EEN VEELZIJDIGE BENADERING VAN BEGRIPPEN

K.P.E. Gravemeijer, project OSM

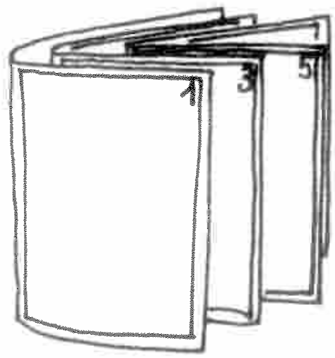
Bij het schrijven van een reken- en wiskundemethode kun je verschillende principes hanteren. Eén daarvan is het idee van een veelzijdige benadering van begrippen. Dit principe geeft antwoord op vragen als:"Waar begin je mee?", of "Wat is de basis waar je op wilt voortbouwen?" Als zodanig biedt deze benadering een alternatief voor algemeen verbreide noties als: - je moet met concreet materiaal beginnen, of

- je moet aansluiten bij het bekende.

Vaak wordt de indruk gewekt dat ook tal van (leer-)theorieën op deze principes gebaseerd zijn. Ik zal daar straks nog op terug komen, mede om te voorkomen dat ook de idee van een veelzijdige benadering op deze wijze geïnterpreteerd wordt.
Het belang van een veelzijdige benadering wil ik beargumenteren en verduidelijken met voorbeelden en probleempjes.

Het eerste probleem luidt:

Je wilt een boekje maken van 27 pagina's.
Het formaat van de bladzijden is een half A4.
Het papier waar je op drukt is een A4-formaat.
Er komen dus steeds twee bladzijden naast elkaar.
Je wilt het papier ook nog tweezijdig bedrukken.
Welke bladzijden moeten er dan naast elkaar komen?



Zulke problemen zijn vaak lastig. Je weet niet precies hoe je zoiets aan moet pakken. Om dat uit te vinden maak je een tekeningetje of een schema en al doende wordt het probleem opgelost. Je kunt zo'n probleem zo oplossen, omdat je weet waar het over gaat; je hebt iets om op terug te vallen en je kunt het probleem op een vrij concreet niveau oplossen.
Hoe belangrijk dat is wil ik met de volgende historie aantonen. Laatst had een collega van mij een heftige discussie met zijn zwager. Inzet van de discussie was 'het nut van het rekenonderwijs'. De zwager van mijn collega stelde dat het voldoende was te weten waar je nieuwe batterijtjes voor je rekenmachientje kunt kopen.
Een tamelijk harde uitspraak tegenover iemand die van rekenonderwijs zijn vak gemaakt heeft. U begrijpt dat de discussie soms hoog opliep. Op een gegeven moment

kwam het sommetje $\frac{1}{4} : \frac{1}{2} = \ldots$ aan de orde. Beiden twisten over de uitkomst. Het rekenmachientje werd erbijgehaald. De zwager van mijn collega liet zich echter niet overtuigen. Een kwart gedeeld door een half, kon nooit als uitkomst een half opleveren. Zijn conclusie was dan ook: "Dan is het rekenmachientje zeker kapot."
Deze anecdote leert ons iets over de beperkingen die kleven aan het gebruik van rekenmachientjes. Maar wat belangrijker is: Het toont ons ook het gevaar van het leren van formele begrippen, los van de realiteit. De 'zwager' in het verhaal was niet in staat de berekening te controleren; hij had niets om op terug te vallen!
Een probleem dat we kunnen terug voeren op een discrepantie tussen de schoolse leerstof en de realiteit. Een tegenstelling die je gemakkelijk kunt uitwerken aan een vraagstukje als: Een fietser rijdt met een snelheid van 15 km per uur van A naar B .. enz.
Het idee van een veelzijdige benadering van begrippen laat zich echter béter toelichten aan 'het getalbegrip'. Freudenthal heeft eens (Freudenthal;1973) een analyse gemaakt van de wijze waarop het getalbegrip in de werkelijkheid voorkomt. Zijn conclusie is dat je eigenlijk moet spreken van 'getalbegrippen' , of minstens van 'aspecten van getalbegrip'. Hij onderscheidt: naamgetal, telgetal, aantalgetal, meetgetal en rekengetal. Als naamgetal fungeert het getal zuiver als label; zoals in: lijn 12. Bij het telgetal gaat het om het kennen van de telrij op zich; om het kennen van de volgorde van de getallen. Voorbeeld: het gebruik van de telrij bij het verstoppertje spelen. Het aantalgetal verwijst naar hoeveelheden, naar kardinaliteit en het vergelijken op basis van een 1-1 relatie. Het meet- of verhoudingsgetal is het getalsaspect, dat we in het dagelijkse leven het meest gebruiken. Het meetgetal onderscheidt zich van het aantalgetal omdat we dan denken in termen van verhoudingen en niet in termen van losse eenheden. Voorbeeld: "Vijf kilo bintjes". Het rekengetal tenslotte staat los van elke context. Hier gaat het om getallen die gebonden zijn aan formele regeltjes: 2+9 = 9+2, mag wel, maar 9-2 = 2-9 mag niet.
Freudenthal zet deze indeling af tegen de eenzijdige benadering van sommige methodeschrijvers, die - zich beroepend op Piaget - alleen het aantaltalaspect benadrukken.

Bij dit voorbeeld wil ik op twee punten wijzen. Ten eerste toont dit voorbeeld de veelzijdigheid van een wiskundig begrip in de werkelijkheid. Ik kom daar straks nog op terug. Ten tweede biedt dit voorbeeld een aanleiding om in te gaan op de wijze waarop leerpsychologische en onderwijskundige theorieën binnen het onderwijs geïnterpreteerd worden; een onderwerp dat ik al eerder noemde.

Bij het getalbegrip is er sprake van de interpretatie van een niet voor het onderwijs bedoelde theorie. Met de wel voor het onderwijs bedoelde theorieën is het soms ernstiger gesteld. Dergelijke theorieën leggen vaak een lange weg af voor ze 'het veld' bereiken. Daarbij worden tal van modificaties, versimpelingen meestal, aangebracht. De theorie wordt aangepast aan wat men al weet. En een belangrijke invloed gaat dan uit van de algemene noties die ik in het begin noemde: "Je moet met concreet materiaal beginnen" en "Je moet aansluiten bij het bekende".
Om te verduielijken hoe dat in zijn werk gaat wil ik gebruik maken van opvattingen uit de cognitieve psychologie, beter bekend als informatieverwerkingstheorieën.
De cognitieve psychologie onderscheidt zich van het behaviorisme, door de aanname dat alle gedrag te koppelen is aan een of andere vorm van interne representatie.
Het informatieverwerkingsidee kan toegelicht worden met een voorbeeld:
Je constateert bijvoorbeeld niet: "Ik zie een vlek in de lucht", maar je zegt: "Ik zie een vogel". De binnenkomende informatie wordt geïnterpreteerd vanuit de reeds aanwezige kennis. Voor die reeds aanwezige kennis wordt de term cognitieve structuur gebruikt. Dergelijk cognitieve structuren kunnen verschillende functies vervullen (zie Lodewijks; 1981):

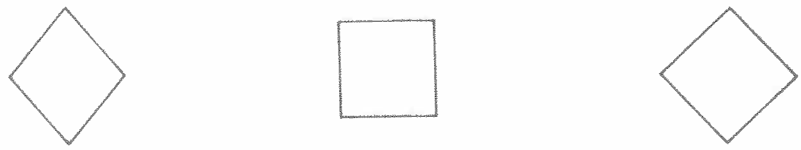
- de cognitieve structuur werkt als stramien waarbinnen nieuwe informatie ingepast wordt;
- de cognitieve structuur stuurt de aandacht: er is sprake van selectieve aandacht;
- de cognitieve structuur fungeert als bron voor het opvullen van leemtes in de ontvangen informatie.

Dit soort processen leidt ertoe dat we - onbewust - nieuwe informatie aanpassen aan wat we al wisten. Op deze wijze worden ook tal van theorieën aangepast aan de eerder genoemde algemene noties, wat leidt tot typeringen als:

Piaget	: concreet/operationeel ..... formeel;
Gal'perin	: concreet - verbaal - abstract;
Bruner	: concreet - afbeeldingen - symbolen;
Ausubel	: aansluiten bij het bekende.

Interpretaties die in het algemeen niet stroken met de feitelijke theorieën.
Gal'perin spreekt bijvoorbeeld niet van concreet, maar van 'materieel' èn naast materiële handelingen laat hij ook gematerialiseerde handelingen toe in de eerste fase. Feit is wel dat er alle mogelijke interpretaties aan de theorie van Gal'perin gegeven worden. Nelissen heeft daarvan eens een aardige opsomming gegeven (Nelissen; 1980).

Het idee van de cognitieve structuur is echter nog om een andere reden interessant en wel in verband met een veelzijdige benadering van begrippen. Het concept cognitieve structuur kunnen we namelijk associëren met het begrip referentiekader. We zien dan dat we vaak dezelfde woorden (labels) gebruiken maar dat we niet allemaal beschikken over dezelfde cognitieve structuur en dat geeft soms verwarring.
Als Treffers spreekt van een realistische stroming in het reken- en wiskunde onderwijs dan moet er geen verband gelegd worden met de invulling die Lubbers aan de term realistisch (no-nonsense) geeft. Een ander voorbeeld biedt de term context.
Van Hiele (Van Hiele; 1973) wijst erop dat het verschil in referentiekader een probleem kan zijn bij de communicatie tussen leerling en leerkracht. De leerlingen hechten aan bepaalde woorden heel andere betekenissen dan de leerkracht. Van Hiele demonstreert dit aan de hand van het meetkundige begrip 'ruit'. Voor de leerlingen is het vaak alleen een visueel herkenbare vorm (fig. 1), voor de leerkracht is het een bundeling van eigenschappen. Een gevolg kan zijn dat de leerling een vierkant niet als ruit herkent, tenzij deze op zijn punt geplaatst wordt (zie ook fig. 1).



Figuur 1. "ruit" "vierkant" "vierkant als ruit"

Dit probleem, het verschil in referentiekader, kan worden opgevangen door bij de leerling het beoogde referentiekader op te bouwen. In het volgende zal blijken, dat nu juist een veelzijdige benadering een goed basis biedt voor het opbouwen van zo'n referentiekader.

Zoals gezegd worden veel theorieën onbewust gemodificeerd door degene die er kennis van neemt. Soms ook worden theorieën bewust ruimer, of anders, geïnterpreteerd dan de oorspronkelijke auteur voor ogen stond. Ik wil nu vervolgen met een dergelijke modificatie van de theorie van Bruner, om daarmee het idee van een veelzijdige benadering theoretisch wat te onderbouwen.
In zijn latere publicaties geeft Bruner zelf al een vrij ruime interpretatie aan zijn categorieën: enactief, iconisch en symbolisch. Enactief wordt dan omschreven als ervarings leren, iconisch als observatie leren en symbolisch als het leren werken met symbolen. Mason (zie Samson; 1982; 27) heeft hier een nog ruimere uitleg

aan gegeven. Kernpunt is volgens hem "de mate van vertrouwdheid". Enactief is daarom niet gebonden aan tastbare objecten, maar het gaat om praktische ervaring. Als voorbeeld gebruikt hij het volgende probleempje: Wat weet je van de som van twee oneven getallen? Een vraag die je op kunt lossen door het met enkele getallen uit te proberen: 1 +3 = 4; 3 + 5 = 8 ... Al gauw blijkt de regel: De som van twee oneven getallen is even. Een wiskundige zal het misschien oplossen door een willekeurig oneven getal te schrijven als 2n+1. Daaraan kan hij direct zien dat de som van twee oneven getallen altijd even is. Voor hem is 2n+1 net zo concreet, als 3 of 5 dat is voor een basisschoolleerling: De mate van vertrouwdheid wordt bepaald door praktische ervaring.

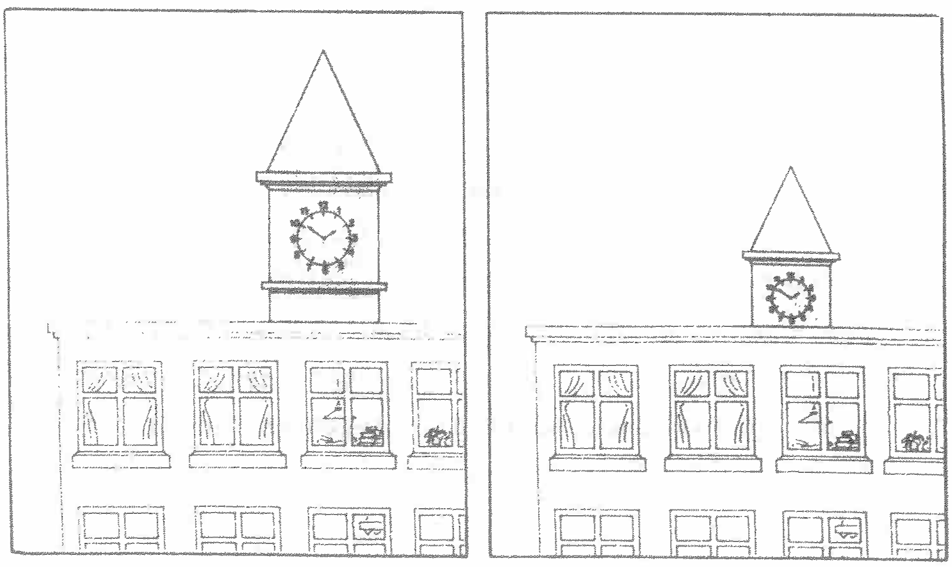
Ervaringskennis is ook een onderwerp van theorievorming bij DiSessa (zie Samson; 1982; 21). Hij onderscheidt:

- knowledge of procedure (instrumentele kennis over hoe je iets moet doen) en
- knowledge within process.

Met knowledge within process wordt verwezen naar kennis die geworteld is in concrete ervaringen; kennis die vaak moeilijk te verbaliseren is. Dit soort kennis wordt gedemonstreerd met een voorbeeld: De bewegingen die iemand maakt die denkt een zware vuilnisbak op te tillen terwijl deze nu juist leeg is. De bewegingen die iemand dan maakt zijn terug te voeren op "intuïtieve" kennis over krachten en massa's.

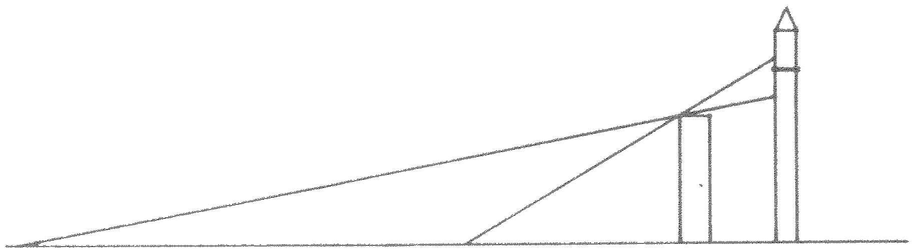
Het onderwijs zou van ervaringskennis gebruik kunnen maken; belangrijk is daarbij het reflecteren op ervaringen.

De betekenis van ervaringskennis kan misschien het best verduidelijkt worden met een vraagstukje.



Welke van deze twee foto's werd het dichstbij genomen?
Kun je verduidelijken hoe je aan je antwoord komt?

Voor het vinden van de oplossing kun je gebruik maken van verschillende ervaringen. Aanleiding voor deze opgave was een ervaring die ik opdeed bij het binnen rijden van de Amsterdam via de Raadhuisstraat. Je ziet de Westertoren dan achter de huizen wegzakken, terwijl je juist steeds dichterbij komt.
Sommigen 'herkennen' de linker foto direct als een foto met een telelens gemaakt. De andere foto is dan zonder telelens gemaakt, vanuit een ander standpunt (dichterbij).
Mijn dochter (11 jaar) gebruikte de volgende redenering: "Als je dichterbij komt, kun je beter zien dat de kerk ver achter het huis staat.
Allemaal voorbeelden van ervaringskennis. Ervaringskennis die via bewustmaking en doordenking kan leiden tot het redeneren in termen van verhoudingen en tot een spontaan gebruik van viseerlijnen (zie fig. 2).



figuur 2. Een formele oplossing van het probleem van de twee foto's.

Uit de figuur kun je aflezen dat de relatieve afstand tussen de twee gebouwen in het ene geval kleiner is dan in het andere. Dit beïnvloed ook de onderlinge grootteverhouding op de foto. Ook kun je zien dat de hoek verandert en dat bij een dichtbij-opname een kleiner deel van de kerktoren zichtbaar is.
Uitgaande van zulke opgaven zou je dus meetkundige leerstof op kunnen bouwen, overeenkomstig de ideeën van DiSessa. Houd je ook rekening met de veelzijdigheid van de meeste wiskundige begrippen in de realiteit, dan leidt deze aanpak tot een veelzijdige benadering van begrippen.
Een voorbeeld daarvan bieden de bekende autobusproblemen van Jan van den Brink.
Hier worden de opreraties optellen en aftrekken bij de introductie direct gekoppeld aan een veelheid van situaties:
- het instappen en uitstappen van buspassagiers;
- het omgooien en weer rechtop zetten van kegels;
- het aansteken of uitblazen van kaarsen, enz.

Niet alleen worden er tal van situaties gebruikt, maar de formele taal wordt ook feitelijk uit het beschrijven van deze situaties ontwikkeld. Verbreding vindt daarna plaats door ook aandacht te besteden aan meer statische situaties (dubbeldekkers), aan het vergelijken (gegeven...gevraagd) en aan de getallenlijn. Het optellen en aftrekken met het 'rekengetal' wordt zo via formaliseren en generaliseren ontwikkeld vanuit beschrijvingen van situaties uit de werkelijkheid.
Hier zien we ook het opbouwen van een referentiekader (of een cognitieve structuur) dat ik eerder noemde. Resultaat is niet alleen dat de leerlingen in voorkomende gevallen weten of ze moeten optellen of aftrekken, maar ook dat ze beide bewerkingen met elkaar in verband kunnen brengen. In de bussencontext is bijvoorbeeld gemakkelijk in te zien dat optellen de inverse bewerking is van aftrekken. Stipsommen kunnen ook vrij gemakkelijk opgelost worden, als de leerling zich er een autobusverhaal bij voor stelt.

Tot nu toe heb ik alleen de wenselijkheid en de mogelijkheid van een veelzijdige benadering aangetoond. Nu wil ik het wat meer uitwerken als een richtlijn bij het schrijven van een reken- en wiskundemethode.
Aan het doordenken van een leergang kunnen we verschillende aspecten onderscheiden:
- een logische analyse : het denken in termen van voorwaarden;
- een psychologische analyse : kijken naar leerprocessen;
- een fenomenologische analyse : onderzoeken welke rollen het te leren begrip in de werkelijkheid speelt.

Ik besef dat bovenstaande indeling discutabel is en ook geen elkaar uitsluitende categorieën oplevert. De labels zijn slechts bedoeld als handvatten, om aan te geven dat zowel het één als het ander gebeuren moet. Met name het laatste aspect is dan essentiëel voor een veelzijdige benadering, hoewel de geëntameerde leerprocessen daar dan natuurlijk wel op moeten aansluiten. En voor het succesvol doorlopen van de leergang moeten dan weer bepaalde voorwaarden vervuld zijn.
Voorbeelden van leergangen gebaseerd op een veelzijdige benadering vinden we in de verschillende wiskobaspublicaties. Ik volsta hier met het noemen van enkele onderwerpen: meten (oppervlakte), vermenigvuldigen, cijferen, breuken en verhoudingen.

De veelzijdige benadering komt tenslotte in de methode naar voren in het gebruik van contexten. Het gaat hier echter wel om een specifiek gebruik, gericht op het betekenis geven aan (opereren met) begrippen.

Literatuur:

Freudenthal, H. , *Mathematics as an Eductional Task.*
Dordrecht, Reidel, 1973.

Hiele, P.M. van , *Begrip en Inzicht.*
Purmerend, Muuses, 1973

Nelissen, J.M.C. , De theorie van P.Ja. Gal'perin in discussie.
Pedagogische Studiën. 1980, 7 , 305-321

Samson, G.M.H. , Mediakenmerken mediafuncties mediumkeuze.
Utrecht: *Stichting Film en Wetenschap*, 1982.