er tussen’. In deze fase gaat het vooral om die beschrijving van de structuur. Het daadwerkelijke uitrekenen van de som is nog niet direct aan de orde en kan met een rekenmachine opgevangen worden.

Na de verzamelfase lieten we de kinderen onderzoek doen naar verschillende structuurbeschrijvingen en -vormen. We ontwikkelden daarvoor een soort puzzel op voorgeperforeerd papier.² De opdracht was om acht verschillende beschrijvingen van eenzelfde structuur bij elkaar te zoeken (fig.8).

figuur ontbreekt

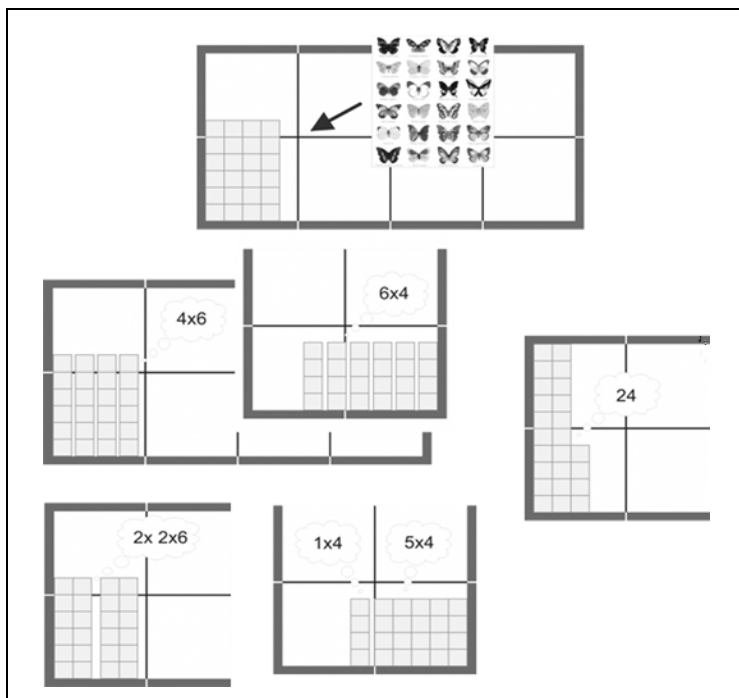
figuur 8: deel van de puzzel met structuurbeschrijvingen

Omdat deze puzzel vrij uitgebreid is (het zijn twaalf sets van acht structuurbeschrijvingen) konden we deze op verschillende manieren en momenten inzetten. Zo plaatsten we de leerlingen regelmatig al in de rol van atleet door bijvoorbeeld met een selectie uit de sets memorie te laten spelen.

10 verkennen van inhoud en structuur

Een belangrijke vervolgstap was dat we kinderen wilden laten manipuleren met een structuur uit de werkelijkheid. Hiervoor zetten we de rekentafel³ en rekenkistjes⁴ (leerlingversie van de rekentafel) als dynamisch modelmateriaal in. Op de rekentafel kunnen structuren uit de werkelijkheid overgenomen worden, bijvoorbeeld door een stickervel na te leggen met de blokken in de rekentafel. Daarna kan er mee gemanipuleerd

worden. De omkeereigenschap kan worden verkend, substructuren kunnen worden uitgesplitst en uiteindelijk kunnen de blokken simpelweg in de decimale structuur van de rekentafel worden gelegd zodat ook het (decimale) antwoord op de vermenigvuldiging gevonden wordt (fig.9).



figuur 9: structuur kopiëren in de rekentafel, substructuren onderzoeken en herstructureren

We introduceerden de rekentafel als een materiaal dat inzichtelijk maakt wat een rekenmachine doet. Je voert immers de beschrijving van een structuur '6x4' in en de rekenmachine geeft als resultaat: '24'. Dit is de symbolische beschrijving van twee keer tien en vier lossen. De rekentafel maakt de bewerking inzichtelijk. Daarom zetten we de kinderen daarmee aan het werk. We gaven de kinderen in tweetallen een goudbordje en een rekenmachine. Jikke gaf een vermenigvuldiging (bijvoorbeeld 7×8) die de kinderen in het goudbord moesten leggen. Daarna mochten ze de som uitrekenen op de rekenmachine om vervolgens met behulp van het goudbord te bewijzen dat het antwoord klopte (fig.10).

Als vervolg hierop hadden we uit de puzzel (zie figuur 8) alle plaatjes met foto's van structuren uit de werkelijkheid gehaald en ook aan de kinderen gegeven. De opdracht was eenvoudig. Maak de structuur na op het goud-

bord en laat zien hoe je snel kunt zien hoeveel het er zijn. Controleer daarna met je rekenmachine of het klopt. Hierbij werd duidelijk dat de kinderen het herstructureren goed begrepen. Ze konden de uitkomst van de rekenmachine beter interpreteren. We zagen hier een duidelijke omslag ten opzichte van de verzamelfase. Door het herstructureren inzichtelijk te maken met dynamisch modelmateriaal werden niet de formules maar werd de structuur leidend.



(10a)



(10b)

figuur 10a en 10b: herstructureren in het goudbord en controleren met de rekenmachine

Op basis daarvan lieten we kinderen de omkeereigenschap en substructureren verkennen, wat geleidelijk overging in oefenen (zie figuur 9). Deze inzichten en vaardigheden vormen de basis voor de oplossingsstrategieën die op hogere niveaus worden gebruikt. Waar voorheen werd gepoogd om de strategieën op somniveau inzichtelijker te maken, laten we hier strategieën ontstaan vanuit de basis van structuurverkenningen en herstructureringen.

Om een en ander nog sterker te verankeren lieten we kinderen ook de omgekeerde weg bewandelen: bij een gegeven getal (bijvoorbeeld 72) werd hen gevraagd te zoeken naar mogelijke vermenigvuldigingen die daarbij horen. Zo vonden ze 2×36 , 3×24 , 4×18 , $2 \times 6 \times 6$, enzovoort. In informele

zin legden we hier al een verband met delen, wat we echter niet al als zodanig benoemden. We hebben kinderen hier wel veelvuldig mee laten oefenen om het herstructureren goed te verankeren om zo ook getalrelaties op te bouwen die op een hoger niveau een belangrijke rol spelen. Opvallend was om te zien dat kinderen gedurende deze opdrachten veelvuldig voorspellingen deden, inschattingen maakten en volop redeneerden over mogelijke aanpakken om hoeveelheden anders te structureren, kortom: wiskundig redeneerden.

In aanvulling hierop ontwikkelden we een set 'bladgoud' of 'vierkantjes'⁵ waarbij we vellen maakten van steeds vijftien vierkantjes lang en van één tot en met tien vierkantjes breed. Een eenvoudige opdracht om snel substructuren te verkennen was de volgende: kinderen zaten in tweetallen en gaven elkaar om de beurt een som op. De ander moest dan snel, door een bepaalde strook te pakken, deze som visualiseren. Bijvoorbeeld bij 9×5 werd een strook gepakt van 15×5 , waarvan een stuk van 6×5 naar achteren werd gevouwen, zodat 9×5 zichtbaar werd.⁶ Zodoende werd geoefend met het maken en gebruiken van steunpunten.

11 werken met getalrelaties

Om een volgende stap te zetten introduceerden we de pizzadozen. Jikke liet de kinderen een stapel van vijftien dozen zien en vroeg hoeveel het er waren. Door de onoverzichtelijke stapel waren kinderen veroordeeld tot tellen. Toen Jikke een stapel van vijf dozen van de grote stapel ernaast legde zagen de kinderen vrij snel dat het om tien en vijf dozen ging. Op zich vormde dat geen probleem. 'Maar', zo stelde Jikke, 'wat als er nou zes stukken pizza in elke doos zouden zitten, hoeveel stukken heb je dan in totaal? Want 15×6 kunnen jullie toch niet uitrekenen?' Door de simpele ingreep van Jikke eerder, bleek het voor de kinderen toch niet meer zo moeilijk. Want 10×6 kenden ze al wel en 5×6 ook.

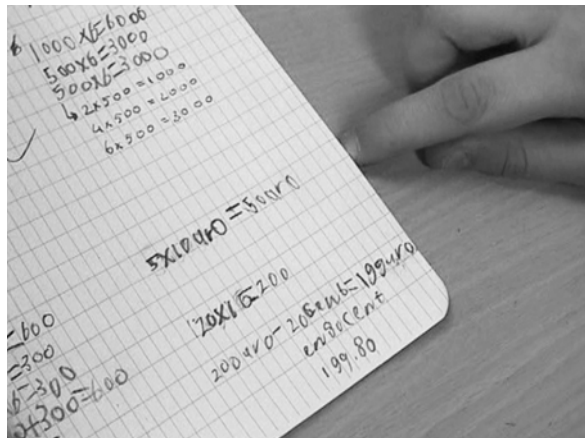
Hiermee tilde Jikke op subtiële wijze de structuurverkenning naar bouwsteenniveau. De structuur (tien en vijf) die aangebracht werd in de stapel pizzadozen was al duidelijk door de eerdere verkenningen in het goudbord, en nu werd de tweede dimensie (het aantal pizzastukken) aan het oog onttrokken. De kinderen werden vervolgens - in de rol van ondernemers - uitgedaagd om een zo hoog mogelijke stapel te maken (of te bedenken) en uit te rekenen hoeveel pizzastukken daarin zouden kunnen.

Al snel verscheen er bij een groepje een stapel tot aan het plafond, wat de enorme som 43×6 opleverde. Een van de jongens van dat groepje lost het probleem met een voornamelijk tellende aanpak op en komt tot een

antwoord⁷ (wat met de rekenmachine wordt gecontroleerd). Zijn enthousiasme steekt hij niet onder stoelen of banken en hij wil zijn succes delen met de leerkracht. Zij was op dat moment ook al prijzen van pizza's aan het opzoeken voor een groepje leerlingen dat het aantal stukken berekenen te eenvoudig vond. Jikke daagde hen uit om de prijs van een stapel pizza's te berekenen. Dit geeft aan hoe groot de niveauverschillen zijn in de klas van Jikke. Het voorval toont de kracht van Jikke om flexibel met deze verschillen om te gaan (fig.11), maar het laat ook zien dat de context van de pizzadozen zich hier uitstekend voor leent. Waar de een (vol trots) 43×6 uitrekt, is de ander bezig om te beredeneren wat twintig pizza's van € 9,99 kosten.



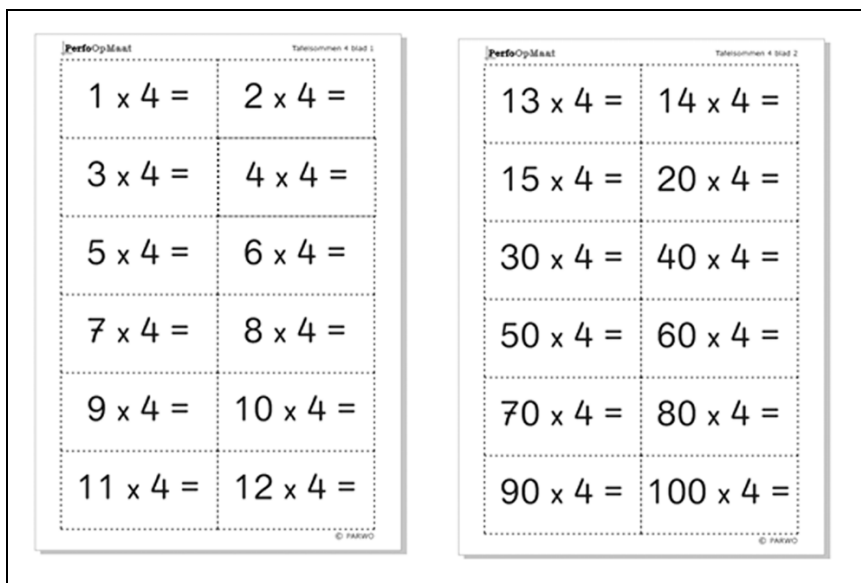
(11a)



(11b)

figuur 11a en 11b: ondernemen op gedifferentieerd niveau

Dankzij het gebruik van de pizzadozen kwamen kinderen op een natuurlijke manier tot een regelgewijze notatie, namelijk door elke denkstap die ze maakten op te schrijven. Op basis van deze ervaringen, ontwierpen we kaartjes met tafelsommen. We beperkten ons daarbij niet tot één tot en met tien keer, maar namen ook elf, twaalf, dertien, veertien en vijftien keer en de tienvouden tot en met honderd op (fig.12).



figuur 12: voorbeeld van de somkaartjes van de 'tafel' van vier

Kinderen kregen bijvoorbeeld de opdracht om een set (bijvoorbeeld de tafel van vier) voor zich neer te leggen en dan om beurt twee kaarten te pakken waarvan ze dachten het gecombineerde antwoord te kunnen berekenen. Een kind kon bijvoorbeeld 100×4 en 3×4 pakken als het weet dat dit 400 en 12 is en dus samen 412 oplevert. De som en de deelstappen werden genoteerd en de andere leerling controleerde het antwoord met behulp van de rekenmachine of door op de achterkant van de kaarten de antwoorden van de aparte opgaven te controleren. Zodoende sloegen we in feite een brug naar het meest formele niveau.

12 formele sommen

Tot besluit van de lessenserie hadden we een laatste uitdaging voor de kinderen. We lieten ze een doos 'negerzoenen'⁸ zien met in die doos twaalf

negerzoenen. Daarnaast hadden we een hele stapel lege dozen. De uitdaging voor de kinderen was om - zonder te weten hoeveel dozen het precies waren - zich voor te bereiden op het berekenen van het precieze aantal. We vertelden ze dus niet direct hoeveel dozen het waren, maar gaven ze even tijd om alvast mogelijke steunsommen op te schrijven. Daarna vertelden we hen dat het ging om een stapel van 79 dozen. Iedereen die kon berekenen hoeveel negerzoenen er in totaal in de dozen had gezeten, kreeg er een-tje om op te eten. Uiteindelijk heeft elk kind, soms met wat aanwijzingen, 79×12 opgelost en gingen ze allemaal met een negerzoen naar buiten.

We denken dat hier ongeveer de grens ligt voor wat deze kinderen nu vlot maar vooral inzichtelijk zouden moeten kunnen oplossen. Het drijfvermogen is inmiddels goed opgebouwd. De kinderen begrijpen wat een vermenigvuldiging inhoudt en hebben vaardigheden opgebouwd en inzichten ontwikkeld om ook al complexere vermenigvuldigingen tot een goed eind te brengen. Iets wat zich hierbij wel wrekt is het feit dat een aantal kinderen in een eerder stadium onvoldoende drijfvermogen had ontwikkeld in de getalgebieden tot twintig en honderd. Veel kinderen bleven basaal rekenwerk tellend oplossen. Dat was niet alleen tijdrovend maar is ook foutgevoelig. Omdat ze op het gebied van het vermenigvuldigbegrip een hogere denksnelheid hebben ontwikkeld, struikelden ze over hun voortvarendheid en maakten fouten in de voor hen tijdrovende (want tellend uitgevoerde) deelstappen. De zakrekenmachine bleek hierbij vooralsnog een uitkomst. Door daarmee tussenantwoorden te controleren konden deze kinderen toch hun inzichtelijke aanpak tot een goed einde brengen. Door een duidelijke stapsgewijze manier van uitwerken te hanteren, met de directe feedbackmogelijkheden die het gebruik van een rekenmachine bood, zagen we ook een behoefte ontstaan bij de betreffende kinderen om ook basale optel- en aftrekvaardigheden beter te leren beheersen.

13 conclusie

Terugkijkend kunnen we concluderen dat alle mogelijke opgaven zoals die in methoden vrij sterk verspreid door het basisonderwijs te vinden zijn in de *try-out* allemaal aan bod zijn gekomen. We boekten dus winst door niet te wachten tot de tafels van tien geautomatiseerd waren. Net zo min hebben we kinderen opgehouden die een aantal basisvaardigheden bij het optellen en aftrekken nog misten. Dus het hebben van hoge verwachtingen van kinderen werkt, mits ondersteund met goed materiaal en goede didactische inbedding. Dat houdt in dat recht wordt gedaan aan alle aandachtsgebieden: 'realiteit', 'wiskunde', 'leerling' en 'onderwijs'.

de realiteit

Omdat de realiteit bron en toepassingsgebied is, zorgden we er voor dat deze steeds in de les betrokken werd. De confrontatie daarmee leidde tot de behoefte aan abstractie. Door de kinderen de werkelijkheid te laten verkennen en hen ruimte te bieden om te mathematiseren, zagen we ze greep krijgen op formele somnotaties. Het werd voor de kinderen gaandeweg steeds duidelijker wat een vermenigvuldiging inhoudt en dat leren vermenigvuldigen niet alleen een kwestie is van het op formeel niveau leren van de tafelsommen.

de wiskunde

We beschouwen wiskunde als méér dan alleen sommen maken. Ook het proces dat leidt tot algemene toepasbare wiskundige principes zien wij als wiskunde. Bovendien kozen we voor de benadering om vermenigvuldigen breder te zien dan herhaald optellen. Omdat een vermenigvuldiging zich in de werkelijkheid vooral manifesteert als een beschrijving van een structuur (het aantal koekjes in een pak staat op de verpakking vaak als een 'keersom') hebben we kinderen dat zelf laten herontdekken door hen structuren te laten beschrijven. Zodoende verkenden ze het 'uiterlijk en de functionaliteit' van vermenigvuldigen. Dat een beschrijving als 6×4 van het aantal stickers op een vel ook een antwoord oplevert, was in eerste instantie nog niet aan de orde. Met modelmateriaal hebben we afstand genomen van de werkelijkheid en dynamiek ingevoegd. Door het gebruik van het modelmateriaal werden ook verschillende andere structuurverkenningen ontdekt en geoefend zoals het omkeerprincipe, halveren, verdubbelen, een keer meer, een keer minder. Vanuit deze verkenningen ontstonden getalrelaties die - ook letterlijk - werden opgebouwd met behulp van pizzadozen. Door aanpakken stapsgewijs te noteren kwam ook het meest formele niveau in zicht. De tafels hadden de kinderen aan het eind van de *try-out* nog niet gememoriseerd, maar wel was een fundamentele inzichtelijke basis gelegd, waardoor zelfs al opgaven als 79×12 tot een goed eind gebracht konden worden.

de leerling

De winst die wij boekten betreffende inzicht in vermenigvuldigen en de vaardigheid om ook grote vermenigvuldigingen al systematisch op te lossen is bijzonder te noemen, zeker aangezien deze *try-out* in een tijdsbestek van vijf weken heeft plaatsgevonden bij een klas uit het speciaal basisonderwijs. Blijkbaar kunnen leerlingen - als ze op de juiste manier uitgedaagd en gefaciliteerd worden - tot grote hoogte stijgen. De rijkdom van de leerrollen zoals we die hebben neergezet in de karakters heeft aan dit resultaat zeker bijgedragen. Vanuit deze ervaringen zijn vraagtekens te

plaatsen bij de huidige inrichting van het onderwijs en de tijd die feitelijk nodig is om zo'n basis te leggen.

het onderwijs

De nieuwe aanpak die we in dit artikel schetsen, veronderstelt dat het onderwijs op verschillende manieren gefaciliteerd wordt en niet te eenzijdig op toetsresultaten leunt. Daarbij moeten leerkrachten tijd en ruimte krijgen om zichzelf verder te professionaliseren om nog beter greep te krijgen op de ontwikkeling van kinderen. We denken dat er voldoende kansen liggen om de opbrengsten in het onderwijs stevig te verhogen. Naar aanleiding van eerdere ervaringen en deze *try-out* hebben we daarom een didactisch kader ontwikkeld dat hier aan bijdraagt (fig. 13). We focussen op groei en proberen de essenties van het groeiproces te beschrijven. Op termijn zal bovendien gewerkt worden aan een toetsinstrument om de verschillende fasen in het leerproces te kunnen peilen, zoals dat ook voor de eerste matrix is gebeurd (Moerlands, Van der Straaten & Van der Straaten, 2008).

	vermenigvuldigen	delen	breuken	procenten	verhoudingen
toenemende formalisering	veem 4.5 kan in principe op papier alle vermenigvuldigingen met tussen haakjes berekenen	delen 4.5 kan in principe op papier alle delingen met tussen haakjes berekenen			
	veem 4.4 kan eenvoudig van de basistafels afgeleide vermenigvuldigingen oplossen; geeft binnen 5 seconden antwoord	delen 4.4 kan eenvoudig van de basistafels afgeleide delingen oplossen; geeft binnen 5 seconden antwoord			
	veem 4.3 heeft de tafels tot 10 gememoriseerd; geeft binnen 3 seconden antwoord	delen 4.3 heeft de tafels tot 10 gememoriseerd; geeft binnen 3 seconden antwoord			
	veem 4.2 heeft de tafels tot 10 gememoriseerd; geeft binnen 5 seconden antwoord	delen 4.2 heeft de basistafels tot 10 gememoriseerd; geeft binnen 5 seconden antwoord			
	veem 4.1 rekent met behulp van een rekenmachine vermenigvuldigingen met alle getallen uit	delen 4.1 rekent met behulp van een rekenmachine delingen met alle getallen uit			
	veem 3.5 kent en gebruikt de vermenigvuldigtafel in sommen als 5×162	delen 3.5 kan delingen met 10-vouden als $1620 : 10$, maar ook $162 : 10$			
	veem 3.4 is in staat om 'grote' vermenigvuldigingen in de duizenden te berekenen; kan met een minder strategie een gemiddelde vermenigvuldiging oplossen	delen 3.4 deelt de relatie tussen $2 \times 4 = 8$ maar ook tussen $15 \times 15 = 225$			
	veem 3.3 kan bij een gegeven vermenigvuldiging op verhaalen, verhalen, kan met een minder strategie een gemiddelde vermenigvuldiging oplossen	delen 3.3 kan verhaalen vertellen m.b.v. externe structuren			
	veem 3.2 kent de basistafels 1, 2, 3, 4, 5, 10, 20, 50, 100 x 10-100	delen 3.2 kan van alle getallen tot 100 de eenzijdige delingen berekenen			
	veem 3.1 kent de basistafels 1, 2, 3, 4, 5, 10, 20, 50, 100 x 10-100	delen 3.1 kan alle getallen tot 100 de eenzijdige delingen berekenen			
	veem 2.4 is in staat om een vermenigvuldiging op te lossen door structuren te herkennen en te gebruiken	delen 2.5 maakt bij delingen op concreet niveau gebruik van verhoudingen			
	veem 2.3 herstructureert vermenigvuldigingsstructuren naar deelvormen	delen 2.4 kan een deelvorm naar herstructuren naar een verhouding (bijv. met rest)			
	veem 2.2 is in staat om een vermenigvuldiging op te lossen door sprongen te maken op een rechte lijn	delen 2.3 kan de sprongrechten bepalen bij een sprongrechten toetsen			
	veem 2.1 is in staat om uiteenlopende vermenigvuldigingsstructuren op te lossen naar een model: bijvoorbeeld, rechte getallen	delen 2.2 kan materiaal met een eigen structuur (beelden, kaart met diagrammen) vertalen m.b.v. deze structuur			
	veem 2.1 kent de basistafels 1, 2, 3, 4, 5, 10, 20, 50, 100 x 10-100	delen 2.1 kan vormen, lengtes en hoeveelheden herkennen			
	veem 1.4 is in staat om vanuit een vermenigvuldiging de beschreven structuur te interpreteren	delen 1.5 kan een deelvorm matchen met een situatie			
	veem 1.3 beschrijft een structuur uit de werkelijkheid (2D/3D) in symbolen	delen 1.4 is in staat om een deelvorm te vertalen naar een deelvorm			
	veem 1.2 weet dat de functie van een vermenigvuldiging een beschrijving van ordening of van afmetingen kan zijn	delen 1.3 kan hoeveelheden handelend verdelen			
	veem 1.1 is in staat om vermenigvuldigingsstructuren in de werkelijkheid te herkennen	delen 1.2 kan basisvormen (cirkel, streek, vierkant, etc.) vertalen			
		delen 1.1 kent de verschillende deelvormen (1, 2, 3, 4, 5, 10, 20, 50, 100)			

© EDMAT-PARWO, 2007

www.edumat.nl/PARWO

uitbouw in domein en complexiteit

figuur 13: het didactisch kader ingevuld voor vermenigvuldigen

Met de invulling van deze tweede matrix (die later aangevuld wordt met toetsen en passend oefenmateriaal) voor het onderdeel vermenigvuldigen

hopen we leerkrachten de nodige houvast te kunnen bieden om de vertaalslag te maken van de inzichten uit de beschreven *try-out* naar hun eigen klassensituatie. In hoeverre die transfer mogelijk is (en wat daar verder precies voor nodig is), is onderwerp van vervolgonderzoek.

noten

- 1 Zie: www.parwo.nl/parwoposter/karakters voor meer informatie.
- 2 Zie: www.edumat.nl/pom/ voor meer informatie.
- 3 Zie: www.edumat.nl/007-207-Rekentafel/ voor meer informatie.
- 4 Omdat de rekenkistjes nog in productie waren ten tijde van de *try-out* hebben we gebruik gemaakt van de leerlingversie van het goudbord.
Zie: www.edumat.nl/007-206-Schubi/Goudbord.
- 5 Zie: www.edumat.nl/007-204-Perfodidac/Vierkantjes voor meer info.
- 6 Zie: www.youtube.com/watch?v=3MNZ5X_LBJI voor een voorbeeld waar kinderen met dit materiaal aan de slag zijn.
- 7 Kijk op: www.youtube.com/watch?v=inoSbWhSpnc om te zien hoe deze jongen dit probleem oplost.
- 8 Tegenwoordig wordt voor negerzoenen de minder 'gekleurde' term zoenen gebruikt, maar omdat dit in de tekst mogelijk verwarring teweeg brengt kiezen we voor de - in de volksmond nog steeds veel gebruikte - term negerzoenen.

literatuur

- Boswinkel, N. & F.J. Moerlands (2003). Het topje van de ijsberg. In: K. Groenewegen (ed.), *Nationale Rekendagen 2002 - een praktische terugblik*. Utrecht: Freudenthal Instituut, 103-114.
- Craats, J. van de (2007). Waarom Daan en Sanne niet kunnen rekenen. *Nieuw Archief voor Wiskunde*, 5-8 (2), 132-136
- Devlin, K. (2008a). *It ain't no repeated addition* [Web log post]. Ontleend aan: http://www.maa.org/devlin/devlin_06_08.html
- Devlin, K. (2008b). *It's still not repeated addition* [Web log post]. Ontleend aan: http://www.maa.org/devlin/devlin_0708_08.html
- Devlin, K. (2008c). *Multiplication and Those Pesky British Spellings* [Web log post]. Ontleend aan: http://www.maa.org/devlin/devlin_09_08.html
- Devlin, K. (2011). *What Exactly is Multiplication?* [Web log post] Ontleend aan: http://www.maa.org/devlin/devlin_01_11.html
- Dolk, M. (1997). *Onmiddellijk onderwijsgedrag. Over denken en handelen van leraren in onmiddellijke onderwijssituaties*. Culemborg: Technipress (proefschrift).
- Dolk, M. (2004). De volgende stap: op weg naar beter onderwijs. In: R. Keijzer & E. de Goeij (eds.). *Rekenen-wiskunde als rijke bron*. Utrecht: Freudenthal Instituut, 25-32.
- Dolk, M. (2007). Inspiratie als kerndoel. *Alternatieven voor de school*. Den Haag: Onderwijsraad, 31-50.
- Edelson, D.C. (2002). Design research: what we learn when we engage in design. *Journal of the learning sciences*, 11(1), 105-121.
- Freudenthal, H. (1991). *Revisiting Mathematics Education. China Lectures*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers
- Gelderblom, G. (2011). Waarom zijn opbrengstgerichte scholen succesvol? *Basis-*

- schoolmanagement*, 24 (8), 4-7.
- Gravemeijer, K.P.E. (1994). *Developing Realistic Mathematics Education*. Utrecht: Freudenthal Instituut
- Gravemeijer, K.P.E. (2002). Preamble: From Models to Modeling. In: K. Gravemeijer, R. Lehrer, B. van Oers & L. Verschaffel (eds.), *Symbolizing, modeling and tool use in mathematics education*, Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 7-22.
- Gravemeijer, K.P.E. (2004). Local Instruction Theories as Means of Support for Teachers in Reform Mathematics Education. *Mathematical Thinking and Learning*, 6(2), 105-28.
- Keune, F. (1998). *Naar de knoppen*. Ontleend aan: <http://www.math.ru.nl/~keune/oratie/oratie.html>
- Moerlands, F. & H. van der Straaten (2009). *Passend rekenwiskunde onderwijs voor alle leerlingen*. Ontleend aan: [http://www.rekenpilots.nl/attachments/2023001/Passend_rekenwiskundeonderwijs_voor_alle_leerlingen_lv_\(210909\).pdf](http://www.rekenpilots.nl/attachments/2023001/Passend_rekenwiskundeonderwijs_voor_alle_leerlingen_lv_(210909).pdf)
- Moerlands, F., D. van der Straaten & H. van der Straaten (2008). Quickscans met de PARWO-matrix. *Volgens Bartjens* 28(2), 25-27.
- Simon, M.A. (1995). Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. *Journal for research in Mathematics Education*, 26(2), 114-145.
- Straaten, D. van der, F. Moerlands & J. den Ouden (2011). Klimgaas, houvast bij het zoeken naar een nieuwe methode. *Volgens Bartjens*, 31(2), 28-30
- Straaten, D. van der & F. Moerlands (2010). Evi en de rekentafel. *Reken-wiskunde-onderwijs: onderzoek, ontwikkeling, praktijk*, 29(4), 58-66.
- Vermeulen, W., F. Moerlands & P. de Wert (2008). Faseren bij het leren van rekenen en wiskunde. *Jeugd in School en Wereld* 92, 1-6.