BREUKEN, VERHOUDINGEN EN PROCENTEN IN NEDERLANDSE REKEN/WISKUNDEMETHODEN

W. Faes, PA Tilburg/Arnhem
L. Streefland, OW & OC

1. INLEIDING

Wie in het beknopte bestek van enkele pagina's iets wil zeggen over de onderwerpen uit de titel, zal met hoofdzaken genoegen moeten nemen. Daarbij past een globale beschrijving.
Als algemene kenmerken voor deze bijdrage kunnen worden genoemd:
- de begripsinbedding; het gebruik van contexten;
- de samenhang van breuken, verhoudingen en procenten in het programma;
- visuele modellen en schema's;
- inzichtelijk opereren;
- defecten van eenzijdige, op rigide regeltoepassing gerichte benaderingen.

We zullen daarbij alle, anno 1983, op de markt beschikbare methoden in de beschouwingen betrekken.

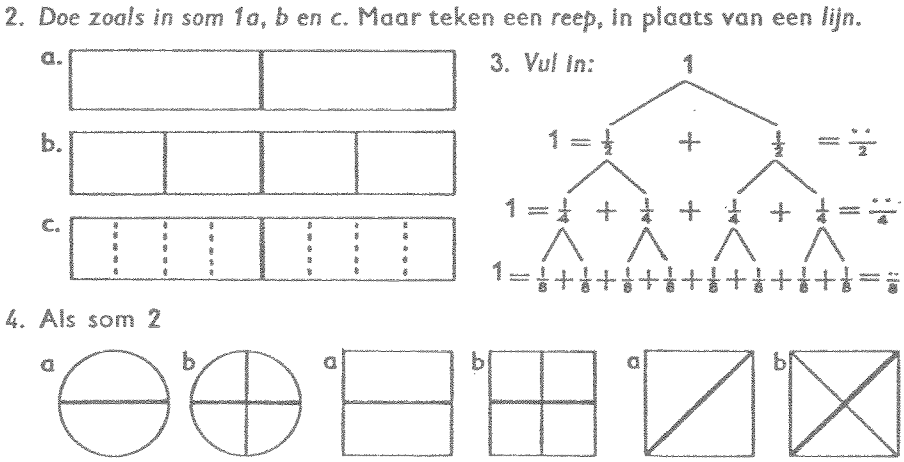
2. EERLIJK VERDELEN, INSTAP PER TRADITIE

In de methoden met een traditionele benadering van de breuken etc. kenmerkt de begripsinbedding zich door een schrale, eenzijdige instap. Bij de breuken voltrekt het verdelen zich *binnen* de eenheid, is er van levensechte problemen geen sprake en wordt er rechtstreeks afgestevend op de regels voor de bewerkingen en daarna eindeloos geoefend, rij na rij, met het oog op de retentie van het 'geleerde'. Verhoudingen worden als evenredigheden gedefinieerd, zeg afgedwongen aan 'grootheden', waarvan de relatieve samenhang voor het overige duister is. (Voorbeeld: 'de knikkers van Jan en Piet verhouden zich als .....' of 'het zakgeld van Annet verhoudt zich tot het zakgeld van Marlies als .....'.)
Met de procenten is het overeenkomstig gesteld: een definitorische instap, gevolgd door sommen maken. "1% $=\frac{1}{100}$ deel" en "100% is alles", en ..... rekenen maar.
Afgezien van kleine nuances van niet-doorslaggevende aard, kunnen de benaderingen in NCR, NZR, NAT en AR [1]) met het voorafgaande getypeerd worden.
Van enige samenhang van breuken, verhoudingen en procenten is veelal geen sprake, tenzij men opgaven als '25% = $\frac{1}{4}$ deel' als bewijslast daarvoor wil aanvoeren. (En, wie wil dat nog?)
Met dit alles wil niet gezegd zijn, dat het eerlijk verdelen als zodanig geen geschikte toegang tot de breuken zou zijn. Integendeel; en we zullen hierop

ook nog terugkomen (6). Maar nu eerst:

3. EEN IETS BREDERE INBEDDING

Rechtvaardig verdelen zoals benut (delen binnen het geheel, geen natuurlijke eenheden > 1, accent op resultaat en niet op verdeelproces, niet probleemgeoriënteerd, maar gericht op regels voor de bewerkingen, etc. .....) is niet de enige concrete bron voor de breuken. Ook het meten kan zo'n toegang zijn, terwijl men zich bij het eerlijk verdelen niet behoeft te beperken tot de klassieke pannekoeken, doch ook allerlei meer meetkundig getinte verdelingen kan bekijken.
De volgende voorbeelden uit NR [2]) laten zien wat we precies bedoelen. (Zie figuur 1)



[3])

Figuur 1

Het verdelen krijgt op deze wijze iets meer het karakter van een algemene operatie. De directe gerichtheid op de breuken blijft echter onmiskenbaar het hoofdkenmerk van de benadering.

4. METEN ALS INSTAP

Zoals al werd opgemerkt, kan ook het meten als toegang tot de breuken gekozen worden. Breuken in meetgetallen treden op wanneer het meten met een geschikte maat niet precies opgaat. Een verfijning van de maat wordt noodzakelijk wanneer de behoefte aan een preciezer resultaat dat verlangt. In maatgetallen als $1\frac{1}{4}$ minuut, $1\frac{1}{2}$ seconde, $1\frac{1}{2}$ kilogram, vindt men zulk meten terug.
Het verfijnen van de maat berust op eerlijk verdelen, zij het dat dit met een volledig andere bedoeling wordt uitgevoerd dan bij het eerlijke verdelen in verdeelsituaties.
De manier waarop de maat verfijnd wordt vloeit rechtstreeks voort uit de situatie die in het geding is, en berust dus in feite op een ad hoc beslissing.
Een voorbeeld uit Taltaal (Zie figuur 2)

Als de haai met 'de vadem' gemeten wordt, blijkt deze één keer en nog (ongeveer) $\frac{1}{3}$ keer te passen. (De gekozen maat wordt dus verfijnd naar het stuk dat overblijft.) De haai blijkt 'ruim $1\frac{1}{3}$ vadem' te zijn. Zou men echter de lengte van de boot met de vadem gemeten hebben, dan was een andere verfijning uit de bus gekomen met als resultaat: de boot is $1\frac{1}{2}$ vadem lang. Systematisch dezelfde verfijning toepassen - zeg een verfijning in tienden - opent de mogelijkheid tot een uitweg uit de breuken ten gunste van een notatie in kommagetallen.

Figuur 2 [4]

Met het oog op een veelzijdige inbedding van het breukbegrip is de invalshoek vanuit het meten belangrijk, omdat van daaruit de getallenlijn zich als model aandient. Bovendien wordt door het meten met wisselende eenheden het relatieve aan 'breuk' steeds beklemtoond. Een kwestie die juist wordt tegengewerkt wanneer men van breukendozen met vaste eenheden gebruik maakt of breuknamen voluit schrijft, bijvoorbeeld '2 vierden + 2 vierden = 1 hele', daarmee de indruk wekkend dat breuken benoemde getallen zijn en zich bij het opereren ook als zodanig gedragen. [5]

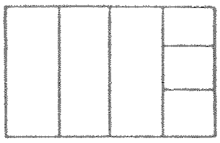
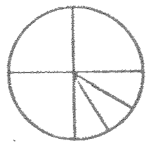
5. UITSTAPJE BIJ PIAGET EN DAVYDOV

'Eerlijk verdelen' en 'meten' als veroorzakers van breuken, hebben ook model gestaan voor (ontwikkelingspsychologisch) onderzoek. Piaget et.al [6] analiseerden het eerlijk verdelen in het kader van vlakverdelingen en oppervlakte.
Als positieve elementen in dit onderzoek kunnen worden genoemd:

- het onderkennen van de noodzaak ervaring op te doen in het uitvoeren van verdeeltaken als voorwaarde tot de verwerving van het breukbegrip;
- het wijzen op de relativiteit van breuk als essentieel en in verband daarmee het bepleiten van variërende eenheden.

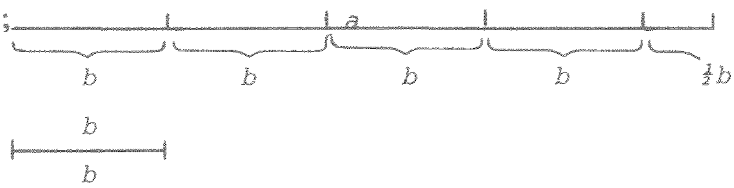
Voor het overige hebben de starre en eenzijdige analyses vooraf de onderzoeksuitkomsten heel sterk gekleurd. Zo ging men uit van het feit dat er een vaste

relatie diende te zijn tussen het aantal sneden om een verdeling te voltrekken en het aantal delen waarin wordt verdeeld. Deze claim - overigens volkomen in tegenspraak met hoe kinderen verdelingen uitvoeren - hing ermee samen, dat de beschikbaarheid van een (mentaal) schema verondersteld werd (voor iedere verdeling) om deze so-wie-so te kunnen uitvoeren.
Uitwegen van kinderen bij het verdelen in drieën op de volgende manier (Figuur 3)

 of , pasten dus niet in het verdeel- en breukconcept van Piaget.

Figuur 3

Omdat grootheden centraal staan in het programma dat werd ontwikkeld door Davydov, ligt het voor de hand dat hierin de breuken vanuit het meten geïntroduceerd werden. Dit geschiedde op de wijze zoals eerder geschetst.
Davydov kritiseerde de benadering in het Sovjet-rekenonderwijs, die uitsluitend op het verdelen gebaseerd was.
Hij koos voor het meten vanwege
- de grootheden in het aanvankelijk rekenonderwijs;
- de relatie met verhoudingen die dan vanzelf ontstaat; in het meetgetal $4\frac{1}{2}$ wordt de verhoudingsrelatie tussen grootheid a en maateenheid b tot uitdrukking gebracht (figuur 4);



Figuur 4

  bovendien spruiten breuken in gemengde getallen (> 1) op natuurlijke wijze uit de aktiviteit voort. (waaruit men kan afleiden dat Davydov kennelijk bezwaar had tegen het uitsluitend verdelen binnen de eenheid dat leidt tot echte breuken (< 1)).
  Een sterk accent kreeg de gelijkwaardigheid van breuken en het ordenen. Gelijkwaardigheid werd - terecht - als dé basiseigenschap van het breukenrekenen beschouwd. Overigens heeft Davydov zijn kritiek op het bestaande onderwijs niet kunnen rechtvaardigen. De ene eenzijdige benadering werd namelijk ingeruild voor de andere. Ook hij ging veel te snel tot formaliseren van regels voor bewerkingen over, zodat de bezwaren van de traditionele benadering gehandhaafd bleven.

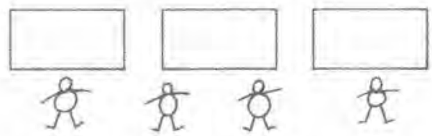
6. EERLIJK VERDELEN IN VERDEELSITUATIES

Eerder (2) werd de indruk gewekt dat het eerlijk verdelen als toegang tot de breuken best de moeite waard kan zijn. Dat is ook zo. Ingebed in levensechte verdeelsituaties is zelfs een rijke, probleemgeoriënteerde benadering mogelijk. In WIG [7]) vinden we van een dergelijke benadering het nodige terug.(Figuur 5).

a In een pannekoekenhuis staan tafeltjes voor 4 kinderen.
Op iedere tafel worden 3 pannekoeken gezet.
Hoe moeten die nu eerlijk verdeeld worden?
Laat zien wat ieder kind krijgt. Doe dat op werkblad 14.
Hoe noem je nu zo'n stuk?

Figuur 5 [8])

Laten we een voorbeeld onder a) eens bij 'de kop nemen'.'Vier kinderen verdelen drie pannekoeken'. Van breuken is nog geen sprake. Het proces dat de breuken teweeg zal brengen moet nog op gang komen. Dat ook de 'vier kinderen' in de aandacht zijn is essentieel. De verhouding pannekoeken-kinderen is uiteindelijk beslissend voor ieders resultaat, wanneer eenmaal eerlijk verdeeld is.(Figuur 6)



Figuur 6

In de breuken waarmee het uiteindelijke resultaat beschreven wordt is genoemde 'ratio' nog herkenbaar. Laten we maar eens kijken.

a)

Figuur 7

De pannekoeken worden de één na de ander in vier gelijke stukken verdeeld. (Figuur 7)

Elk krijgt: "een kwart en een kwart en een kwart".
"$\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$"
"drie keer een kwart"; "$3 \times \frac{1}{4}$"
"drie kwart(en)"; "$\frac{3}{4}$".

b)

Figuur 8

Eerst worden 2 pannekoeken gehalveerd en de laatste in vieren gedeeld.(Figuur 8)

Elk krijgt: "een half en een kwart"; "$\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$".

c)

Figuur 9

Vooruitlopend op de uitkomst kan ook "een hap van een kwart" uit iedere pannekoek worden weggesneden, daarmee rechtdoend - althans voor 3 van de 4 verdelers - aan". (Figuur 9)

Elk krijgt: "drie kwart"; "$\frac{3}{4}$", maar ook
"een hele min een kwart"; "$1 - \frac{1}{4}$".

Het samenbrengen van al deze oplossingen en beschrijvingen levert nogal wat op.

$$\tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4} = 3 \times \tfrac{1}{4} = \tfrac{3}{4} = 1 - \tfrac{1}{4} = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} = \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{2}$$

Achter $\frac{3}{4}$ blijkt op zichzelf al een hele breukenwereld schuil te gaan. $\frac{3}{4}$ is van elk van de gevonden uitdrukkingen de uiterste verkorting. "Hoe noem je nu zo'n stuk", vragen de auteurs. De kinderen zullen dit niet al te letterlijk moeten nemen, want ze krijgen geen 'stuk', maar 'stukken' als uitkomst met daarbij passende - en dus, zoals we gezien hebben - nogal gevarieerde beschrijvingen.
Het allerbelangrijkste in de benadering is echter het volgende.
De breuken worden door de kinderen zèlf *geconstrueerd* vanuit verdeelsituaties:
In het verdeelproces en de beschrijving blijkt het *begripsvol opereren* met breuken besloten te liggen. Dit speelt van het begin af mee. Breuken en begripsvol opereren trekken aldus onafscheidelijk op, bijdragend aan de ontwikkeling van een operationeel breukbegrip. De kloof tussen de fase van de begripsverkenning en het opereren met breuken, *die in vrijwel alle methoden bestaat*, wordt hiermee gedicht.
Het is in feite net zo gesteld als met het tellen. In het verdertellen, terugtellen, met zoveel tegelijk verder en terugtellen worden reeds voorschotten genomen op de bewerkingen optellen, aftrekken enzovoort, met natuurlijke getallen. Wat het opereren met breuken aangaat, zou men het ook zó kunnen zeggen.
In de methoden tot dusver is het belang van het begripsvol opereren in het geheel niet of slechts in te geringe mate onderkend. Van de begripsvorming springt men direct over op het regelgestuurd opereren.
Tenslotte nog twee opmerkingen.
Allereerst de kwestie van de *gelijkwaardigheid*.
Die komt bij deze benadering ten volle tot zijn recht in:
- de gelijkheid van delen en eenheden;
- de gelijkwaardigheid van situaties in hun uitkomst. (Figuur 10).

aantal pannekoeken	3		9		12	18	
aantal kinderen	4	8		16			36

Figuur 10

In een verhoudingstabel kunnen dergelijke gelijkwaardige situaties worden opgeslagen.
'Ieder krijgt $\frac{3}{4}$' scheert alle situaties in de tabel over één kam.
N.B. De auteurs van WIG hebben de tabel ook nog anders gebruikt, wat misverstanden kan wekken.
- de gelijkwaardigheid van beschrijvingen:

Wat het ordenen betreft volstaan we met te wijzen op de mogelijkheid tot verge-

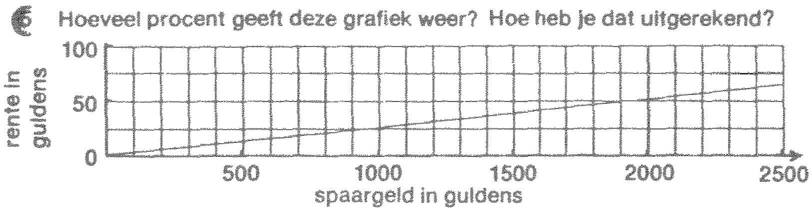
lijken van situaties. "In welk geval krijg je meer? en Hoeveel meer?" zijn vragen die de ordening uitlokken.
Tenslotte merken we nog op dat door uit te gaan van 'situaties' op natuurlijke wijze een verbinding met verhoudingen gelegd wordt. (Figuur 11)

Figuur 11 [10]

7. VERHOUDINGEN

De overheersende rol van de evenredigheidsvraagstukken als bepalers van 'het aanzien van verhoudingen' in methoden is definitief uitgespeeld. Meer en meer vindt in methoden een toewending naar de realiteit plaats als het om verhoudingen gaat.
Zo kan men in OR.[11] bijvoorbeeld problemen aantreffen in verband met het maken van mengsels (limonade, verf), het leggen van tegelvloeren volgens zeker voorschrift, de relatie stok-zonneschaduw, die mede in dienst van de begripsverkenning gesteld worden.[12]
De 'beweging' in de verhoudingen lijkt nog niet volledig uitgewerkt.
De benadering van verdeelsituaties in 'de Wereld in Getallen' (WIG) met het oog op de breuken levert een bijdrage tot hechtere verankering van dit onderwerp in het totale programma. Het moet gezegd, in het algemeen is 'verhoudingen' nog een betrekkelijk los onderwerp in veel methoden.
Opvallend is overigens wel, dat de visuele component in de benadering van verhoudingen steeds belangrijker wordt. Bovendien wordt meer en meer gebruik gemaakt van de verhoudingstabel om het flexibel rekenen met verhoudingen in toepassingssituaties vorm te geven en te ondersteunen.
Binnen het korte bestek van deze bijdrage beperken we ons tot een enkel voorbeeld waarmee nog een nieuwe verbinding in het reken-wiskundeprogramma in het

vizier komt. Daarmee willen we overigens geenszins de indruk wekken dat het belang van verhoudingen voor het wiskundig leerproces van kinderen aan dat van de breuken ondergeschikt zou zijn. Integendeel. Nu dan het voorbeeld.
In Taltaal (TT)[13]) wordt namelijk een verbinding gelegd tussen het procentbegrip en verhoudingen. (Figuur 12)



[14])

Figuur 12

In tegenstelling tot de meeste methoden die het procentbegrip per definitie invoeren (zie 2) wordt in TT achter een percentage een verhoudings*klasse* gedacht. Bij variërend spaarbedrag in guldens variëert de rente naar rato en dit geeft uitdrukking aan het feit dat procent berust op een keuze. In de grafiek lezen we af:

Rente in guldens	$2\frac{1}{2}$	$12\frac{1}{2}$	25	$37\frac{1}{2}$	50	$62\frac{1}{2}$
Spaargeld in guldens	100	500	1000	1500	2000	2500

en dat is telkens '2½ procent' of '2½ per honderd' of - en dit is het keuzemoment - 'was het spaargeld 100, dan was de rente 2½'.
Het paar $\frac{2\frac{1}{2}}{100}$ staat model voor een verhoudingsklasse, die ook door '1 op 40' of welk ander paar dan ook gepresenteerd kan worden.
De normering op 100 dient het gemak van de mens, omdat daardoor de weg naar inpassing in ons decimale getallensysteem is vrijgegeven. Het vergelijken van twee fracties - en daarvoor dienen toch percentages - die op honderd genormeerd zijn, betekent het vergelijken van twee kommgetallen. En daarvoor is het simpele middel van plaatswaarde toereikend.
'Vergelijk $\frac{7}{16}$ en $\frac{12}{25}$' wordt 'vergelijk 0,43 ... en 0,48' en men heeft de ordening op een presenteerblaadje erbij.
Jammer is, dat deze verbinding met verhoudingen in TT een constatering achteraf is. Bij beschouwing van de beoogde verbinding tussen 'verhouding' en 'procent' *vooraf*, kan de introductie van het procenbegrip gegrondvest worden op de ervaring die kinderen opdoen in het voortbrengen van klassen van equivalente verhoudingen in en door middel van verhoudingstabellen. Op grond van bedoelde

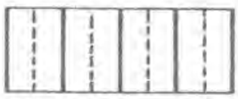
voortbrenging kan dan de keuze van de normering op 100 gemotiveerd worden vanuit het vergelijkbaar maken van situaties en het gemak van het decimale stelsel. Hier ligt tevens een verbinding met de bewerkingsprocedures voor het aftrekken en optellen van ongelijknamige breuken waarop we nog terug zullen komen. (Zie 8.3)

8. BEWERKINGEN MET BREUKEN

8.1 Optellen en aftrekken

Deze bewerkingen zullen we, wat de methoden betreft buiten beschouwing laten omdat nog geen enkele methode er in geslaagd is de opbouw van rekenregels voor genoemde bewerkingen te doen voortspruiten uit de begripsverwervingsfase. Een uitzondering moeten we in dezen wellicht maken voor WIG. Tot en met deeltje 4b zijn de mogelijkheden voor bedoelde samenhang voorhanden in deze methode. Het zal van de verdere uitwerking in de deeltjes voor de twee laatste leerjaren afhangen of de auteurs er in slagen een hecht samenhangende deelleergang voor de breuken te realiseren. Men zou kunnen tegenwerpen, dat de door ons beoogde samenhang in andere methoden ook aangetroffen kan worden. (Figuur 13)

Soms kan een figuur je helpen.



$\frac{1}{2} + \frac{3}{8}$ In de figuur liggen halven, vierden en achtsten.

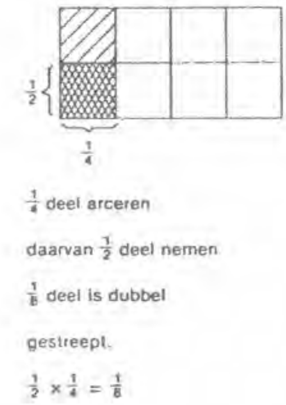
$\frac{1}{2} = \frac{4}{8}$ de som wordt $\frac{1}{2} + \frac{3}{8} = \frac{4}{8} + \frac{3}{8} = \frac{7}{8}$

$\frac{3}{4} + \frac{1}{8}$ De figuur zegt $\frac{3}{4} = \frac{6}{8}$ de som wordt dus $\frac{6}{8} + \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$ *Figuur 13*

Een dergelijke regelgerichte benadering [15]) hebben we echter niet op het oog. Immers, een leerling kan de stroken alleen maar verdelen zoals is aangegeven wanneer hij al *weet* waar hij naar toe werkt, dus de regel kent. Maar dan hebben de stroken weinig zin. De onderwijsgevende, die op deze wijze het optellen van ongelijknamige breuken uitlegt, biedt de leerlingen geen enkel houvast om in nieuwe gevallen de weg naar de gelijknamigheid zelf te traceren onder gebruikmaking van het strokenmateriaal.
In paragraaf 8.3 zullen we op enkele aspecten van een mogelijke uitwerking ingaan en dan meteen de kwestie van de samenhang met de procentrekening meenemen. (zie 7)

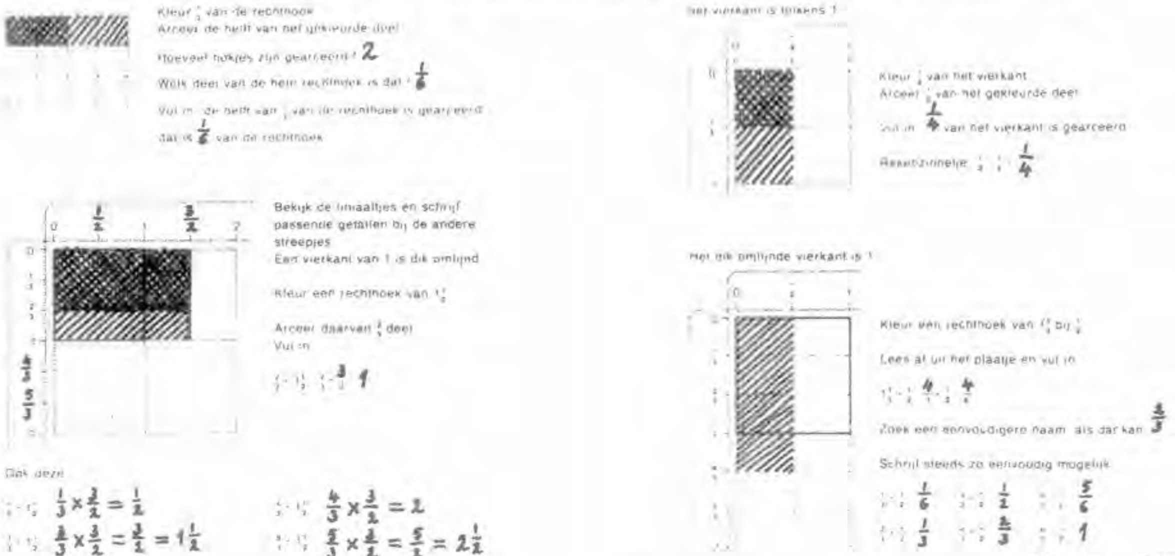
8.2 *Vermenigvuldigen*

Het vermenigvuldigen van breuken wordt nogal eens toegelicht aan het rechthoeksmodel Dit gebeurt soms op bedenkelijke wijze, zoals in OR: (Figuur 14)



Figuur 14 [16)]

en in andere gevallen meer verantwoord, zoals in GIB.[17)] Figuur 15)



Figuur 15 [18)]

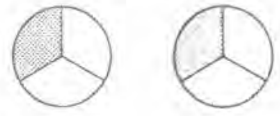
Wanneer men een dergelijke benadering inbedt in de deelleergang voor oppervlakte, althans daarbij nauw aansluit, is deze zeker zinvol.
Zo, zonder meer, wekken de benaderingen in OR en GIB een indruk van willekeur, omdat de verbinding tussen de toegepaste modellen en het vermenigvuldigen van breuken alleen op deze manier gelegd kan worden door iemand die al weet wat deze bewerking inhoudt.
Ook van het vermenigvuldigen kan worden gesteld dat deze bewerking zich van meet af bij de begripsvorming voordoet. (evenals het delen overigens, waarop we in dit artikel helemaal niet ingaan)
Zonder te streven naar volledigheid noemen we enkele voorbeelden.

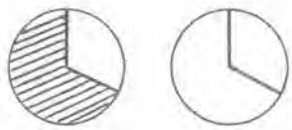
a. De verdeelsituatie '3 pannekoeken - 4 kinderen' gaf o.a. aanleiding tot beschrijvingen als $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}$; $3\times\frac{1}{4}$ en $\frac{3}{4}$, die met elkaar geïdentificeerd werden. (zie 6)
b. Kinderen zijn bij het eerlijk verdelen uit op originaliteit en efficiency. Ze zullen in het vorige geval de pannekoeken ook eens willen 'stapelen'. ("Want dan hoef je maar twee keer te snijden")

Vooraf gaat het om $\frac{1}{4}$ x 3 (of 3:4) en na het snijden  krijgt ieder 3x$\frac{1}{4}$.
$\frac{1}{4}$x3 en 3x$\frac{1}{4}$ zullen 'hetzelfde' moeten zijn.

c. Uitkomsten van verdeelsituaties kunnen weer startpunt zijn van nieuwe verdelingen.

Bijvoorbeeld. Eerst: 

1.  Ieder krijgt $\frac{1}{3}+\frac{1}{3}$, of

2.  Ieder krijgt $\frac{2}{3}$.

Wordt nu verder gedeeld met een vriendje, dan kan dit in het eerste geval uitkomen op

 $\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}=\frac{2}{6}$ en in het andere geval op 

$\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$ $\frac{1}{2}$ werkt dus in het ene geval als operator

op de 'maat $\frac{1}{3}$' die verfijnd wordt tot $\frac{1}{6}$ en in het andere geval op het aantal waarmee de 'maat $\frac{1}{3}$' vertegenwoordigd is. De 'teller keer teller en noemer keer noemer'-regel blijkt zich in de breukverwekkende verschijnselen dus minder nadrukkelijk te manifesteren dan het regelgerichte breukenonderwijs ons wil doen geloven.
Hiermee is het laatste woord over deze bewerking met breuken stellig nog niet gezegd. We besluiten met een pleidooi voor nauwgezette analyse van dergelijke toegangen tot de breuken in mathematisch-didactisch opzicht. En ..... dat betekent ook nauwgezet observeren hoe kinderen met dergelijke zaken omspringen en daarbij aansluiten.

8.3 Aftrekken en optellen met tabellen

Het uitgaan van (het vergelijken van) verdeelsituaties en de toepassing van tabellen daarbij legt een verbinding tussen breuken en verhoudingen vice versa (par.6). We willen hier beknopt schetsen hoe dergelijk tabelgebruik het proces kan dragen en sturen naar een procedure voor - vanuit het vergelijken eerst - het aftrekken van ongelijknamige breuken en naar analogie daarvan voor het optellen. Bij deze beknopte schets moet men zich realiseren, dat de leerlingen de nodige ervaring hebben opgedaan in het verkennen van verdeelsituaties en vergelijkingsproblemen binnen andere contexten en dat het werken met de verhoudingstabel eveneens op de nodige ervaring stoelt. Daarin heeft het gemakkelijk vergelijkbaar zijn, respectievelijk maken van (verdeel) situaties het nodige accent gekregen.

Probleem: *Iemand maakt koffie met een apparaat. De ene keer: drie schepjes koffie voor vier kopjes. Een andere keer: vier schepjes voor vijf kopjes. Welke koffie is sterker? (Verschil?)*

Gegeven de geschetste beginsituatie van de leerlingen kunnen de volgende oplossingen verwacht worden.

a. Voor beide keren koffiezetten worden de volgende tabellen samengesteld:

schepjes	3	6	9	12	15	
kopjes	4	8	12	16	20	

en

schepjes	4	8	12	16
kopjes	5	10	15	20

en op grond van $\frac{15}{20}$ en $\frac{16}{20}$ de gevraagde ordening en (eventueel) het verschil bepaald.

Het is duidelijk dat, tijdens het samenstellen van de tabellen, steeds al onderling vergeleken wordt.

b. Als a. waarbij de situaties $\frac{12}{16}$ en $\frac{12}{15}$ er worden 'uitgelicht', wat wel leidt tot de gevraagde ordening, doch de verschilbepaling (nog) onbeantwoord laat.

c. Tabellen van voldoend geachte 'omvang' samenstellen en pas daarna tot vergelijken overgaan.

Bijvoorbeeld de tabellen invullen tot en met

S	32	
K	40	

en

S	30	
K	40	

en uitkomen op een 'sterkteverschil' van $\frac{2}{40}$ schep per kop. Bij dit onbereflecteerd voortbrengen van situaties in tabellen wordt nogal eens het herhaald verdubbelen toegepast, waardoor de geschikte situaties voor het vergelijken veelal worden overgeslagen; een omstandigheid die aanleiding geeft tot zelfcorrectie.

d. Heel belangrijk is de mogelijkheid om steeds korter te gaan werken. De aandacht van de leerlingen richt zich op grond van de gegevens op gemakkelijk vergelijkbare situaties.

In hun streven daarnaar zullen zij de tussenwaarden in de tabel steeds minder nodig hebben, als hinderlijk gaan ervaren en dus overslaan.

Bijvoorbeeld:

schepjes	4	8	16
kopjes	5	10	20

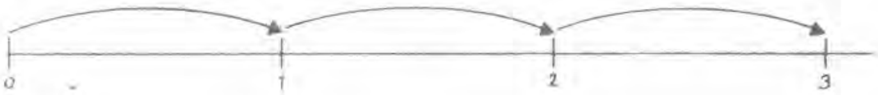
en:

schepjes	3	6	12	15
kopjes	4	8	16	20

Dergelijk 'progressief schematiseren' kenmerkt zich dus door
- verkorten (het overslaan van 'tussenstappen')
- aanpassing van de tabellen aan dergelijke verkortingen.

e. Op den duur gaan sommige leerlingen zó ver, dat zij de tabel de rug toekeren en vanuit de gegeven situaties rechtstreeks de gelijknamige breuken bepalen. Merk op hoe de getallen, waarop de situaties uiteindelijk genormeerd worden om tot vergelijking te kunnen overgaan, voortkomen uit de gegeven getallen.[19])
Bij het procentbegrip (zie 7) als verhoudingsklasse opgevat, verloopt het oplossen van vergelijkingsproblemen nagenoeg hetzelfde. Het enige verschil is, dat op zeker moment in het onderwijsleerproces *vooraf* voor een 'normering op honderd' gekozen wordt. Een dergelijke benadering verhoogt dus in belangrijke mate de eenheid en samenhang in het programma.
Door ook situaties in de context van het meten te beschouwen, kan de getallenlijn bij voorgaand proces als ondersteunend model een belangrijke rol vervullen.
Voorbeeld.

Dit zijn de stappen van vader:

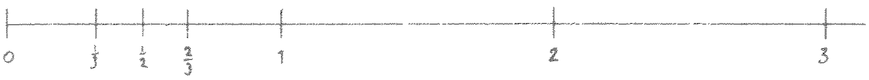


En van Els

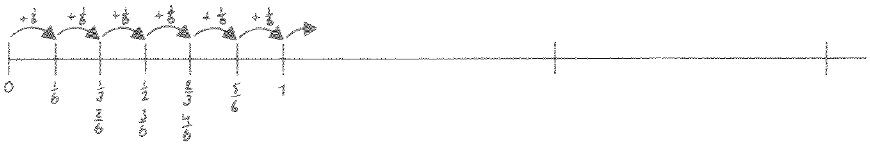
▶ Maak af.

En van Dirk-Jan:

▶ Maak af.
Wat denk je, is Dirk-Jan kleiner of groter dan Els?
Zet de stappen van alle drie op een getallenlijn, dat wil zeggen, de plekjes waar hun voeten steeds terecht komen, kijk zó:



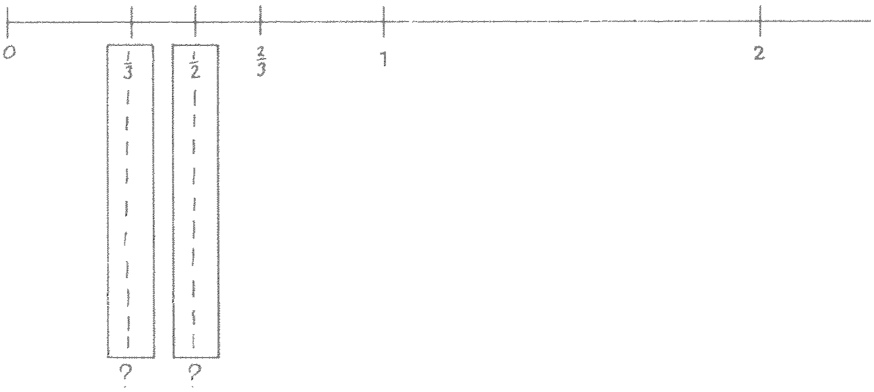
▶ Maak maar af.
Petra is nog kleiner dan Dirk-Jan. Ik verklap: als zij op de getallenlijn loopt, komt zij op alle voetstappen die er al staan. Hoe groot is Petra's stap?



▶ Kan Petra nog kleinere stapjes gemaakt hebben?

Op dit resultaat volgt:

a. bezinning
Hadden we dit niet kunnen voorspellen, nadat we de getallenlijn met stappunten van vader, Els en Dirk-Jan beschikbaar hadden?



▶ Bij elk punt dat we al hebben, passen nog veel meer breuknamen. [20]

Het zoeken naar 'gemene' maten, dus het proces van maatverfijnen, brengt als het ware opnieuw tabellen (van gelijkwaardige breuken) voort, die als etiketten bij de verschillende punten op de getallenlijn hun plaats krijgen.

9. BESLUIT

In de ontwikkeling van reken-wiskundemethoden valt ten aanzien van breuken en verhoudingen de laatste jaren een duidelijke beweging te bespeuren. Bedoelde beweging kenmerkt zich door toenemende didactische verfijning in de uitwerking van genoemde onderwerpen voor leerkrachten en kinderen. Ons inziens - en in zekere mate is dit ook reeds het geval - zal de verfijnde uitlijning in het programma zich vooral moeten kenmerken door *niet-uitwerking*. Daarmee bedoelen we, dat de *constructie* door kinderen (samen met hun leerkrachten) *zelf* van de

breuken, een breukentaal, van regels voor bewerkingen, centraal zal moeten staan. Zo levensecht mogelijke probleemsituaties zullen daarbij het uitgangspunt moeten vormen. Eerst dan kunnen we kinderen echt brengen tot een operationeel, dat wil zeggen toepasbaar breukbegrip, dat niet meer berust op het onbegrepen naäpen van rigide regels, - zeg trucs -, doch op volledig inzicht.
Wat het methodenbestand in Nederland betreft komen we voor de recente nieuwe methoden tot de slotsom: We zijn op de goede weg. 't Begin is er!

NOTEN

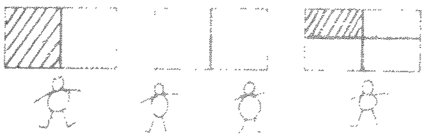
1. NCR staat voor 'Niveau Cursus Rekenen', NZR voor 'Naar Zelfstandig Rekenen' (gewijzigde versie), NAT voor 'Naar Aanleg en Tempo' (gewijzigde versie) en AR voor 'Actief Rekenen'.

2. NR staat voor 'Nieuw Rekenen voor het Basisonderwijs'.

3. NR, deeltje 4b, pag.55.

4. Taltaal, deeltje 7, pag. 11.

5. Het voluitschrijven van breuknamen als "de helft", "een half", "een kwart", "de helft van de helft", "een halve kwart", etc. sluit wel aan bij de voorkeur van kinderen. Daarbij zou men moeten aansluiten om het definitieve notatiesysteem te ontwikkelen. Dit betekent voor 't begin van de deelleergang een geschreven en gesymboliseerde notatie toepassen, bijvoorbeeld:



'3 pannekoeken - 4 kinderen'
Ieder krijgt: 'een half en een kwart'
'½ + ¼'

zie Streefland, L., *'Aanzet tot een nieuwe breukendidactiek volgens Wiskobas'*, Onderzoek Wiskunde Onderwijs, Publicatie nr. 3, Utrecht 1983.

6. zie Streefland, L., 'Davydov, Piaget en de breuken', *Pedagogische Studiën*, 56, 1979, 289-307.

7. WIG staat voor "De Wereld in Getallen".

8. WIG, deeltje 7A, p.26

9. WIG, deeltje 7A, p.36

10. WIG, deeltje 7A, p.[illegible]

11. OR staat [illegible]

12. Zie [illegible]

13. TT staat voor 'Taltaal'.

14. Taltaal, deeltje 9, p.24

15. OR, handleiding 5, p.156

16. OR, handleiding 5, p.

17. GIB staat voor 'Getal in Beeld'

18. GIB, handleiding

19. zie Streefland (1983), de hoofdstukken V en VIII.

20. Voorbeeld uit Streefland (1983), p.184,185.