MEETKUNDE, VROEGER EN NU

A. Goddijn, G. Schoemaker
OW & OC

Laten we nu eens op straat een willekeurige voorbijganger ondervragen over meetkunde: Waar ging dat op school over? Als onze persoon zo'n vijftien jaar of meer uit de schoolbanken is, dan is de kans groot dat er iets bovenkomt over driehoeken, $a^2 + b^2 = c^2$, en misschien pyramides en parallellepipida. Van axioma's, bewijzen en deductie vinden we waarschijnlijk weinig terug.
Toch werd aan dat deductieve karakter in de glorietijd van de Euclidische meetkunde (circa 300 voor Christus tot 1968 na Christus) in het onderwijs veel waarde gehecht.
Er werd begonnen met enkele, heel simpele uitgangsbeweringen, zoals 'door twee punten gaat juist één rechte lijn'. Het redeneren met zulke eenvoudige elementen was heel lastig. Voor je het wist, had je al verondersteld wat er te bewijzen was en raakte je in een vicieuze cirkel verstrikt. Je mocht meetkunde en werkelijkheid niet verwarren. Binnen de wereld van deze meetkunde leefden alleen punten zonder afmeting, lijnen zonder dikte en rimpelloze vlakken. Elke tekening droeg de kiem van verwarring in zich, en was dus eigenlijk taboe.
De buitenaardse zuiverheid van de objecten weerspiegelde zich in de absolute waarheid van de theorema's die hun eigenschappen onwrikbaar vastlegden.

De meetkunde van het platte vlak ging vooraf aan de ruimtemeetkunde; deze werd tot een laat tijdstip in de school uitgesteld en bleef derhalve gereserveerd voor de B- of β-leerlingen.
Ook het stereometriespel werd volgens het deductieve ritueel voltrokken, al was 'ruimtelijk inzicht' toch wel een voorwaarde om enige houvast tussen kruisende en snijdende lijnen te kunnen vinden.
Eventueel klom een leraar met een goede klas naar de top: de kristallen schittering van de vijf regelmatige veelvlakken. Dat was dan voor de β-leerlingen hùn kennismaking met Plato.

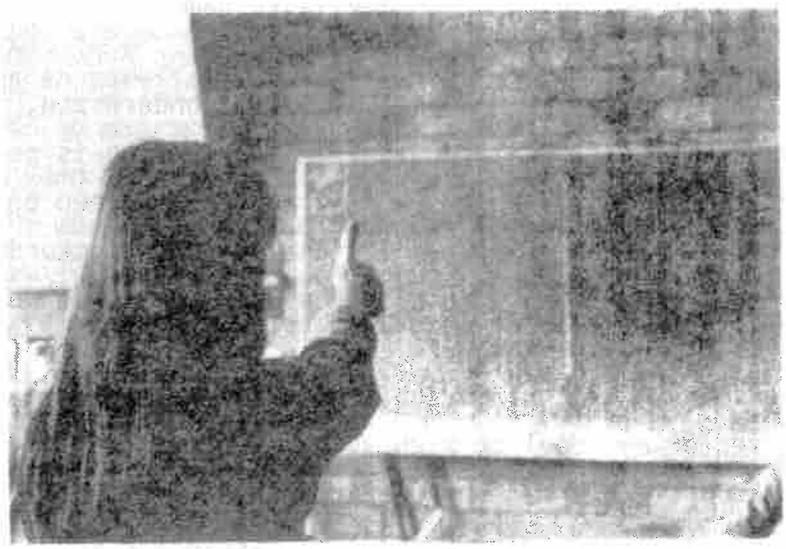
In de negentiende eeuw werd Euclides' troon bedreigd door Felix Klein. Hij toonde dat men de meetkunde kon benaderen vanuit het

begrip transformatie-groep. Symmetrieën, spiegelingen, verplaatsingen, vergrotingen en combinaties daarvan spelen daarbij een belangrijke rol. Felix Kleins visie past uitstekend in de structuralistische opbouw van de wiskunde vanuit het verzamelingsbegrip en overspoelde dan ook tegelijk met de verzamelingenleer ons onderwijs.
Wie het boek van Yaglom[1] kent, weet tot welke schitterende wiskunde de transformatiemeetkunde kan leiden. Helaas lijken we in ons onderwijs echter niet veel verder te komen dan een paar plaatjes van draaisymmetrische figuren en het oefenen van moeilijke namen als translatie en rotatie.
De vectormeetkunde, zoals die nu op school wordt onderwezen, ligt in het vervolg van de transformatiemeetkunde. De bedoeling is getallen en variabelen te hulp te roepen om een meer algemene greep op de meetkunde te krijgen. Vroeger heette dat analytische meetkunde en de B- en β-leerlingen konden er soms dingen mee doen, die voor de gewone vlakke meetkunde onhaalbaar leken.
Nû lijkt het of de esoterische verschillen tussen geordend getallenpaar, punt en vector een doel op zich vormen, en wie een Mavo-examenvraagstuk, dat in termen van vectormeetkunde is gesteld, terugvertaalt naar de 'meetkundige' inhoud, komt steevast op een flauwiteit uit. De examen-kandidaat heeft echter voor minstens drie kwartier rekenwerk, temeer daar diens benadering wel niet gestuurd zal worden door visueel inzicht.

We komen aan een andere vorm van meetkunde toe. Weer een vernieuwing? Eigenlijk niet.
De meetkunde die in de vorm van kleine leerpakketjes voor LBO/Mavo en VWO-top is ontwikkeld door Wiskivon en het Hewet-team grijpt in zeker zin lager en hoger dan het voorgaande.
Er wordt daarin juist uitgegaan van wat er in de gewone wereld te zien is. Dat zijn in eerste instantie ruimtelijke vormen en niet alleen vlakke objecten. Het is niet zo'n gewaagde veronderstelling dat men het ruimtelijk inzicht van de leerlingen in een vroeg stadium in het wiskundeonderwijs moet gebruiken, omdat zulks anders misschien nooit meer lukt. Door eenzijdig werken met binnen een vlak georganiseerde informatie (plaatjes, lezen) kan een belangrijk vermogen wel eens nodeloos onontwikkeld blijven.

De twee laatste Wiskivon-pakketten 'Zie je wel' en 'Schaduw en diepte' stellen trouwens de relatie tussen ruimte, hoe je die ruimte ziet en hoe je de ruimte tekent, heel expliciet aan de orde.
Hier is als voorbeeld een opgave uit 'Zie je wel', dat voor de brugklas bedoeld is.

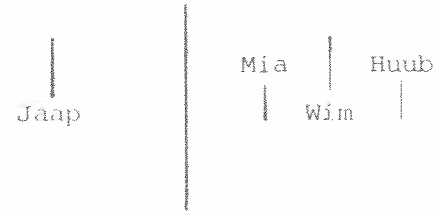
Opdracht 2 (voor drie of vier leerlingen)



Kijk met één oog naar je duim en zorg dat je je duim ziet tegen de streep op het bord. Houd je hand stil. Kijk nu met je andere oog. Wat valt je op? Kun je dit verklaren? Zet streepjes op het bord op de plaats waar ieder met het andere oog de duim ziet. Elke leerling van het groepje kijkt vanaf dezelfde plaats. (Niet te dicht bij het bord.) Hoe komt het dat er verschillende streepjes komen? Probeer dat met een tekening uit te leggen.

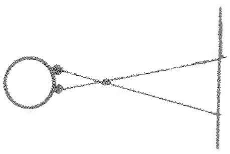
Dit zegt de docentenhandleiding 'Ziet U wel' erover:

Opdracht 2: het 'springen' van de duim t.o.v. de streep op het bord is de meesten bekend maar slechts weinigen hebben erover nagedacht. Het is de moeite waard groepjes leerlingen dit helemaal zelf uit te laten zoeken en vooral ook te laten organiseren. Zelf op het idee komen streepjes met namen te zetten naast de ene grote streep. Vaak gebeurt ook zoiets:



Daar komen ze ook wel uit.

De verklaring is niet gemakkelijk te formuleren, noch voor kinderen, noch voor volwassenen zoals ons is gebleken. Na verloop van enige tijd ontstonden er - na wat hulp van de docent - verklarend schetsjes als:



Een hulpmiddel kan zijn het spannen van een touwtje. Een bovenaanzicht voordat het woord gevallen is. Als dit gebeurt kan de docent deze gebeurtenis oprakelen bij de E-serie als de aanzichten besproken worden: 'Je gebruikte het al voordat je het woord kende en je gebruikte het omdat het iets verduidelijkt.'

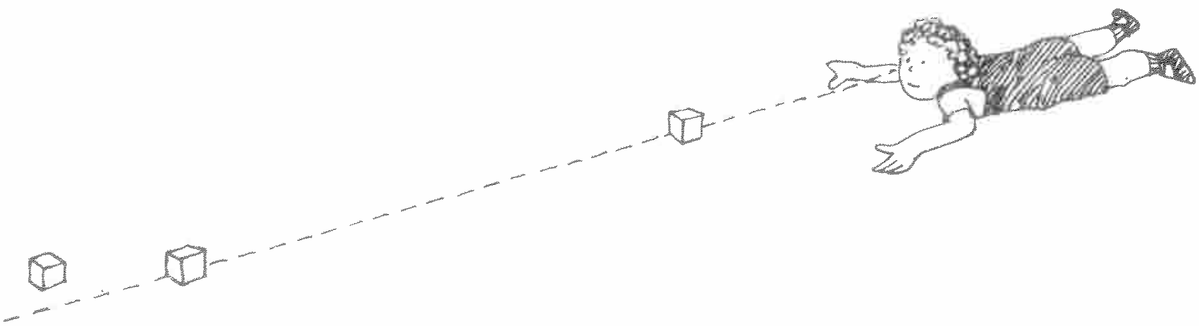
Belangrijke elementen zijn:
- experimenteren;
- over een verklaring praten, met elkaar.

Je zou kunnen zeggen dat het begrip rechte lijn dat hier een grote rol speelt, niet eerst gedefinieerd wordt, maar in de toepassingssituatie door de leerlingen zelf wordt geïntroduceerd.
Het zogenaamde 'viseren' komt in meer situaties voor:

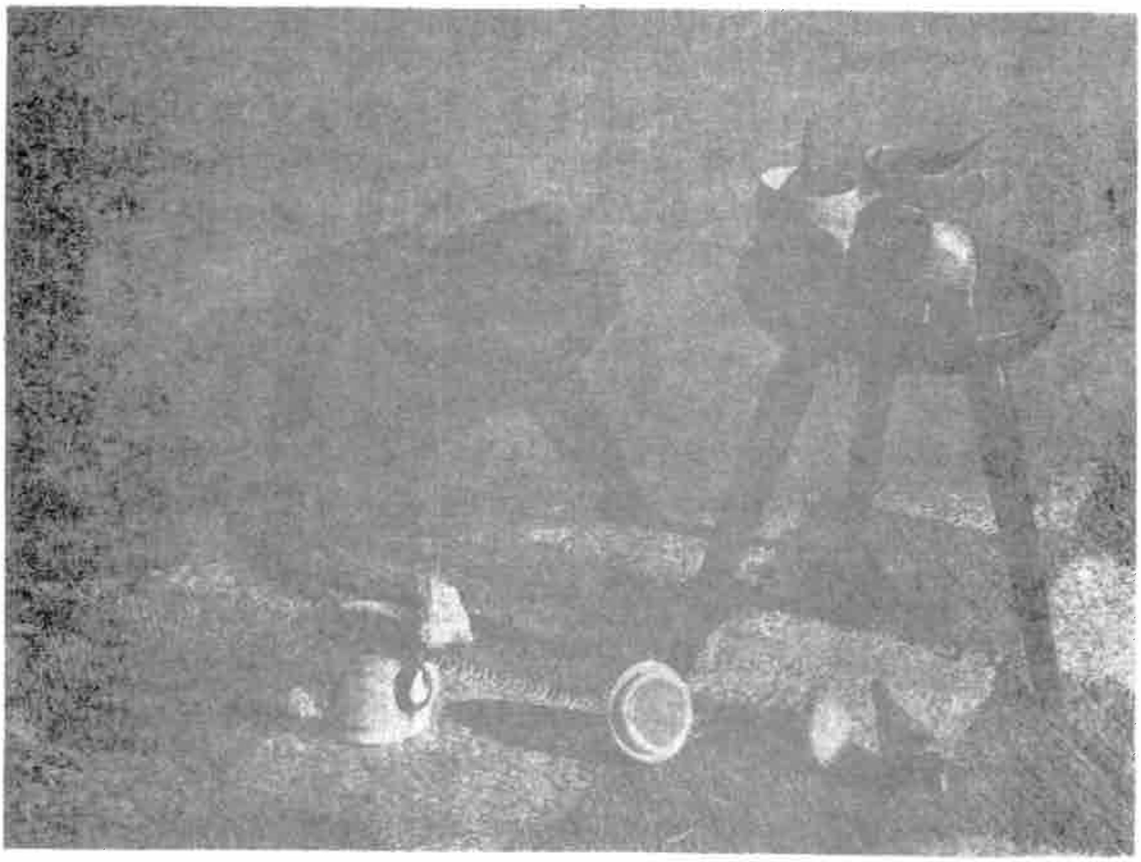
Een zonsverduistering speelt in een van de avonturen van Kuifje een heel belangrijke rol. Wat heeft zonsverduistering met de vorige vraag te maken?

Heeft zonsverduistering ook iets te maken met blz.A 11?

In de vorige opgave moesten twee lichten in een lijn gezien worden, de lijn was dan de route waarover je juist de havenmond in kan varen.
Bladzijde A 11, dat slaat op dit plaatje:



In 'Schaduw en diepte' wordt deze lijn voortgezet.
Deze eerste opgave lijkt onschuldig, maar zelfs in bijeenkomsten van wiskundeleraren kon men het niet altijd eens worden over de verschillende schaduwen.



1. *Zonder licht zie je niets. Van welke kant valt het licht op deze foto? Waar zie je dat eigenlijk aan?*
2. *Controleer alle schaduwen op de foto eens. Misschien moet er wel iets bijgetekend worden of weggehaald.*

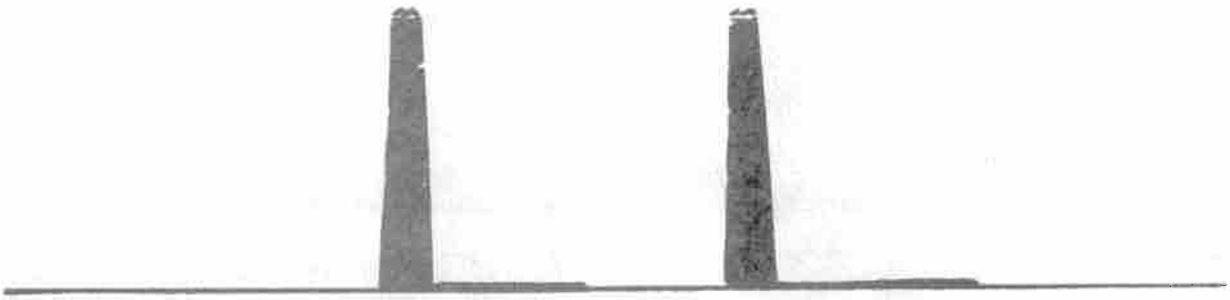
Het lepeltje en zijn 'versprongen' schaduw doen leerling en leerkracht verbaasd staan. Toch is de verklaring voor geen van beide te moeilijk, al is de leerkracht vaak nog in het nadeel: de leerling is - zeker in de klas waar ook 'Zie je wel' gebruikt is - meer geneigd zelf even te proberen met beker, lepel en lamp, en dan in te zien wat er aan de hand is.

Qua opzet zijn er grote verschillen met beide vorige stromingen:
a) er wordt niet uitgegaan van gestileerde objecten en mystieke entiteiten als punten en lijnen;

b) de aandacht wordt gericht op iets heel normaals, waar dan toch wiskundig denken bijna vanzelf uit te voorschijn komt;
c) kijken en proberen hebben aanvankelijk meer nadruk dan redeneren en rekenen.

Gaan we wat preciezer kijken naar schaduwen, dan komt vanzelf meer meetkunde in de ouderwetse zin te voorschijn. Er wordt met de liniaal geconstrueerd waar de lamp zich bevindt in deze opgave:

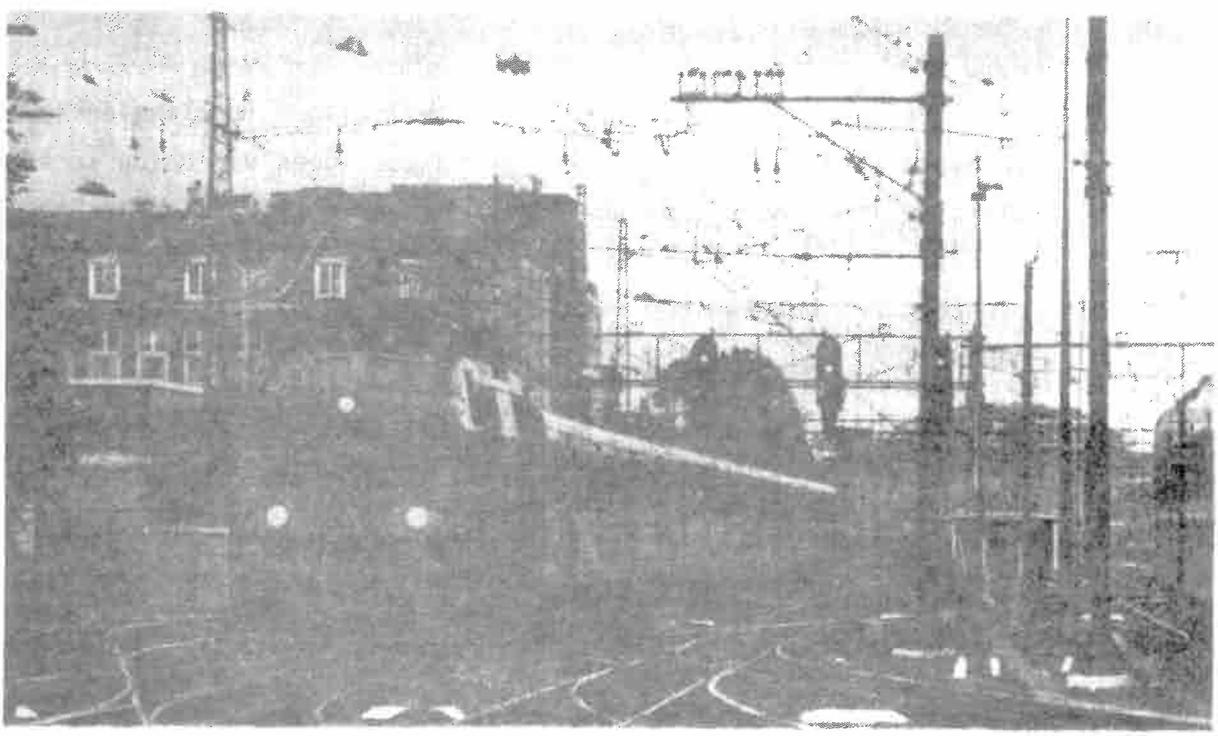
Hier zijn twee paaltjes met hun schaduwen getekend.
Vind precies de plaats van de lamp.



In zekere zin neemt het construeren de rol van het bewijzen over. De activiteit op zich - het doortrekken en snijden van de lijnen tussen de schaduwtoppen en paaltjestoppen - verschaft het inzicht.

Diepte zien staat centraal in het laatste deel van 'Schaduw en diepte'. Drie voorbeelden uit het leerlingemateriaal illustreren voldoende de bedoeling en de sfeer waarin deze meetkunde wordt bedreven.

1 De verkorte trein



92. *Als de locomotief 3 meter breed is, hoe lang is de trein dan volgens de foto? Klopt dat met de werkelijkheid?*

93. *Op de foto's staat alles precies zoals je het ziet. Is dat zo?*

2 Stappen met stokken

112. *Werk met z'n tweeën aan deze opgave.*
Leg een stok van een meter lang dwars voor je op de grond. Doe één oog dicht en kijk verder met het andere. Neem een liniaal in je hand en strek je arm. Hoeveel cm van de liniaal heb je nodig om de stok juist af te dekken? Schrijf dat op.
Nu moet iemand anders de stok een stap verder leggen. Zelf blijf je staan. Meet weer hoeveel cm je nodig hebt om de stok juist af te dekken. Weer met één oog kijken en de arm gestrekt houden. Ga zo door en maak een lijstje:

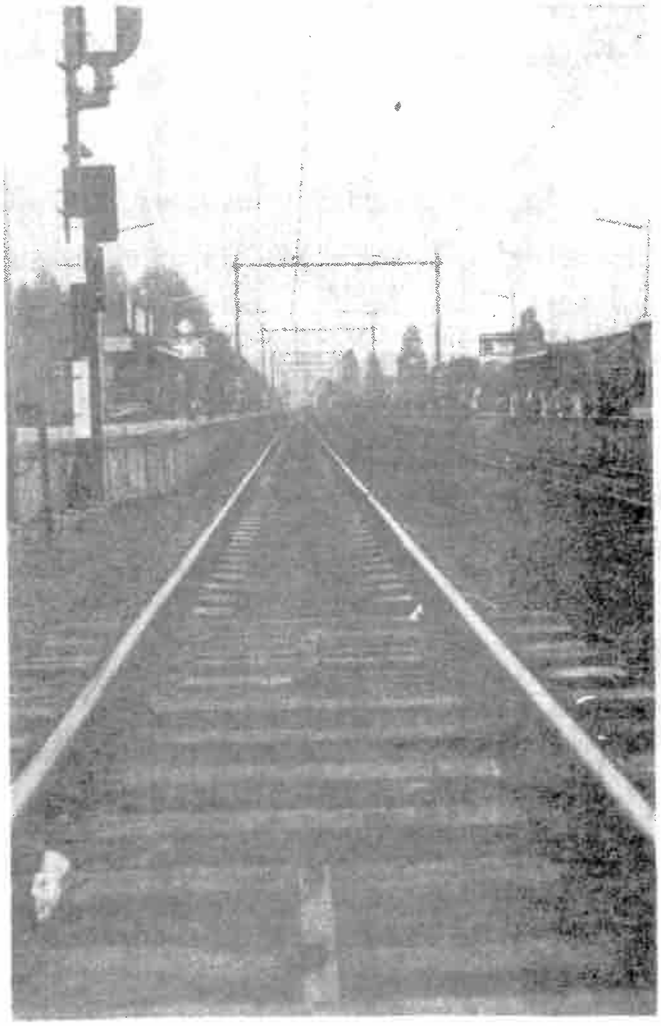
hoe ver de stok weg ligt	hoeveel cm er nodig zijn om de stok juist af te dekken.
1 stap	.... cm
2 stappen	.... cm
3 stappen	.... cm
4 stappen	.... cm
5 stappen	.... cm
enz.	enz.

113. *Als je zo bijvoorbeeld miljoen stappen door zou gaan, wat komen er dan voor getallen in de rechter rij? En wat gebeurt er met je gestrekte arm? (behalve dat die moe wordt natuurlijk!)*

3 Verdwijnen in de verte

125. *Spoorrails moeten evenwijdig lopen. Waarom?*
Maar op de foto lijkt dat nergens naar!
Zijn alle dwarsbalken in werkelijkheid *wel even lang?*

126. *In werkelijkheid zijn er nog meer lijnen met de spoorstaven evenwijdig. Trek die lijnen op de foto eens wat verder door in het mistige midden. Wat kun je nu heel duidelijk aan al die lijnen zien?*



Weer valt het experimenteren, het zelf uitvoeren op als belangrijkste kenmerk.

De stokken in voorbeeld 2 staan voor een lijnstuk, kan men zeggen. Maar voor de leerlingen ligt dat toch anders. Door de concrete realisatie worden de onderliggende meetkunde-vragen juist meer grijpbaar gemaakt dan in de taal die direkt over die 'lijnstukken' spreekt. Die abstractie kan altijd later nog komen en dat is wat in het Hewet-programma dan ook gebeurt. Een integratie van de meetkunde van het kijken met wat strengere stereometrie en coördinaten-meetkunde vinden we in 'Ruimtemeetkunde I' van het Hewetprogramma.

Aan de hand van drie opgaven is de overgang van concreet naar meer formeel goed te zien:

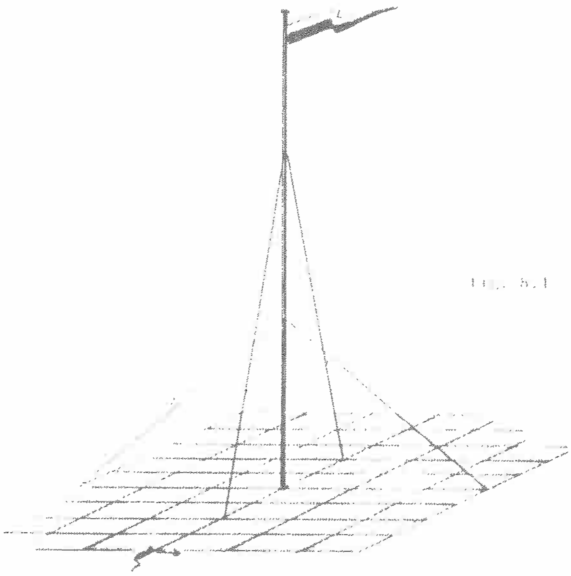
(1)

(2)

1a. *Twee foto's van hetzelfde huis. De boom die op foto (1) links staat is op foto (2) naar rechts verhuisd. Hoe kan dat nou?*

1b. *De werkelijke positie van de boom t.o.v. het huis kun je uit deze foto's blijkbaar moeilijk aflezen. Wat dat betreft zou een luchtfoto meer houvast bieden. Hoe zou je uit een luchtfoto het verschil tussen de foto's (1) en (2) kunnen verklaren?*

****



70. *Bekijk figuur 8.1.*

a. De touwen 1 en 2 lijken elkaar te snijden. Hoe weet je dat dit in werkelijkheid zeker niet het geval is?

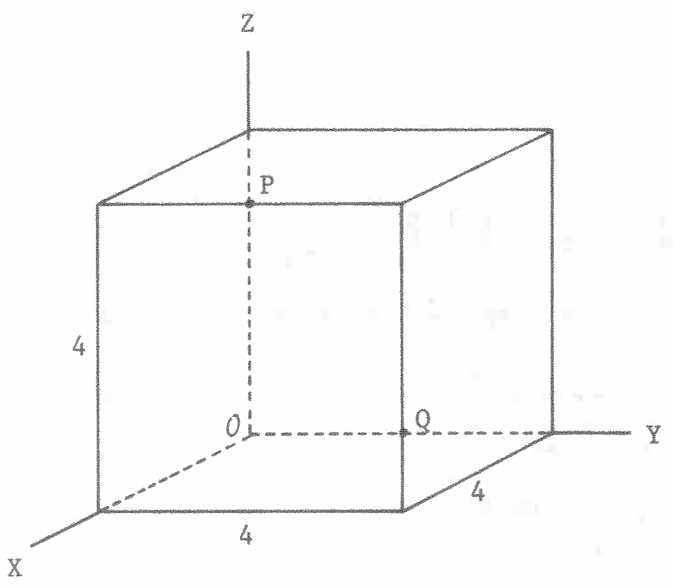
b. Als je een touw met dezelfde lengte als touw 1 zou willen spannen dat touw 2 wel snijdt, waar zou dat dan in de vloer bevestigd moeten zijn? (De tegels van het pleintje zijn vierkant.)

c. Een muis zit op de hoek van een tegel (zie figuur) en kijkt naar de vlaggemast. Waar ziet de muis de touwen 1 en 2 elkaar 'kruisen'?

d. Hoe verandert de plaats van het 'kruispunt' als die muis in de richting van de pijl (langs de rand van het pleintje) wandelt? Waar ziet de muis het 'kruispunt' op de grond?

****

138. Parallelprojectie van een kubus met assenstelsel:



a. Bob: 'Het punt P heeft de coördinaten (4,2,4).'
Wim: 'Volgens mij (0,0,3).'
Wie van de twee heeft gelijk?

b. Welke misverstanden zou er m.b.t. het punt Q kunnen bestaan?

c. Bob geeft in de figuur heel precies het punt (4,2,1) aan.
Waar vind je dat punt in de figuur?

d. En waar vind je het punt $(2,1,\frac{1}{2})$*? En waar het punt (-4,-2,-1)? En (-40,-20,-10)?*

e. In welke richting is de kubus op het papier geprojecteerd, d.w.z. wat is de richtingsvector van de projectiestralen?

'Ruimtemeetkunde', 'Zie je wel' en 'Schaduw en diepte' zijn overdacht opgezet en herhaaldelijk uitgeprobeerd. Toch is de lijn in de leerstof niet zo makkelijk te zien. Dat ligt voor een groot deel aan de eigen aard van dit meetkundeonderwijs, waarin niet stelling op stelling wordt gestapeld.

Er wordt namelijk niet zonder meer verondersteld dat de beste volgorde in didactisch opzicht de volgorde van de deductieve opbouw is. Veel onderdelen fucntioneren als doel op zich; het zijn activiteiten waardoor men aan ervaringen rijker wordt, zonder dat een mogelijke toetsing als doel gesteld wordt.
Vooral als de toetsbaarheid wordt gesteld boven de inhoud stuit deze meetkunde op onoverkomelijke bezwaren. Die tendens lijkt er in deze jaren te zijn, het Mavo-examen dreigt bijvoorbeeld alleen beperkt te worden tot zogenaamde objectieve toetsen. Het Cito beweert dat zo'n 80% van de leerstof objectief toetsbaar zou zijn, en in de 100% waar in de betreffende nota[5] wordt uitgegaan, komen 'Zie je wel' en 'Schaduw en diepte' niet eens voor.
Een somber vooruitzicht. Zeker, maar we moeten ook even opmerken dat groepen leraren en opleiders en andere betrokkenen, die zich verdiepen in de inhoud die het wiskundeonderwijs zou moeten hebben, voortdurend in de weer zijn ruimtemeetkunde te realiseren en te propageren.
Door het Hewet-programma komt er weer zicht op ruimtemeetkunde, ook in de onderbouw van vwo en havo.
Mogelijk komen deze klimaatsveranderingen niet te laat voor lbo en mavo, waar de ontwikkelingen in het schriftelijk examen onderwijs in ruimtemeetkunde dreigen te verpletteren.
Er is dus nog hoop.

Noten

[1]I.M. Yaglom, Geometric Transformations, Random House, USA 1962.
[2]G. Schoemaker, Zie je wel, OW & OC.
[3]A. Goddijn, Schaduw en Diepte, OW & OC.
[4]J. de Lange en M. Kindt, Ruimtemeetkunde I, OW & OC.
[5]Cito: Gesloten vragen in het CSE, LBO & MAVO, Arnhem 1983.