Breuk in de aansluiting tussen basis- en middelbare school

G. Bruin-Muurling & K.P.E. Gravemeijer
Technische Universiteit, Eindhoven

1 inleiding: de realistische onderwijstheorie als kader

In de theorie van het realistisch reken-wiskundeonderwijs wordt ervan uitgegaan dat de leerlingen met hulp van de leraar zelf wiskundige kennis kunnen ontwikkelen door te starten bij voor hen betekenisvolle situaties, om op basis daarvan via een proces van progressief mathematiseren meer formele wiskundige kennis te construeren. Om te zorgen voor een stevige inzichtelijke basis, wordt daarbij gekozen voor een brede fenomenologische inbedding. Er wordt gezocht naar contexten die handvatten bieden voor het bedenken van informele, situatie-specifieke oplossingsmethoden die als startpunt kunnen dienen voor het ontwikkelen van meer geavanceerde oplossingsmethoden. Verder wordt gezocht naar modellen die op een natuurlijke manier naar voren kunnen komen als modellen van (handelen in) dergelijke betekenisvolle contexten en die zich kunnen ontwikkelen tot modellen voor meer formeel wiskundig redeneren.

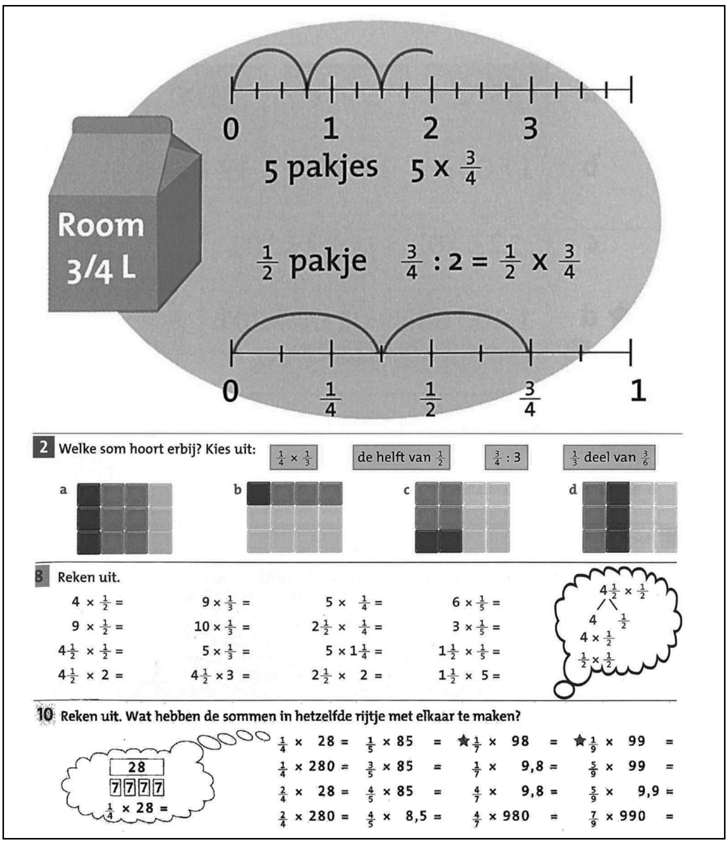
Dit laatste is uitgewerkt in de theorie van het ‘emergent modelleren’ (Gravemeijer, 2003). De gedachte achter het emergent modelleren is dat modellen, die eerst naar voren komen als ‘modellen van’ contextgebonden activiteiten en zich geleidelijk aan kunnen ontwikkelen tot ‘modellen voor’ meer formeel wiskundig redeneren, het construeren van meer formele wiskundige kennis kunnen ondersteunen. Hierbij zou het karakter van de modellen moeten veranderen van een model dat zijn betekenis (voor de leerling) ontleent aan de context van de opgave naar een model dat zijn betekenis ontleent aan de wiskundige relaties die in het spel zijn.
Daartoe moet de leraar ervoor zorgen dat de leerling zijn of haar aandacht gaat richten op deze wiskundige relaties. Op die manier kunnen getallen zich bijvoorbeeld ontwikkelen van benoemde getallen tot onbenoemde getallen (Treffers e.a., 1994), ofwel getallen als wiskundige objecten die het karakter hebben van knooppunten in een netwerk van getalrelaties (Van Hiele, 1973).
In het algemeen evolueert het model van een model van handelen in een

specifieke probleemcontext tot een model dat de structuur van dergelijke opgaven verduidelijkt en het redeneren over die structuur mogelijk maakt.

2 vermenigvuldigen van breuken in het primair onderwijs

getalspecifieke procedures

In het promotieonderzoek van Bruin-Muurling (2010) hebben we de rol van contexten en modellen in het Nederlandse onderwijs onderzocht. Daartoe hebben we een analyse gemaakt van de boeken van groep 8 van de vier grote reken-wiskundemethodes voor het basisonderwijs - ‘Alles Telt’, ‘De wereld in getallen’, ‘Pluspunt’ en ‘Rekenrijk’ - toegespitst op het vermenigvuldigen van breuken.



figuur 1: vermenigvuldigen in groep 8 - vier getalsspecifieke modellen
(uit: ‘Alles Telt ‘leerlingenboek groep 8)

We keken daarbij naar drie aspecten; naar de oplossingsstrategie waar leerlingen naartoe worden geleid, naar het soort opgave dat daarbij gebruikt wordt en naar de modellen die daarbij worden aangeboden. Typische voorbeelden daarvan zijn te zien in figuur 1.
Daarbij valt een aantal zaken op. In de eerste plaats zien we een stereotype koppeling tussen contexten en oplossingsmethoden. De manier waarop modellen aan contexten worden verbonden werkt sturend in de richting van één informele manier van oplossen van een bepaald getalsspecifiek probleem. Op deze manier worden een aantal oplossingsmethoden naast elkaar gezet. Er vindt vervolgens geen nadere reflectie plaats op oplossingsmethoden of de samenhang daartussen. De modellen worden niet verder ontwikkeld. Deze blijven hangen in modellen van specifieke contextsituaties. Een overgang naar een 'model voor' meer formeel wiskundig redeneren vindt dus niet plaats. Het vermenigvuldigen van breuken wordt daarmee het herkennen van standaardgevallen, doordat de verbinding met de context geleidelijk aan wordt vervangen door een koppeling tussen de oplossingsmethode en de getallen die in het geding zijn.

Dit eerste fenomeen hebben we verkokering genoemd. De voorbeelden in figuur 1 illustreren wat we in de vier methodes aantroffen. Ze laten zien dat er weliswaar is gekozen voor een brede fenomenologische inbedding van het begrip breuken en het rekenen met breuken, maar dat de realistische benadering niet wordt doorgezet. Vanuit contextgebonden, informele strategieën van leerlingen is een opdeling in getalspecifieke oplossingsmethoden ontstaan, die als zodanig worden ingeoefend. Hoewel de onderzochte methoden van elkaar verschillen kunnen we globaal vier situaties onderscheiden:

1 Het vermenigvuldigen van een (klein) geheel getal met een breuk wordt standaard opgelost met 'herhaald optellen'. In het algemeen wordt hier verwezen naar contexten waar dat goed bij past.
2 Het vermenigvuldigen van een breuk met een geheel getal is gekoppeld aan vermenigvuldigen als 'deel van'. Leerlingen wordt aangeleerd eerst het 'eenheidsdeel' te bepalen door het gehele getal te delen door de noemer, om het resultaat daarna met de teller te vermenigvuldigen. Dit type opgave heeft in de methodes steeds een geheel getal als antwoord.
3 Het vermenigvuldigen van twee 'echte breuken' (tussen 0 en 1) wordt gevisualiseerd met een rechthoek waarvan de oppervlakte als eenheid geldt. Deze rechthoek is, op basis van de noemers die in het spel zijn, opgedeeld in kleinere rechthoekjes die kunnen functioneren als bemiddelende grootheid. Leerlingen kunnen het resultaat dan uit het plaatje aflezen.

4 Voor de gemengde getallen wordt een splitsstrategie aangeleerd; in wezen de distributieve eigenschap zonder deze formeel zo te noemen.

Deze in eerste instantie informele strategieën verworden tot getalspecifieke procedures. Wanneer deze als zodanig worden ingeoefend, betekent dit dat de verschillende verschijningsvormen van het vermenigvuldigen van breuken niet met elkaar in verband worden gebracht en de leerlijn niet wordt doorgezet tot het formele niveau.

verticaal mathematiseren ontbreekt

Op deze manier wordt geen recht gedaan aan de uitgangspunten van de realistische benadering. De beoogde verschuiving van de aandacht van betekenisgeving vanuit contexten naar een focus op wiskundige structuur ontbreekt in de onderzochte basisschoolmethodes. Er is geen sprake van modelontwikkeling, van verbinding tussen de modellen van de specifieke contextopgaven en de formele rekenregel of structuur die daaruit voort zou moeten komen; het stadium van ‘model voor’ ontbreekt. Voor de meeste leerlingen blijft naar alle waarschijnlijkheid de beoogde overgang van benoemde getallen naar onbenoemde getallen als zelfstandige objecten uit. In het voortgezet onderwijs wordt er vanuit gegaan dat de leerlingen op een dergelijk abstract niveau met breuken kunnen redeneren. Bovendien kunnen de getalspecifieke oplossingsprocedures een barrière opleveren voor de overstap naar een meer algemene regel voor het vermenigvuldigen van breuken.

Voor de goede orde willen we benadrukken dat we geen bezwaar hebben tegen verschillende oplossingsstrategieën. In tegendeel, situatiespecifieke oplossingen die door betekenisvolle contextopgaven worden opgeroepen zijn heel waardevol als deze door leerlingen zelf uitgevonden worden. Dergelijke oplossingen zijn noodzakelijk als basis voor verdere generalisering en formalisering. Onze analyse van het vermenigvuldigen van breuken in basisschoolmethodes laat echter zien dat deze worden aangeleerd als standaardprocedures voor gestandaardiseerde situaties. Dat wil zeggen dat de basisschoolmethodes niet zozeer ruimte laten voor verschillende strategieën, maar - in plaats daarvan - getalspecifieke procedures aanleren.

Het idee van de realistische benadering is dat gekapitaliseerd zou moeten worden op de verschillende oplossingsmanieren die individuele opgaven toelaten. Wanneer deze in perspectief en niveau verschillen, kunnen de leerlingen samen met de leraar verkortings- en abstractiestappen maken. Hoewel de methodes er geen aandacht aan besteden, bieden de gekozen opgaventypen hier wel mogelijkheden voor. Bij een opgave over twintig pakjes melk van $\frac{3}{4}$ liter (vergelijk met figuur 1) bijvoorbeeld, kan op verschillende niveaus worden geredeneerd. De opgave kan worden opgelost met herhaald optellen, $\frac{3}{4} + \frac{3}{4} + \ldots + \frac{3}{4}$, maar er kan ook gebruik worden gemaakt van het feit dat $2 \times \frac{3}{4}$ liter samen $1\frac{1}{2}$ liter oplevert, of dat $4 \times \frac{3}{4}$ liter mooi optelt tot 3 liter; ofwel: $4 \times \frac{3}{4} = 3$. Wanneer de leerlingen zich dit laatste realiseren, dringt de vraag zich op, hoeveel keer kun je dat doen? Wel, 20 : 4, ofwel vijf keer. Je kunt de lange optelling $\frac{3}{4} + \frac{3}{4} + \ldots + \frac{3}{4}$ dus vervangen door $3 + 3 + 3 + 3 + 3 = 5 \times 3 = 15$. Ook zou een leerling kunnen redeneren dat je bij herhaald optellen eigenlijk het aantal kwarten aan het tellen bent, 20×3 kwarten, of als het om pakje van een kwart liter zou gaan, het vijf liter in totaal is en dat het nu drie keer zoveel is.

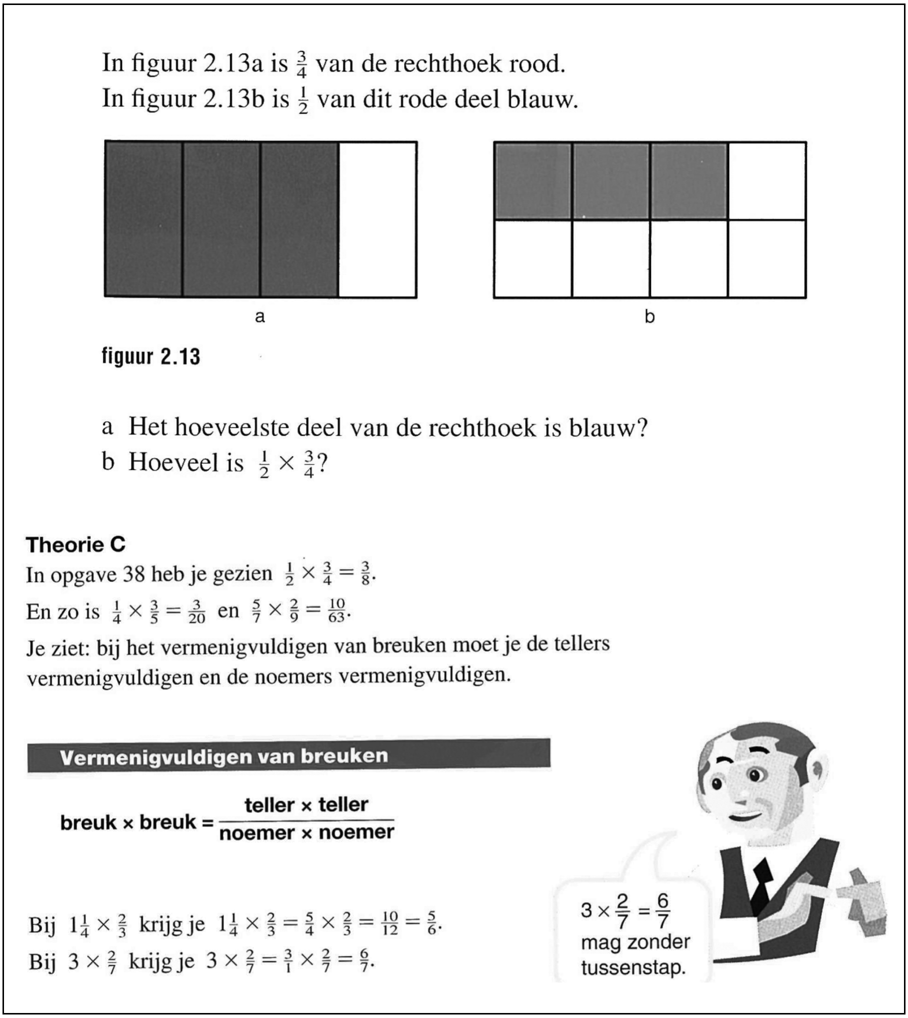
In de onderzochte methodes worden de informele strategieën bijna dwingend voorgeschreven. Terwijl een van de belangrijke pijlers van het realistisch rekenonderwijs juist is, dat dit oplossingen van de leerling zelf moeten zijn. Het oplossen van contextopgaven wordt in de methodes teruggebracht tot het herkennen van opgaventypen, hetgeen de leerlingen niet adequaat voorbereidt op het oplossen van toepassingsopgaven in algemene zin. Het inslijpen van getalspecifieke procedures creëert bovendien een barrière voor het bereiken van een hoger abstractieniveau.

3 doorgaande leerlijn

vermenigvuldigen van breuken in groep 8 en de brugklas - cultuurverschillen

Op eenzelfde manier als we de basisschoolmethodes hebben bekeken, analyseerden we ook de HAVO/VWO-boeken van ‘Moderne Wiskunde’ en ‘Getal en Ruimte’ voor de brugklas. Ook hier zoomden we weer in op het vermenigvuldigen van breuken (fig.2).

Het blijkt dat in de brugklas, net als bij bepaalde opgaven in groep 8, het tegel- of oppervlaktemodel wordt gebruikt bij het vermenigvuldigen van breuken. Alleen de betekenis van die modellen is op belangrijke punten verschillend. In de reken-wiskundemethodes in het primair onderwijs (PO), bijvoorbeeld, wordt het woord breuk voornamelijk gereserveerd voor een ‘echte breuk’; een breuk tussen 0 en 1. In het voortgezet onderwijs (VO) worden met het woord breuk over het algemeen alle mogelijke rationale getallen aangeduid. Het tegelmodel wordt in het primair onderwijs voor een specifieke opgave gebruikt. Daar past dan een plaatje bij waaruit de oplossing opgemaakt kan worden. In het voortgezet onderwijs heeft het model de functie van een visualisatie van de algemene regel ‘teller × teller / noemer × noemer’.



In figuur 2.13a is $\frac{3}{4}$ van de rechthoek rood.
In figuur 2.13b is $\frac{1}{2}$ van dit rode deel blauw.

a　　b

figuur 2.13

a Het hoeveelste deel van de rechthoek is blauw?
b Hoeveel is $\frac{1}{2} \times \frac{3}{4}$?

Theorie C

In opgave 38 heb je gezien $\frac{1}{2} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{8}$.
En zo is $\frac{1}{4} \times \frac{3}{5} = \frac{3}{20}$ en $\frac{5}{7} \times \frac{2}{9} = \frac{10}{63}$.
Je ziet: bij het vermenigvuldigen van breuken moet je de tellers vermenigvuldigen en de noemers vermenigvuldigen.

Vermenigvuldigen van breuken

$$\text{breuk} \times \text{breuk} = \frac{\text{teller} \times \text{teller}}{\text{noemer} \times \text{noemer}}$$

Bij $1\frac{1}{4} \times \frac{2}{3}$ krijg je $1\frac{1}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{5}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}$.
Bij $3 \times \frac{2}{7}$ krijg je $3 \times \frac{2}{7} = \frac{3}{1} \times \frac{2}{7} = \frac{6}{7}$.

figuur 2: vermenigvuldigen in de brugklas.
(uit: 'Getal en Ruimte', 1 havo/vwo 1)

Het plaatje is bedoeld als een soort bewijs voor deze regel. De manier waarop het oppervlaktemodel wordt gebruikt heeft bovendien een andere wiskundige structuur. In de PO-methodes wordt een geschikte 'bemiddelende grootheid' aangeboden, zodat het deel genomen kan worden van een geheel aantal stukjes. Je zou kunnen zeggen dat er een geschikte equivalente breuk wordt gezocht en wel zodanig dat de eerste breuk maal de teller van de tweede equivalente teller een geheel getal oplevert; $\frac{1}{2} \times \frac{3}{4} = \frac{1}{2} \times \frac{6}{8} = (\frac{1}{2} \times 6)/8$. In het voorbeeld uit de methode voor het voortgezet onderwijs

wordt eerst een van de twee breuken ($\frac{3}{4}$) gevisualiseerd in één richting en de andere ($\frac{1}{2}$) wordt daarna in de andere richting toegepast - zowel op het gekleurde deel als op de rest. Het resultaat kan dan worden afgelezen ('Het hoeveelste deel van de rechthoek is blauw (bovenaan in figuur 2)?')
In principe kan beredeneerd worden dat het totaal aantal stukjes gelijk wordt aan het product van de noemers en dat de nieuwe teller dan het product van de tellers is. In zowel primair als voortgezet onderwijs worden deze structuren niet expliciet gemaakt, er wordt volstaan met vragen als: 'Hoeveel is $\frac{1}{2} \times \frac{3}{4}$?' In het voortgezet onderwijs moet de leerling blijkbaar uit een aantal getalsvoorbeelden concluderen dat de regel 'teller × teller/noemer × noemer' altijd geldt, ook voor de in de voortgezet onderwijstekst genoemde voorbeelden met gehele getallen en gemengde getallen (onderaan in figuur 2).

In het PO worden voor de gehele en gemengde getallen juist andere modellen gebruikt. De modellen verwijzen naar andere operaties (zoals bijvoorbeeld 'herhaald optellen' in plaats van gehele getallen als breuk schrijven en dan tellers en noemers vermenigvuldigen). De modellen dienen bovendien een ander doel (als middel om een specifieke som op te lossen in plaats van een algemene rekenregel aannemelijk te maken). Dit maakt de aansluiting tussen PO en VO voor leerlingen lastig. Door de gemeenschappelijke modellen merken leraren de onderliggende verschillen niet zomaar op. Bovendien kijken ze vanuit hun eigen referentiekader op een andere manier naar het lesmateriaal. Dit heeft te maken met een verschil in cultuur tussen PO en HAVO/VWO. In het PO ligt het accent op toepassingen en op een betekenisvolle, inzichtelijke basis. HAVO en VWO-leraren oriënteren zich meer op het vervolgonderwijs en richten zich meer op de wiskunde zelf. De verschillen in wat er in PO en VO van de leerlingen wordt verwacht, worden daardoor onvoldoende gezien. Daardoor wordt ook niet gezien dat de inhoudelijke stap die de leerlingen geacht worden te maken heel groot is. Evenmin wordt gezien dat er allerlei interferentie kan ontstaan tussen de in het VO aangeboden regel en de in het PO geleerde oplossingsmethodes.

progressief mathematiseren

Wanneer de realistische benadering consequent zou worden uitgevoerd zouden er twee ontwikkelingen plaats moeten vinden. In de eerste plaats zou er een overgang plaats moeten vinden van breuken die hun betekenis ontlenen aan concrete situaties naar breuken als op zichzelf staande getallen; de overgang van benoemde getallen naar onbenoemde getallen. In de tweede plaats is er een ontwikkeling noodzakelijk op het tweede niveau van Van Hiele (1973), waar het gaat om relaties tussen relaties. Dit betreft

met name de relaties met delen en vermenigvuldigen. Voorbeelden daarvan zijn het begrijpen dat vermenigvuldigen met een breuk op hetzelfde neerkomt als vermenigvuldigen met de teller en delen door de noemer, dat je uit $\frac{15}{5} = 3$ kunt afleiden dat $\frac{15}{3} = 5$ en het inzicht, dat $\frac{3}{7} \times \frac{7}{3} = 1$.
Ook hiervoor zou een doorgaande leerlijn gecreëerd moeten worden. Hier gaven we al een voorzet voor in de strategieën voor $4 \times \frac{3}{4} = 3$. Deze kunnen verder geformaliseerd en gegeneraliseerd worden tot: $20 \times \frac{3}{4} = 20 : 4 \times 3 = 20 \times 3 : 4$. Wat betekent dat het vermenigvuldigen met $\frac{3}{4}$ wordt vervangen door: delen door 4 en vermenigvuldigen met 3, in willekeurige volgorde.

Met name deze laatste stap is nodig als voorbereiding op de algebra. Voor een goede aansluiting is het niet alleen van belang dat leerlingen op formeel niveau kunnen rekenen met rekenregels. Daarvoor is ook nodig dat leerlingen leren redeneren over de achterliggende structuren. Bovendien moeten de leerlingen soepel kunnen wisselen tussen verschillende betekenissen. Nu eens moet de breuk als object gezien worden, dan weer als een bewerking, of als een combinatie van twee bewerkingen. Men spreekt in dit verband wel van ambiguïteit als een essentieel kenmerk van de wiskunde. Bij de breuken begint dit al bij de fenomenologische inbedding, waarbij verschillende aspecten van breukbegrip (Streefland, 1991) en de relaties met verhoudingen, procenten en kommagetallen aan bod komen (Van Galen e.a., 2005).

4 reflectie

In het voorgaande constateren we twee problemen voor het rekenen met breuken: de verkokering in het primair onderwijs en de betekenisverschillen in de overgang van primair naar secundair onderwijs. Wij constateren dat hier veel fundamentelere oorzaken aan ten grondslag liggen die in het hele reken- en wiskundeonderwijs een rol spelen.

contexten

Het onderzoek laat zien dat contexten niet alleen steun kunnen bieden, maar ook belemmerend kunnen werken. Geschikte contextopgaven kunnen de leerlingen helpen betekenisvolle oplossingsmethoden te bedenken die geworteld zijn in hun eigen kennis, door gebruik te maken van de aangrijpingspunten die deze contexten bieden. De keerzijde hiervan is dat er een sterke binding tussen specifieke contexten en bepaalde rekenmanieren kan ontstaan (of zelfs getalspecifieke oplossingsmethoden). Het resultaat kan zijn dat er op die manier een palet aan oplossingsmethoden voor specifieke gevallen ontstaat. Op die manier kunnen de door de paradigmatische contextopgaven opgeroepen oplossingsmethoden een belemmering gaan vormen voor verdere generalisering en formalisering.

In lijn met de theorie van het realistisch reken-wiskundeonderwijs zouden verschillende oplossingsstrategieën van leerlingen juist gebruikt kunnen worden in het proces van niveauverhoging; dat moet dan wel gebeuren voordat de verschillende oplossingsmethoden zijn ingeslepen. Idealiter zou een enkele context oplossingen van verschillend niveau en vanuit verschillende perspectieven op moeten roepen. Juist het vergelijken van die strategieën zou kunnen leiden tot verticaal mathematiseren. Om tot een hoger niveau door te stoten is het essentieel dat de leerlingen verschillende oplossingsmethoden met elkaar in verband brengen en dat ze uitvinden hoe deze op een hoger (wiskundig) niveau met elkaar samenhangen.

‘model voor’ - overgang

Bij het gebruik van contexten en modellen om aan te sluiten bij de informele strategieën van leerlingen is het van belang om de verbinding te maken tussen die informele strategieën en het formele, abstracte niveau dat wordt beoogd. De modellen die door leerlingen worden gebruikt zouden ook aanleiding moeten geven om te redeneren over relaties en structuren, om zo op het formele niveau te komen. In het onderwijs is veel aandacht besteed aan de eerste stap van het genereren van betekenisvolle contexten en modellen, maar is te weinig aandacht geweest voor de verbinding van dat informele niveau met de beoogde wiskundige concepten. Uiteindelijk wordt er door leerlingen wel op formeel niveau gerekend, maar deze manier van rekenen staat los van de eerdere informele inbedding van het concept.

5 conclusie

De problemen die we tegenkwamen bij het vermenigvuldigen in de overgang tussen PO en VO staan naar ons oordeel model voor een groter probleem en dat is de doorgaande lijn van het met informele, gesitueerde aanpakken oplossen van contextproblemen tot en met het op een formeel niveau wiskundig redeneren voor specifieke onderwerpen, zoals het vermenigvuldigen van breuken. Dit heeft enerzijds te maken met het feit dat er niet geïnvesteerd wordt in het aan elkaar relateren van op zich heel waardevolle contextgebonden oplossingsmanieren. Het proces van generaliseren en formaliseren dat noodzakelijk is om op een formeler niveau te gaan redeneren, komt daardoor niet op gang. Anderzijds is er onvoldoende aandacht voor het feit dat een wiskundig relevant eindniveau meer omvat dat de formele standaardbewerkingen kunnen uitvoeren. Dit vraagt inzicht in de achterliggende wiskundige concepten en wiskundige structuur. Wij vermoeden dat het hier om problemen gaat, die zich niet alleen bij het vermenigvuldigen van breuken voordoen, maar ook bij andere onderwerpen. We pleiten daarom voor een fundamentele inhoudelijke analyse van de doorgaande leerlijnen in PO en VO.

literatuur

Boerema, J., W. Sweers, B. Krol, S. Hessing, S., J. Nijs-Van Noort, E. van den Bosch-Ploegh, A. Plomp & P. Snijders (2001). *Alles Telt - Reken-wiskundemethode voor het basisonderwijs*. Utrecht/Zutphen: Thiememeulenhoff.

Bruin-Muurling, G. (2010). *The development of proficiency in the fraction domain; affordances and constraints in the curriculum*. Eindhoven: TU (proefschrift).

Galen, F. van, E. Feijs, N. Figueiredo, K. Gravemeijer, E. van Herpen & R. Keijzer (2005). *Breuken, procenten, kommagetallen en verhoudingen - tussendoelen annex leerlijnen*. Groningen: Wolters Noordhoff.

Gravemeijer, K. (2003). Didactisch gebruik van de lege getallenlijn, Een persoonlijk perspectief. *Tijdschrift voor nascholing en onderzoek van het reken-wiskundeonderwijs*, *21*(2), 11- 23.

Hiele, P. van (1973). *Begrip en inzicht*. Purmerend: Muusses.

Reichard, L., S. Rozemond, J. Dijkhuis, C. Admiraal, G. te Vaarwerk, J. Verbeek, G. de Jong, N. Brokamp, H. Houwing, R. de Vroome, J. Kuis, F. ten Klooster, F. van Leeuwen, S. de Waal & J. van Braak (2004). *Getal en Ruimte 1 havo/vwo 1. Getal en Ruimte*. EPN, Houten: EPN.

Streefland, L. (1991). *Fractions in Realistic Mathematics Education, a paradigm of developmental research*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Treffers, A., L. Streefland & E. de Moor (1994). *Proeve van een nationaal programma voor het reken-wiskundeonderwijs op de basisschool. Deel 3a: breuken*. Tilburg: Zwijsen.