
1 + 1 is genoeg

- hoeveel rekenen is nodig om van wiskunde te houden? -

A. Goddijn
Flsme, Universiteit Utrecht

1 het rekenen is uitgevonden!

Groot nieuws, ik las het kort geleden: het rekenen is uitgevonden! Het stond niet in de krant, maar in 'Prometheus geboeid', een theaterstuk van zo'n 2500 jaar oud. Waarom ben jij hier door de goden aan de rotsen vastgekluiserd, vragen omstanders daarin aan de hoofdpersoon van het stuk. Prometheus zegt dat het was omdat hij de mensen hielp in de moeilijke dagen van weleer:

Geen vast kenteken voor de winter hadden zij,
voor bloesemende lente of vruchtenweelde van de
zomer; zonder zin of overleg deden
zij alles, tot ik hen de sterren leerde met
hun moeizaam te verklaren op- en ondergang.
Dan kwam 't getal, die kunde bij uitnemendheid
die 'kvond voor hen, en 't schrift met lettertekenen
waardoor men 't Al onthoudt: de moeder aller kunst.

Voor 'die 'k vond voor hen' ἐξηῦρον geeft het woordenboek twee betekenissen: uitvinden en ontdekken. Getallen staan hier vlakbij de gang van de sterren. De mythische anti-god Prometheus heeft daarin van geschiedwetenschappers vaak zijn historische gelijk gekregen. Het oudst bekende wis-rekenkundig document is een botje van 22.000 jaar oud, het Ishangobotje (fig.1), waarop ingekerfde streepjes te zien zijn.



figuur 1: het Ishangobotje (bron: Wikimedia)

Eén veronderstelling is dat het astronomische betekenis heeft gehad (Fauvel, 1987). Precies zoals Prometheus vertelt. Rekenen past niet alleen bij sterren en seizoenen, het gaat ook samen met redelijk overleg, met moeizaam verklaren en met zin. Het verheft!

Mijn eerste rekenopdracht van 2010 sloot aan op vinden of uitvinden van getallen. De opgave luidt 'Maak 2010' en zeilde binnen op een nieuwjaarskaart (fig.2). Getallen maak je ook volgens de zender van de kaart zelf; komt er denken bij, dan wordt het nog leuk ook.



figuur 2: nieuwjaarskaart (Kool & De Moor, 2009)

Een voor de handliggende reactie op 'Maak 2010' grijpt terug op het tellen zelf. $1 + 1 + 1 + 1 + 1 + \dots$ is het doorlopende antwoord dat uiteindelijk stilstaat bij $1 + 1 = 2010$.

De uitdaging is nu het feestelijk op papier te krijgen. Op één A4'tje, dat precies mooi tot in de hoeken vol is, zoals in figuur 3.

Dan begint het denken vanzelf met de vraag: 'Hoeveel tekens moeten op die bladzijde komen?'

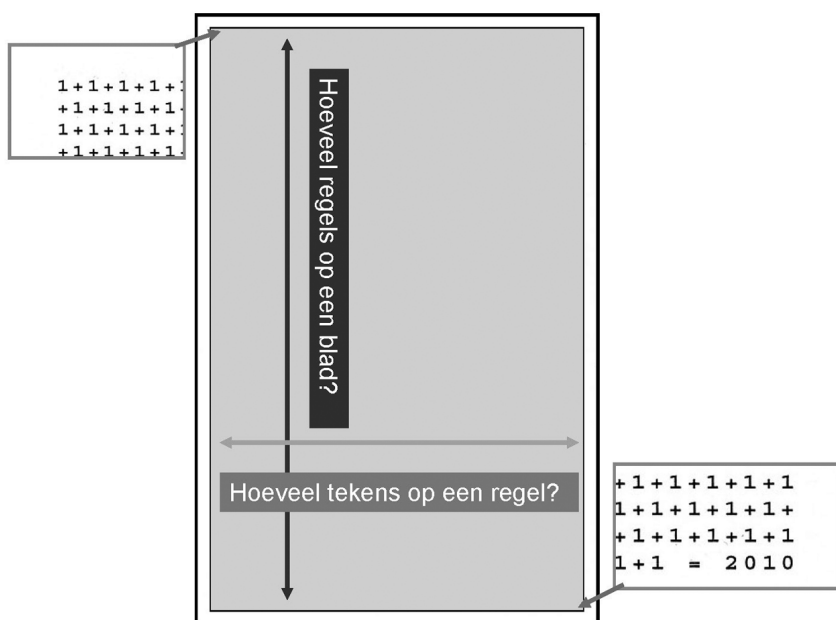
Uiteraard 2010 keer '1' en 2009 keer '+'; tot slot nog 7 tekens (waaronder twee spaties) voor het staartje ' = 2010'. Samen 4026 tekens. Een mooi vel krijgen we, als we een font met vaste breedte kiezen, courier bijvoorbeeld. De regels bestaan dan allemaal uit evenveel tekens. Een lelijk streperig vel ontstaat als alle regels (op de laatste na) beginnen met het cijfer 1 en eindigen met het teken '+'. Dat doen we dus niet en de regels krijgen

daarom ofwel één eentje meer dan de plusjes, ofwel één plusje meer dan de eentjes. Dat uiteraard afwisselend. De 1-enen staan dan zo'n beetje opgesteld als de sterren in de Amerikaanse vlag. In dit patroon is in elke regel het aantal tekens oneven.

Gezocht: geschikte getallen voor 'breed maal lang is 4026' waarin 'breed' oneven is en 'geschikt' betekent, dat het redelijk moet passen.

De kenmerken van een echte wiskundeopgave zijn in dit vraagstuk aanwezig: zo willen we 2010 maken!

De opgave is zelfbedacht, komt uit een behoefte voort, kan betrekkelijk eenvoudig geformuleerd worden, bevat een impliciete roep om schoonheid en het is nog niet bekend óf er wel een oplossing is (fig.3).



figuur 3: zo willen we 2010 maken!

2 de botjes van 4026

Om te weten hoe we 4026 uit een geschikte vermenigvuldiging kunnen krijgen, kijken we hoe we 4026 kunnen maken uit de kleinste botjes van het vermenigvuldig-gebeuren: de ondeelbare getallen.

Begin met delen door 2 en reken handig:

$$\begin{aligned} 4026 &= 2 \times 2013 && \text{(alle cijfers half)} \\ &= 2 \times 3 \times 671 && \text{(eerst een hap van 1800} \\ &&& \text{bij delen van 2013 door 3)} \end{aligned}$$

Nog eens delen door 3 werkt niet, 5 en 7 passen ook niet in 671. Het volgende geschikte ondeelbare getal is 11. Kenners zien direct dat 11 past.

$$\begin{aligned} &2 \times 3 \times 11 \times \dots && \text{(want } 7 = 6 + 1, \text{ de 11-proef)} \\ 4026 &= 2 \times 3 \times 11 \times 61. \end{aligned}$$

61 kunnen we verder niet delen.

Oneven breedtes die mogelijk zijn, zijn opgebouwd uit de getallen 3, 11, en 61. Zoals 3×11 en 11×61 of 3, 11 en 61 zelf. Alleen 61 biedt uitzicht op een mooie bladzijde van 61 tekens breed en 66 regels hoog. Met een tekstverwerker met *courier* aan boord wordt de klus via een paar *copy* en *paste*-slagen snel afgemaakt.

3 11-proef in twee patronen

Jawel, maar wat was dat toch met die 11-proef? Daar ga ik nu op in; op de eerste plaats omdat de 11-proef zo aardig is en op de tweede plaats om nog een kenmerk van mooie wiskunde te tonen.

Met de 11-proef kunnen we bij een groot getal voorspellen of het deelbaar is door 11, zonder dat we de deling uitvoeren. Twee voorbeelden om te laten zien hoe het werkt.

- 45738 is deelbaar door 11, want $4 - 5 + 7 - 3 + 8 = 11$ en 11 is deelbaar door 11;
- 123474321 is niet deelbaar door 11, want $1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 4 + 3 - 2 + 1 = 3$ en dat is niet deelbaar door 11.

Een getal is deelbaar door 11 als de ‘alternerende’ som van de cijfers 0 of een 11-voud is (Kool & De Moor, 2009).

Waaróm is dit zo zeker en zo algemeen waar?

Bij wiskundigen staat elke bewering altijd eerst in het beklagdenbankje. Het vak van de grootste zekerheid wordt bedreven vanuit de hoogste twijfel. Je gaat niet op gezag van vreemden aannemen, dat de beklagde de waarheid spreekt, maar geeft hem wél uitvoerig gelegenheid zich te verdedigen en zijn waarheid aan te tonen.

Luister hier kritisch naar het betoog, want de bewijslast is in dit geval zwaar. Het gaat namelijk niet om twee voorbeelden, maar om één uitspraak over ‘alle’ getallen. In de bewering van de 11-proef zit het woord

‘alle’ verstopt in het onbepaalde lidwoord aan het begin van de zin. ‘Een getal ..’ betekent dat het getal waar het over gaat niet gespecificeerd wordt: de bewering moet voor welk getal dan ook uit de rij 1, 2, 3, 4, .. aangetoond worden.

Houd de beklagde dus goed in de gaten als die eerst in gaat op het getal 45738, zeker omdat hij een gidsvoorbeeld naar voren brengt.

$$\begin{aligned}
 40000 &= 4 \times (9999 + 1) = 4 \times 9999 + 4 \\
 5000 &= 5 \times (1001 - 1) = 5 \times 1001 - 5 \\
 700 &= 7 \times (99 + 1) = 7 \times 99 + 7 \\
 30 &= 3 \times (11 - 1) = 3 \times 11 - 3 \\
 8 &= 8 \times (1 + 1) = 8 \times 1 + 8
 \end{aligned}$$

Opgesplitst naar cijfer en positie. Rechts zijn handig 11-vouden afgesplitst. 9999, 1001, 99, 11 zijn namelijk zelf 11-vouden. Bij sommige regels zit je onder, bij andere boven een 11-voud. Als we dat eenmaal weten zien we dat we alleen naar $4 - 5 + 7 - 3 + 8$ hoeven te kijken. Als dat een 11-voud is, is het hele getal 45738 het dus ook.

Dat 9999, 1001, 99, 11 zelf 11-vouden zijn, is wel na te gaan. Nu kunnen we eventueel hetzelfde doen met een andere getal, bijvoorbeeld 62304. Maar, vertrouwend op het patroon, rekenen we dan natuurlijk direct $6 - 2 + 3 - 0 + 1 = 8$ uit. Geen 11-voud. Sterker nog, de rest bij deling door 11 van 62304 is 8. Gevonden zonder staartdeling!

De meesterzet in de redenering van de verdachte is het aangeven van het patroon; dat patroon garandeert dat de 11-proef ook voor andere getallen dan 45738 opgaat. Zo is aan de hand van een getal de eigenschap voor veel getallen aangetoond.

Het zwakke punt is dat we toch nog moeten ‘weten’ dat 9999, 1001, 99, en 11 deelbaar door 11 zijn. Sterker nog: dat we voor grotere getallen eigenlijk nog met lege handen staan. Ja, we zijn eventjes heel streng.

De oplossing is dat nu wéér met een patroon gewerkt moet worden, maar nu met een patroon dat een gezonde dosis ‘enzovoort’ bevat, om te voorkomen dat de methode stopt bij een of andere grens. Hieronder is dat tweede patroon de voortzetting van de rij 11, 99, 1001, 9999. De onderstrepingen zijn steeds van paartjes 9-s of 1-en, waardoor we zien dat alle getallen in de rij veelvouden van 11 zijn, en natuurlijk afwisselend onder en boven getallen liggen uit de rij 10, 100, 1000, enzovoort.

$$\begin{aligned}
 11 &= 10 + 1 = \underline{11} \\
 99 &= 100 - 1 = \underline{99} \\
 1001 &= 1000 + 1 = \underline{99} 0 + \underline{11} \\
 9999 &= 10000 - 1 = \underline{99} \underline{99} \\
 100001 &= 100000 + 1 = \underline{99} \underline{99} 0 + \underline{11}
 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{rcl} 999999 = 1000000 & -1 = & \underline{99\ 99\ 99} \\ 10000001 = 10000000 & +1 = & \underline{99\ 99\ 99\ 0} + \underline{11} \\ 99999999 = 100000000 & -1 = & \underline{99\ 99\ 99\ 99} \end{array}$$

Per twee regels gebeurt er steeds hetzelfde. Het gaat onbeperkt volgens het patroon door; we weten daarom dat de 11-proef voor onbeperkt grote getallen opgaat.

In de nadruk op 'patroon' schuilt een belangrijk inzicht. We kunnen alleen helderheid krijgen over het oneindige van iets, als we er een of ander patroon in kunnen zien. Dat is die gezonde dosis 'enzovoort'. Dat patroon kan ingewikkeld zijn.

4 het getal van Leopold Bloom

Op <http://www.unc.edu/~rowlett/units/large.html> staan de juiste Amerikaanse en Europese namen voor de getallen 10, 100, 1000, enzovoort. Het laatste getal op die pagina is de 1 met 99 nullen, in goed Nederlands *sexdeciljard*.

De jarden en de joenen wisselen elkaar als volgt af.

miljoen	= 1 000 000
miljard	= 1 000 000 000
biljoen	= 1 000 000 000 000
biljard	= 1 000 000 000 000 000
triljoen	= 1 000 000 000 000 000 000
triljard	= 1 000 000 000 000 000 000 000

Voor in de naam wordt ook geteld: bi, tri, quadri, quinti, enzovoort. Tot en met inderdaad sexdeci, zestien. Bij de joenen gaat het om het aantal groepen van zes nullen, de jarden staan hebben er nog drie meer.

Sexdeciljard; $99 = 16 \times 6 + 3$, inderdaad zestien. Het daarop volgende getal (nou ja) is een 1 met 100 nullen. Dat getal heeft van de negenjarige Milton Sirota in 1938 de naam *googol* gekregen. $\text{Googol} + 1$ is niet deelbaar door 11, want er staan 99 nullen tussen de twee enen.

(Het woord 'Google' is dé tikfout van de twintigste eeuw. Larry Page, mede-ontwikkelaar van een bekend internet-zoekprogramma, maakte hem.)

Naarmate we grotere getallen voor ons zien, krijgen we steeds meer de neiging ze te beschrijven met hun omvang in cijfers. Een handige manier werkt iets algemener: je schrijft op hoeveel factoren van een bepaalde soort een getal heeft; zo betekent 2^5 het getal $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$, vijf tweeën met elkaar vermenigvuldigd. 10^{99} is dan het al bekende sexdeciljard. Deze notatie is erg efficient: de reus is getemd met vier cijfers.

Zou 9^{99} dan het grootste getal zijn, dat met drie cijfers kan worden opgeschreven? Het lijkt van wel, maar bedenk dat niets ons tegenhoudt ook in de cijfers boven de grondlijn (de exponent) te zetten wat we willen. Zo maak je bijvoorbeeld het getal 10^{googol} , googolplex genoemd. (Googolplex bestaat natuurlijk ook.) Dat mag ook in drie verdiepingen, opgeschreven worden:

$$10^{10^{10}}$$

Helaas: zes cijfers, en als we de nullen weg zouden laten, stond er gewoon 1. Het grootste getal van drie cijfers, en geen andere tekens of letters is veel kleiner dan googolplex

$$9^{9^9}$$

maar toch nog zo groot dat het op James Joyce gigantische indruk maakte. Dat blijkt in zijn *Ulysses* (Joyce, 1922). Hoofdpersoon is Leopold Bloom, een uiterst gewone Dubliner en daardoor als moderne Elckerlick de tegenpool van godenbestormer Prometheus. Bloom was een getal aan de weet gekomen

... dat zo het met een betrekkelijke mate van precisie berekend was, zo groot was geworden en zoveel plaatsen had vereist, bijvoorbeeld de negende macht van de negende macht van 9, dat men, nadat de uitkomst was vastgesteld, 33 dicht bedrukte delen van 1000 pagina's elk van ontelbare katernen en riemen dundrukpapier nodig zou hebben gehad om de gehele geschiedenis te bevatten van de gedrukte eenheden, tientallen, honderdtallen, duizendtallen, tienduizendtallen, honderdduizendtallen, miljoentallen, tienmiljoentallen, honderdmiljoentallen, miljardtallen, daar de kern van de nevelvlek van elk cijfer onder 10 in elke serie in kort bestek in potentie verheven kon worden tot de uiterste kinetische resultante van elke macht van elk van zijn machten.

Bij het werkstuk van 'Maak 2010' op een A4'tje moest de lettergrootte ruim genomen worden om de bladzijde te vullen. Voor Blooms schatting van het aantal cijfers nemen we wegens 'dicht bedrukt' dan ook 3×4026 tekens op een bladzijde. Dat levert in 33 banden van 1000 bladzijden ruw geschat 398574000 cijfers op.

Zou Joyce zomaar wat gegokt hebben of is de schatting misschien heel redelijk?

Om achter het juiste aantal cijfers te komen, legde ik de vraag aan leerlingen 5-vwo voor. Die merkten snel op dat aanvankelijk in de rij van machten van 9 elk nieuw getal steeds één cijfer langer is: 9, 81, 729, 6561, 59049, enzovoort.

Geretta en Bart noteerden het een tikkeltje aanvechtbaar, maar binnen de context van de gestelde vraag heel duidelijk, zoals in figuur 4.

De rekenmachine toonde dat er bij de stap van 9^{21} naar 9^{22} en weer bij de stap van 9^{43} naar 9^{44} géén extra cijfer nodig is. Er leek een patroon gevonden te zijn en dat patroon werd onmiddellijk uitgebuit.

$$\begin{array}{lcl} 9^1 & = & 1 \\ 9^2 & = & 2 \\ 9^3 & = & 3 \\ 9^4 & = & 4 \end{array}$$

figuur 4: lelijk, maar wel duidelijk genoteerd

Hoe vaak komt zo'n niet-ophogende stap in de rij van de $9^9 = 387420489$ opeenvolgende machten van 9 voor? In figuur 5 zien we dat daartoe $387420489 / 43$ uitgerekend werd. Per groep van 43 machten moeten er twee cijfers af.

illegaal vanuit 21

dat er steeds om de 22e het 2e groepje afgelezen kan worden

$$9^{22} = 21$$

$$9^{21} = 21$$

$$9^{43} = 42$$

$$9^{44} = 42$$

$$9^{65} = 63$$

$$9^{66} = 62$$

$$9^{19} = 387420489$$

$$387420489 \div 43 = 8986523 \text{ met rest } 369400931$$

figuur 5: aantal cijfers van het getal van Bloom

Geretta en Bart houden het uiteindelijk op 369400931 cijfers. Het is die dag niet gelukt deze leerlingen duidelijk te maken, dat het heel zeker is dat

het patroon, dat tot macht 43 klopt, straks zeker niet helemaal opgaat. Met wat moeite valt namelijk wel aan te tonen, dat als er een regelmatig patroon zou zijn, er een macht van 9 gelijk zou moeten zijn aan een macht van 10. Er was gelukkig een Paul in de klas die al bekend was met het zwaardere rekenmiddel 'logaritme'. Zonder toelichting deel ik hier zijn (correcte) antwoord mee. Het getal van Bloom heeft exact 369693100 cijfers, de laatste twee nullen zijn hier echt goed. Geretta en Bart vonden hun antwoord behoorlijk nauwkeurig en wat cijferaantal betreft is dat ook zo. Jammer dat het wáre getal 9 tot de 9 tot de 9-de wel met 292169 factoren 10 gemist wordt, een kniesoor die daar op let.

5 krakend ijs onder de wiskunde van rond 1900

We hebben het gehad over het grootste getal van drie cijfers, zonder letters en andere tekens genoteerd. Ik denk dat het dat het getal van zo even inderdaad was. Maar echt nagegaan is het nog niet. Ik denk dat het waar is, maar ook dat we op zijn minstens vlakbij krakend ijs zijn. Laten we eens voorzichtig kijken naar het merkwaardige getal in figuur 6.



figuur 6: de paradox van Richard (1905): het kleinste getal dat niet met achtenzeventig tekens kan worden opgeschreven is hier met achtenzeventig tekens opgeschreven

Kent u die van de straat van de schoenmakers?

Een schoenmaker beweerde de beste schoenmaker van de stad te zijn. De tweede ging met zijn reclame er stevig overheen, hij noemde zich de beste schoenmaker van de wereld. De derde won gemakkelijk met de bescheiden leus 'Beste schoenmaker van de straat'.

Paradoxen en paradoxale definities zijn al heel oud. De Bijbel bevat er al een. Hier is Paulus, in de brief aan Titus (die zich op Kreta bevond), I,12:

Een van hun eigen profeten, zelf een Kretenzer, heeft gezegd: 'Kretenzers zijn onverbeterlijke leugenaars, gemene beesten, vadsige vreters'.

De bewuste profeet was de filosoof Epimenides, Kretenzer uit de zesde eeuw voor Christus, die hier inderdaad letterlijk door Paulus wordt geciteerd.

Deze rarigheden hebben gemeen dat ze ontkennend naar zich zelf verwijzen: de Kretenzer die iets over ligende Kretenzers zegt (liegt ie zelf ook?), een getal dat zijn eigen beschrijving gebruikt en die ontkent.

Het verbijsterende van deze gedachten is niet dat ze op papier bestaan, maar dat ze in de periode rond 1900 als een regelrecht gevaar voor de wiskunde zelf werden gezien. Hoe kon dat gebeuren?

In de negentiende eeuw worden allerlei intuïtief gebruikte wiskundige constructie zoals getal, ruimte, het begrip limiet en raaklijn, de concepten oneindig groot en oneindig klein en de manieren om er mee te werken van hechte grondslagen voorzien; dat alles om de wiskunde zo zeker en veilig mogelijk te maken.

Zo publiceerde Giuseppe Peano in 1889 vijf grondslagen voor de natuurlijke getallen. De eerste drie vertellen hoe de natuurlijke getallen door hun opvolgstructuur worden vastgelegd. Eigenlijk zoals wij '2010' maakten.

- 1 Nul is een getal.
- 2 Elk getal heeft een opvolger en die opvolger is ook een getal.
- 3 Nul is niet de opvolger van enig getal.

De stevigste algemene onderbouwing van de wiskunde werd toentertijd in de verzamelingenleer van Cantor gevonden, waarbinnen ook de natuurlijke getallen soepel konden worden ondergebracht. De zogenaamde naïeve verzamelingenleer liet echter toch - zo bleek keer op keer - paradoxen als die van hierboven toe. Alarm alom, ons mooie bouwwerk stort in!

Er waren grofweg gesproken twee reacties op de situatie.

De ene probeerde de wiskundige objecten nauwkeuriger te beschrijven en wel zo vergaand, dat de paradoxen niet meer mogelijk waren. Onderschat het niet, een goede versie van de axiomatiek van de verzamelingenleer kwam pas tot stand in de jaren twintig van de vorige eeuw!

De andere reactie probeerde de hele wiskunde van axioma's te ontdoen, door te proberen de wiskunde niet meer te zien als een 'vak waarin de logica gebruikt' wordt om uit fundamentele waarheden andere af te leiden, maar als een 'onderdeel van de logica' zelf. Kampioenen van deze laatste visie zijn Gottlieb Frege en Bertrand Russell. Vooral Russell was hierbij geïnspireerd door zijn held Leibniz, de filosoof uit de zeventiende eeuw die in feite toen al dit zogenaamde 'logicistische' standpunt innam. Voltaire schreef zijn geestige novelle Candide onder andere als verzet tegen Leibniz'

vooruitgangsgeloof, dat de wereld door zuiver logisch juist handelen begrepen kon worden en dat de benodigde logica als het ware in een soort rekenmachine kon worden gerealiseerd. Voltaire laat in *Candide* nadrukkelijk de aardbeving (een tsunami, zoals wij zouden zeggen) in Lissabon van 1755 langkomen om aan te tonen dat onze wereld niet de best van alle mogelijke werelden is, wat Leibniz juist wel dacht op grond van een mix van theologische en logicistische argumenten.

Sinds vorig jaar maakt een stripboek over de grondslagenstrijd van rond negentienhonderd veel furore: 'Logicomix', door een team waarin onder andere Apostolos Doxiadis, al eerder bekend als groot popularisator van moeilijke wiskunde. Zie de bladzijde in figuur 7 waar Russell 'zijn' paradox ontdekt: de verzameling van alle verzamelingen die zichzelf niet als element bevatten. Bevat die zichzelf nu wel of niet?



figuur 7: Russel ontdekt de paradox die hem jarenlang zal achtervolgen

In 'Logicomix' is Russell zelf de verteller, die tijdens de tweede wereldoorlog een lezing houdt voor een groep Amerikaanse pacifisten. Russell was zelf extreem pacifist tijdens de eerste wereldoorlog. Ik laat het aan de lezer over om na te gaan of Russell uiteindelijk, in weerwil van zijn gehoor, toch in de sporen van Voltaire stapt (en de Amerikanen naar Europa wil sturen) of dat hij pacifist blijft.

Wat de betekenis van de grondslagenstrijd voor de wiskunde zelf betreft nog dit. Een gevolg ervan is zeker geweest dat er grote aandacht is ontstaan voor correcte en volledig onderbouwde bewijsvoering, volgens sommigen ten nadele van intuïtie en ja, van begeestering. Voor grote wiskundigen is begeestering met fundamentele correctheid goed combineerbaar; voor de minderen, zeg maar de niet-professionele wiskundigen in de grote klas van het dagelijks leven, lijkt dat minder mogelijk en ook niet nodig. Henri Poincaré (1854-1914) zou mij zeker steunen in deze mening. Hij is rond 1900 een van de weinige wiskundigen die meende dat het gedoe rond de antinomieën en paradoxen minder belangrijk was dan het leek. Alleen als we er op uit zijn paradoxen te bouwen, lukt dat en lijkt het gebouw in gevaar. Gaat het om onderzoeken van wiskundige objecten als ruimte en getal en ook subtilere zaken en hun bijhorende abstracte structuur, dan is de kritische gebruikte intuïtie niet de slechtste gids om tot nieuwe vondsten te komen, ook bij onderzoek van nieuwe vormen van ruimte als die met meer dan drie dimensies en met eigenschappen als negatieve kromming, zoals in de relativiteitstheorie werden gebruikt, waar Poincaré allemaal met succes aan meewerkte.

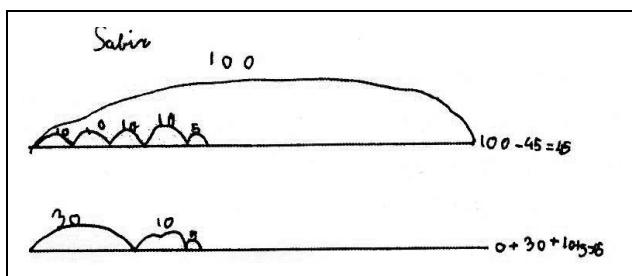
Een goede gids door de roerige periode van de grondslagenstrijd 1860-1940 met veel informatie over de diverse opvattingen is 'Plato's Ghost' (Gray, 2007).

6 de dans van het derde kikkertje

Als contrast met het voorgaande besluit ik met een (in mijn ogen) charmant stukje wiskunde, waarin in de bijhorende redenering geen getal, formule of iets dergelijks voorkomt. Het is meetkunde die uit de getallenlijn opbloeit. Aanleiding is het springen op de getallenlijn, zoals dat in het proefschrift 'Met sprongen vooruit' (Menne, 2001) tot leidraad van een productief oefenprogramma voor zwakke rekenaars is gemaakt. Daarin staan veel schetsjes als in figuur 8; er zijn vooral veel sprongen van 1 en 10.

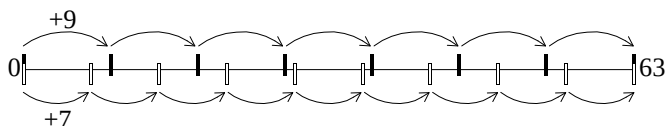
In mijn eerste voorbeeld treden twee springende kikkertjes op. De groene kikker (onder) springt met een sprong van 7, de blauwe (boven) met een sprong van 9. Ze laten hun gekleurde sporen op de getallenlijn na. Die vin-

den we door tegelijk de tafel van 7, en de tafel van 9 op te zeggen, in gezamenlijke volgorde van uitkomsten.



figuur 8: springen op de getallenlijn

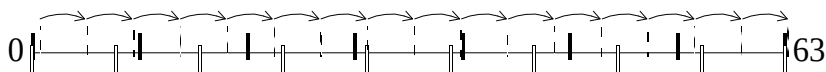
De kikkers starten bij 0: 0, 7, 9, 14, 18, 21, 27, 28, 35, 36, 42, 45, 49, ... In beeld (fig.9).



figuur 9

Zulke patronen met twee verschillende constante ritmes kennen we goed van twee samen beierende zondagsklokken. Het geheel is wakkerschuddend chaotisch, maar de twee klokken - of de twee kikkertjes - op zich zijn dat niet, ze hebben hun eigen strakke regelmaten.

In de volgende illustratie halen we de pijltjes voor het groene en het blauwe kikkertje even weg, maar laten de sporen staan. De nieuwe pijltjes zijn ook allemaal even groot. Dat derde kikkertje springt regelmatig en komt juist in elk vakje tussen twee sporen (fig.10)!

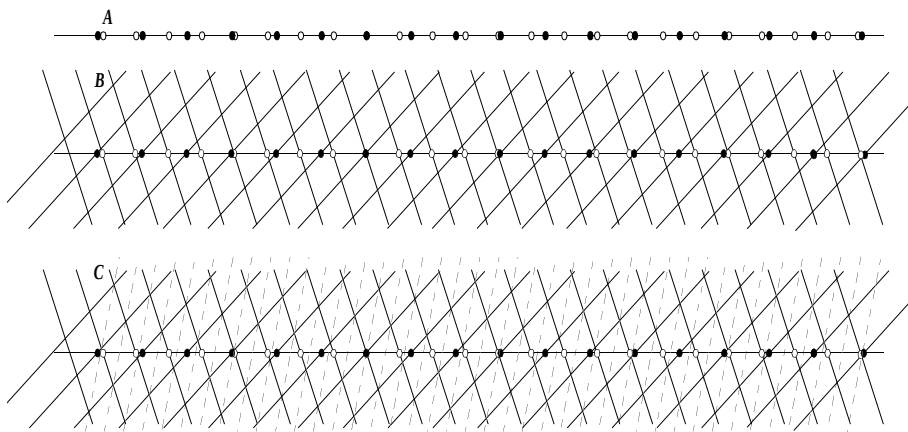


figuur 10

In het midden zijn dat hier twee sporen van gelijke kleur. In de eindpunten (bij 0 en 63) komt het derde kikkertje op twee sporen tegelijk; voor het gemak beschouwen we dat als een vakje met lengte 0, waar het kikkertje ook juist tussen twee sporen in zit. Met enige moeite kunnen we het sprongetje van het derde kikkertje nog wel berekenen, het is het zestiende deel van 63. Maar dan moeten simultaan de tafels van $\frac{16}{63}$, 7 en 9 opzeggen om te controleren of het plaatje werkelijk klopt.

Dat gaan we niet doen. Integendeel, we gooien voor het maken van de stelling van het derde kikkertje al onze getallen de deur uit en kijken naar rijtjes stippen op gelijke afstand. Twee van die rijtjes zien we in figuur 11, witte en zwarte. Ze lopen nu onbeperkt in beide richtingen door. Kunnen we nu ook een derde regelmatige onbeperkte rij maken die precies in alle vakje een (grijze stip) heeft?

Het kan echt altijd! Zie het driestappenbewijs in figuur 11.



figuur 11: springen op de getallenlijn kan zonder $1 + 1$

Bij A zijn de twee stippenrijen getekend met witte en zwarte stippen. Bij B zijn twee bundels evenwijdige lijnen toegevoegd, zodat een soort schuin ruitjespatroon ontstaat. Bij elk van de stippen hoort een lijn. Bij C wordt duidelijk wat het nut is van de lijnen bij B. Daar is een derde bundel lijnen getekend, gestippeld, diagonaal over de schuine ruiten.

Kijk, die lijnen snijden precies in de oorspronkelijke rechte lijnen een derde reeks punten in. Dáár komen de grijze punten. Het kan, het kan altijd.

7 tot slot

De redenering bij het derde kikkertje had inderdaad $1 + 1$ niet nodig. De onverwachte wending is hier het buiten de lijn van de stippen treden, Door het probleem in een bredere wereld te bekijken, was een goed begrijpbare verklaring toegankelijk geworden. Maar ik hoor hier en daar een enkele lezer wat knorren: zo iets vind ik toch nooit.

Nee, misschien is dat wel zo, maar wat hindert dat nu eigenlijk? Mijden we de Nachtwacht, Yesterday en de ijsbaan omdat we zelf het niveau van

Rembrandt, Lennon en Ireen niet halen?

Tussen 1 + 1 van ons begin en de kikkertjes ligt een breed gebied, waarop iedereen wel een beetje kan scoren en ook kan meegenieten. De voorwaarde voor het plezier, voor het genieten van de schoonheid van rekenen-wiskunde zit dan ook niet in het leveren van een prestatie, of in de moeilijkheidsgraad, maar in het plezier van het denken op zich en de tinteling van het kleine of grote lichtje dat daarbij hoort.

De stelling van de drie kikkertjes is in de vorm van de twee getalrijen gevonden door een Australische wiskundeleraar, Sam Beatty, in 1921. Er bestaat ook een mooi en, zoals wiskundigen het graag zeggen, elegant bewijs van Ostrowski uit 1927 met wat algebra (Honsberger, 1975).

Het hier gegeven bewijs werkt nog onder iets algemener omstandigheden dan bij de rijen van Beatty. Ik vond het kijkend naar een schuine streep over een tegelvloer. Dat beeld is precies het derde deel van figuur 11. Uitvinden, vinden, ontdekken: niet zo verschillend allemaal.

literatuur

- Doxiadis, A. & C. Papadimitriou *Logicomix, Een epische zoektocht naar de waarheid*. Nederlandse vertaling Mat Schifferstein. Amsterdam: De Vliegende Hollander.
- Fauvel, John & Gray, Jeremy (1987). *The History of Mathematics: A Reader*. The Open University. New York: Palgrave Macmillan.
- Gray, Jeremy. (2008) *Plato's Ghost: the modernist transformation of mathematics*. Princenton, New Jersey: Princeton University Press.
- Honsberger, Ross (1975). *Ingenuity in Mathematics*. Washington, DC: Mathematical Association of America.
- Joyce, J. (1922) *Ulysses*. Nederlandse vertaling John Vandenbergh (1969). Amsterdam: Bezige Bij.
- Kool, M. & E. de Moor (2009). *Rekenen is leuker dan/als je denkt*. Amsterdam: Bert Bakker.
- Menne, J.J.M. (2001). *Met sprongen vooruit*. Utrecht: Universiteit van Utrecht (proefschrift).