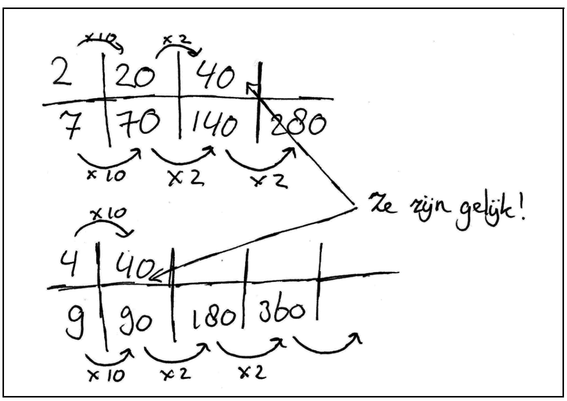
Specifieke wiskundige kennis, inzicht en vaardigheden van leerkrachten

F. Garssen
Stenden Hs, Pabo ‘De Eekhorst’, Assen

1 inleiding

De kinderen in de klas van meester Herman hebben de opdracht gekregen om breukenparen met elkaar te vergelijken. Eén breukenpaar waarvan ze moeten beoordelen welke van de twee groter is, is het stel $\frac{2}{7}$ en $\frac{4}{9}$. Marieke, een van de leerlingen van Herman, zet beide breuken in een verhoudingstabel (fig.1). Na een tijdje ontdekt ze dat in de bovenkant van haar verhoudingstabellen twee keer het getal 20 voorkomt.



figuur 1: vergelijken van de breuken $\frac{2}{7}$ en $\frac{4}{9}$. Het werk van Marieke

Ze roept meester Herman bij zich en zegt, terwijl ze wijst naar de beide twintigen: ‘Die zijn gelijk’. Herman reageert hierop door Marieke te vragen welke getallen ze - ook alweer - gelijk moest maken. Terwijl Marieke een aantal keren wijst op de bovenkant van de tabellen en de twee twintigen die ze vond, blijft Herman doorvragen naar een manier waarop Marieke de getallen in de onderkant van de tabellen gelijk kan maken.

In de groep van meester Marcel zijn de kinderen aan het oefenen met verhoudingstabellen. In de methode staat de volgende verhoudingstabel (fig.2):

8				
20				**50**

figuur 2

Tijdens de nabespreking neemt Marcel deze verhoudingstabel over op het bord en vraagt een aantal kinderen om uit te leggen hoe ze te werk zijn gegaan. Julia vertelt: ‘Ik heb eerst gedeeld door 2 gedaan en toen keer 5’. Daarna is Lex aan de beurt: ‘Ik heb eerst gedeeld door 2 en toen keer 10 gedaan en daarna nog een keer gedeeld door 2’. Marcel schrijft beide aanpakken uit in de verhoudingstabel. Daarna zegt hij tegen de kinderen: ‘Bekijk samen met je maatje de aanpakken van Julia en Lex, wat valt je daaraan op?’ Het gesprek wat hij naar aanleiding hiervan met de kinderen voert, gaat over de associatieve eigenschap: vermenigvuldigen met 5 heeft hetzelfde effect als vermenigvuldigen met 10 en vervolgens delen door 2.

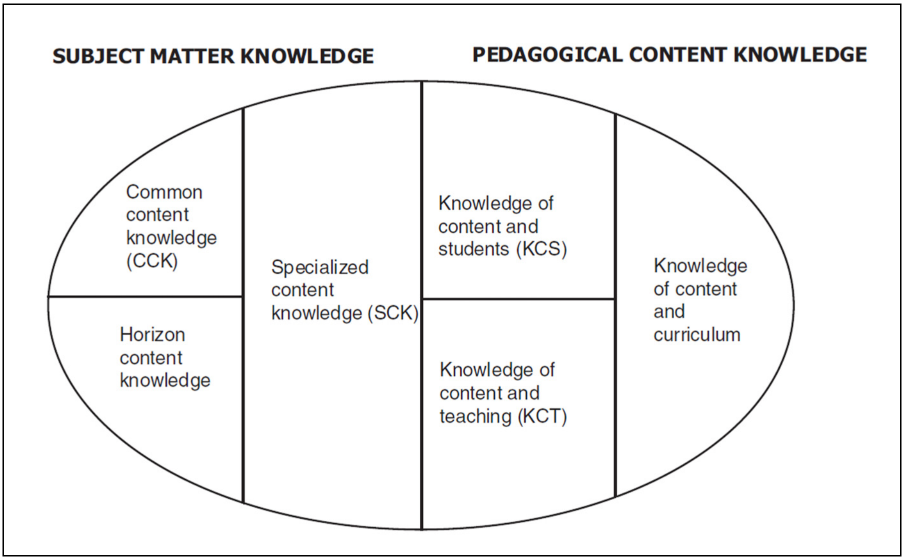
Bovenstaande, waargebeurde, verhalen illustreren het effect van de aan- of afwezigheid van een speciaal soort reken-wiskundige kennis, inzicht en vaardigheden van leerkrachten. Een wiskundige kennis die heel specifiek is voor het vak leerkracht, maar waarvoor niet per se kennis van leren of onderwijzen van rekenen-wiskunde nodig is. Herman bijvoorbeeld is zelf goed in staat de breuken $\frac{2}{7}$ en $\frac{4}{9}$ met elkaar te vergelijken. Hij kan Marieke echter niet verder helpen bij de mogelijkheden die zij aanwijst. Omdat Herman (zoals bij navraag achteraf bleek) niet wist dat je breuken ook kunt vergelijken door de tellers gelijk te maken, was hij niet in staat Marieke te begeleiden in de ontdekking die zij had gedaan. De enige manier die hij kende om haar te helpen was de breuken met elkaar te vergelijken door het gelijknamig maken van de noemers.
Marcel daarentegen kan meer dan het zelf aanvullen van de verhoudingstabel. Hij is in staat om heel vlot het verband te zien tussen twee oplossingsmanieren van kinderen. Hij kan snel beoordelen of er in de gegeven oplossingen mogelijkheden zitten om kinderen na te laten denken over wiskundige eigenschappen. Voor niveauverhoging tijdens de interactie is het nodig om te beschikken over dit soort reken-wiskundige kennis die je in staat stelt om de juiste vragen te kunnen stellen.

2 specialized content knowledge

In de beschreven voorbeelden gaat het om het missen of bezitten van reken-wiskundige kennis, inzicht en vaardigheden die een willekeurige burger niet hoeft te bezitten maar leerkrachten wel. In beide voorbeelden gaat het niet om kennis van leren of kennis van onderwijzen. Dit is het soort specifieke kennis, inzicht en vaardigheden dat *Specialized Content Knowledge (*SCK*)* (Ball & Hill, 2009; Ball e.a., 2005; Ball e.a., 2008; Hill e.a., 2007) wordt genoemd.
Het idee dat er een kenniscategorie bestaat die specifiek is voor het beroep leerkracht, maar waarvoor geen kennis van leren en onderwijzen nodig is, is geïdentificeerd door Ball e.a. (2004, 2005). Zij onderzochten een database van lessen (inclusief voorbereiding, leerlingenwerk, reflecties, toetsen) op de vraag: Wat doet een leerkracht die probleemgeoriënteerde, interactieve reken-wiskundelessen geeft en op welke kennis en vaardigheden doet dat een beroep? In hun benadering gingen zij uit van de ideeën van Shulman (1986). Shulman beschreef drie verschillende categorieën kennis die een leerkracht nodig heeft bovenop algemene kennis over leren, onderwijzen, organisatie enzovoort. Hij onderscheidde daarbij *Content Knowledge*: inhoudelijke kennis, *Curricular Knowledge*: kennis van het curriculum en *Pedagogical Content Knowledge:* kennis van de beste manieren om het vak te onderwijzen en begrijpen wat voor de lerende makkelijk en moeilijk te begrijpen is. Uitgaande van deze drie categorieën verfijnden Ball e.a. de kenniscategorieën van Shulman. In figuur 3 zijn deze verfijnde categorieën weergegeven.

Een van de categorieën die door Ball e.a. is verfijnd, is die van de *Content Knowledge*. Zij verdelen deze kennis in *Common Content Knowledge (*CCK*)*: de kennis die je mag verwachten van bijvoorbeeld een gecijferd burger en *Specialized Content Knowledge (*SCK*)*: de inhoudelijke kennis en vaardigheden die heel specifiek is voor leerkrachten. Herman uit het beschreven voorbeeld beschikt wel over CCK: hij kan twee breuken met elkaar vergelijken maar hij mist SCK. Marcel beschikt over CCK en SCK. In beide gevallen hoeven de leerkrachten geen KCS of KCT in te zetten. Bij KCS gaat het om de kennis van leerkrachten over hoe leerlingen denken over het onderwerp, wat ze er van weten en welke (mis)concepten er rond dit onderwerp kunnen bestaan bij leerlingen. KCT is de kennis van leerkrachten over onderwijzen van rekenen-wiskunde, bijvoorbeeld kennis over voor- en nadelen van bepaalde modellen en/of materialen (Ball e.a., 2008; Hill e.a., 2008)
Ball e.a. zijn niet de eersten en niet de enigen die zich hebben bezig gehouden met de wiskundige kennis die leerkrachten nodig hebben. Ma (1999) noemt de hele specifieke manier waarop leerkrachten de wiskunde zouden

moeten begrijpen *Profound understanding* of *fundamental mathematics*. Op basis van een vergelijking tussen Chinese en Amerikaanse leerkrachten concludeert Ma dat het wiskundebegrip van goede leerkrachten breed, diep en volledig is.



figuur 3: categorieën binnen 'mathematical knowledge for teaching'
(uit: Ball, Thames & Phelps, 2008, pag.403)

In Nederland vertoont het werk van Oonk e.a. (2007) overeenkomsten met het model en de subcategorieën die door Ball e.a. ontwikkeld zijn. In de viercomponentenlijm voor professionele gecijferdheid die Oonk e.a. beschrijven, beweegt de door hen beschreven ontwikkeling van studenten zich van links naar rechts door het model.

1. Het verwerven van elementaire rekenvaardigheid, in het bijzonder het oplossen van opgaven uit reken-wiskundemethoden voor de basisschool.
2. Het herkennen van wiskunde in de eigen omgeving en die van kinderen.
3. Het gericht zijn op oplossingsprocessen bij het (laten) oplossen van reken-wiskundeproblemen, onder ander door te reflecteren op eigen en andermans oplossingen.
4. Het inspelen op het wiskundig denken van leerlingen, onder andere door te anticiperen op hun denkprocessen en hen te stimuleren tot niveauverhoging. Bij deze laatste slag wordt het mathematiseren als het ware verstrengeld met het didactiseren.

   Oonk e.a. (2007), pag.15

Het eerste punt valt onder CCK, het tweede punt onder SCK, het derde punt voornamelijk onder SCK en het laatste punt bevat elementen van SCK, KCT en KCS. In de kennisbasis (Van Zanten e.a., 2009) wordt onderscheid gemaakt tussen kennis van rekenen-wiskunde (vergelijkbaar met de *Content Knowledge* van Shulman) en kennis voor onderwijzen van rekenen-wiskunde (vergelijkbaar met de PCK van Shulman). Kool (2008) beschrijft in haar onderzoek de professionele wiskundekennis van de leraar basisonderwijs. Zij definieert deze kennis als 'de wiskundige kennis die hij gebruikt als hij binnen zijn beroep wiskundige taken uitvoert'. In haar vraagstellingen onderzoekt zij hierbij zowel de CCK als de SCK van pabostudenten.

3 beroepstaken waarin SCK een rol speelt

Zoals Kool (2008) opmerkt kan het gekunsteld lijken om de wiskundige kennis en vaardigheden van leerkrachten te onderscheiden van didactische en pedagogische kennis en vaardigheden. In de beroepstaken van leerkrachten lopen deze kennis en vaardigheden vaak door elkaar heen. Er zijn echter veel situaties in het beroep van leerkracht waarin de SCK een grote rol speelt.

SCK in de voorbereiding

Tijdens de voorbereiding van lessen is het belangrijk dat een leerkracht de wiskundige bedoeling van de methode begrijpt. Dit komt bijvoorbeeld tot uitdrukking in het kunnen leggen van alle relaties die er in een rijtje handig rekenen zit. In een aantal methoden worden rijtjes met formele opgaven ondersteund door een afbeelding die de formele opgaven weer in een context plaatst. Een leerkracht moet in staat zijn te begrijpen hoe de afbeelding gekoppeld is aan het rijtje formele opgaven. Verder is het voor een leerkracht belangrijk om tijdens de voorbereiding te anticiperen op de oplossingen van kinderen. Daarom moet hij in staat zijn om een opgave zelf op meerdere manieren op te lossen.

SCK tijdens de les

De beide voorbeelden aan het begin van dit verhaal laten zien dat tijdens de les een groot beroep wordt gedaan op de SCK van de leerkracht. Tijdens de les moeten leerkrachten bijvoorbeeld de strategieën die kinderen gebruiken, kunnen begrijpen en vervolgens kunnen waarderen. Zij moeten - vaak heel snel - kunnen beoordelen of een leerling een fout maakt en zo ja, waar de oorsprong van de fout ligt. Bij de begeleiding van kinderen is het vaak van belang dat een leerkracht vlot nieuwe voorbeelden kan ver-

zinnen, bijvoorbeeld om een cognitief conflict te veroorzaken.
Tijdens de nabespreking zijn goede leerkrachten in staat om de uitleg van een kind wiskundig correct te representeren. Niveauverhoging tijdens de interactie wordt vaak bewerkstelligd doordat de leerkracht vragen stelt over te ontwikkelen wiskundige verbanden, overeenkomsten en verschillen. Daarvoor moet de leerkracht in staat zijn om te onderscheiden welke aanzetten tot wiskundige ideeën er in het werken en denken van kinderen als het ware 'verborgen' zit.
Kinderen die vastlopen in de formele fase kunnen ondersteund worden doordat de leerkracht de opgave weer in een context plaatst of - door het kind - laat plaatsen. Daar waar het in de wiskunde meestal gaat om een proces van steeds verder gaande formalisering, moet een leerkracht dus ook heel goed in staat zijn om de omgekeerde beweging te maken. Bovendien moet een leerkracht de wiskunde op een dusdanig diepgaand niveau begrijpen dat hij/zij in staat is te reageren op zeer diverse 'waarom' vragen van kinderen.

SCK na de les

In de analyse van het leerlingenwerk, wat zich meestal na schooltijd afspeelt, speelt de SCK ook een grote rol: het gaat hier om het begrijpen en waarderen van oplossingen van kinderen.

Bovenstaande beroepssituaties geven een indruk van SCK, de opsomming is zeker niet volledig en staat niet vast. Volgens Speer en Wagner (2009) is er sprake van een productief verband tussen SCK en PCK. Hoe vaker een leerkracht goed luistert naar oplossingen van kinderen en wiskundig probeert te doorgronden, hoe vaker een leerkracht nadenkt over de wiskundige verbanden die bestaan tussen de oplossingen van kinderen des te meer zijn PCK groeit. Een leerkracht met weinig ervaring zal bij het anticiperen op oplossingen van kinderen meer moeten steunen op SCK, terwijl een leerkracht met veel ervaring daarbij ook steunt op de kennis over de leerlingen (KCS).

4 ontwikkeling van een SCK-toets

In het kader van een langlopend professionaliseringstraject van een volledig schoolbestuur van elf basisscholen (Dolk e.a., 2010) werd een SCK-toets ontwikkeld. Het doel van deze toets was om leerkrachten ten opzichte van elkaar te kunnen positioneren met betrekking tot hun SCK. Op basis van deze positionering kan vervolgens bekeken worden of er relaties zijn te vinden tussen de SCK van een leerkracht en de mate waarin het een leerkracht lukt om reken-wiskundeonderwijs met veel constructieruimte (Dolk, 1997) te realiseren. In het professionaliseringstraject is gekozen voor een groeperingsvorm waarin leerkrachten die les geven aan dezelfde leeftijdsgroep samen bijeenkomsten volgen. De bijeenkomsten van de leerkrachten van groep 4 vonden plaats in de tweede helft van het schooljaar. De inhoud van het scholingstraject werd daarom voor een groot deel gericht op vermenigvuldigen. Omdat het onderzoek naar het verband tussen SCK en het leerkrachtgedrag plaatsvond in deze groep, werd besloten om de toetsinhoud te beperken tot vermenigvuldigen en delen.

In de ontwikkeling van de toets is voortdurend heen en weer gependeld tussen de beroepssituaties waarin SCK een rol speelt, theorieën over vermenigvuldigen en delen (Buys, 2008; Fosnot & Dolk, 2001; Treffers & De Moor, 1990), methodemateriaal en de inschatting van de SCK van leerkrachten. Bij het bestuderen van de theorieën vroeg de ontwikkelaar zich af welke onderdelen in welke beroepssituaties een rol spelen en in hoeverre die een beroep doen op SCK.

Tijdens het bestuderen van methodemateriaal probeerde de ontwikkelaar zich te verplaatsen in de leerkracht die de methode gebruikt, hoe de kinderen hiermee aan de slag zouden gaan en het beroep dat dit zou doen op de SCK. Bij het overdenken van beroepssituaties die een beroep doen op SCK, werd het bestudeerde domein en methodemateriaal weer in de overwegingen mee genomen. Op basis van deze bestudering ontstonden er vragen die schriftelijk getoetst konden worden en vragen die door middel van een interview werden afgenomen. Dit onderscheid tussen een schriftelijk en een mondeling deel werd gemaakt omdat het toetsen van een deel van de SCK eigenlijk alleen in hele open vragen getoetst kan worden, terwijl dat voor een ander deel van SCK ook schriftelijk kan gebeuren. Het volgende voorbeeld kan daartoe ter illustratie dienen.

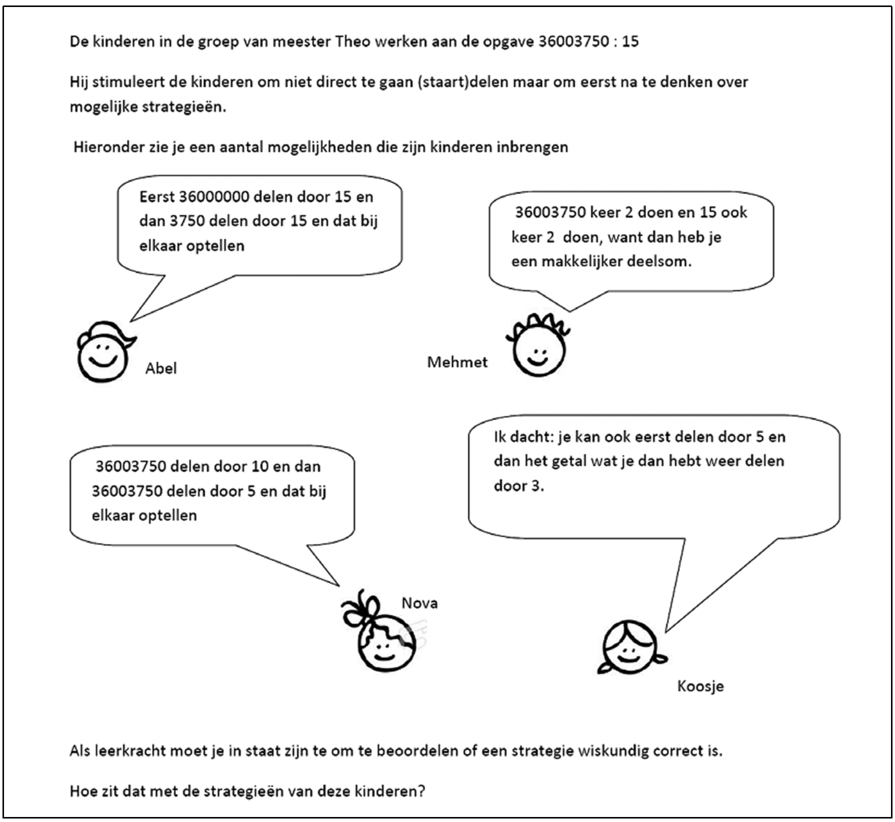
Is dit een vermenigvuldigsituatie?

WEL / NIET

Bij WEL: schrijf de vermenigvuldiging op die bij deze situatie past.

figuur 4: een van de (sub)vragen uit de schriftelijke SCK-toets

Een goede leerkracht herkent de wiskunde in de eigen omgeving en die van de kinderen (Garssen, 2007a; Garssen, 2007b; Oonk e.a., 2007). De vaardigheid en kennis die je inzet om dit te kunnen, valt onder SCK. Voor de herkenning is immers geen KCS of KCT nodig. Op het moment dat in een schriftelijke toets gevraagd wordt om een situatie te beoordelen op de vraag of dit een vermenigvuldigsituatie is, levert dit veel informatie op over de SCK. De leerkracht die ontkennend antwoordt op de vraag of een prijssticker met gewicht en prijs per gewicht (fig.4) een vermenigvuldigsituatie is, zal in de supermarkt zeker de mogelijkheden van zo’n prijssticker niet zien. Toch is het de vraag of leerkrachten die dit in een schriftelijke toets wel als vermenigvuldigsituatie beoordelen zo’n prijssticker ook als rijke vermenigvuldigsituatie zullen herkennen op het moment dat ze (met kinderen) een supermarkt ingaan. Dit laatste vraagt een veel actiever gebruik van SCK. In het vervolg van dit artikel zal verder worden ingegaan op de ontwikkeling van het schriftelijke deel van de toets.



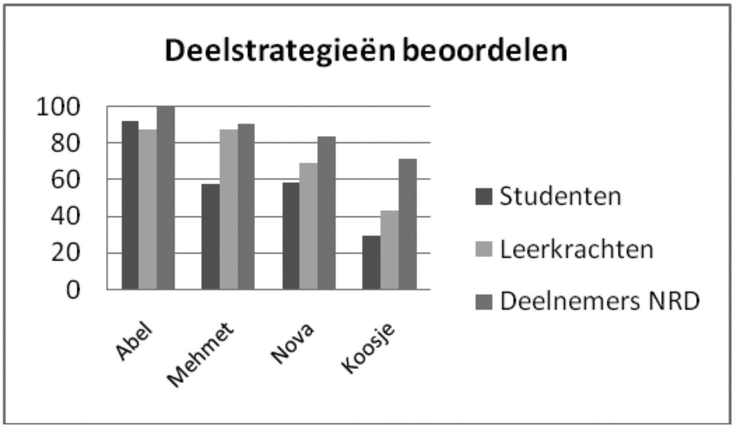
figuur 5: deelstrategieën beoordelen

De ontwikkelde - schriftelijke - vragen werden voorgelegd aan vier tweedejaars pabo-studenten. Hen werd gevraagd om hardop te denken tijdens het maken van de vragen. Op basis van deze bevindingen werden de vragen bijgesteld en voorgelegd aan vier andere tweedejaars pabo-studenten. Nadat de vragen zo waren vorm gegeven dat ze schriftelijk voldoende duidelijk waren en dat de tweedejaars studenten de vraag zo interpreteerden als de ontwikkelaar bedoeld had, werden alle vragen schriftelijk voorgelegd aan dertig derdejaars pabo-studenten. Tijdens het maken observeerde de ontwikkelaar. De antwoorden werden nagekeken en bij vijf van de studenten werd navraag gedaan naar de manier waarop zij de opgaven geïnterpreteerd hadden. Na bijstelling werd de toets afgenomen onder honderdendrie derdejaars pabo-studenten. Het voorbeeld uit de schriftelijke toets illustreert dit proces van vraagontwikkeling (fig.5).
Vanuit de beroepssituatie waarin een leerkracht in staat moet zijn om te kunnen reageren op verschillende oplossingen van kinderen ontstond de gedachte om een vraag te maken rond verschillende deelstrategieën. Vanuit het beeld van de kennis van leerkrachten werd de strategie van Koosje ingevoegd. Vanuit de bestudeerde literatuur waarin foutieve strategieën van kinderen werden besproken ontstond de strategie van Nova. De strategie van Abel is een algemeen toegepaste strategie (te vergelijken met CCK). De strategie van Mehmet is een veel in methoden voorkomende en voor de hand liggende handige rekenstrategie.
De getallen in de deling zijn met opzet zo groot omdat er om beoordelingen van strategieën wordt gevraagd. Kleinere getallen zouden waarschijnlijk eerder leiden tot ‘gewoon even narekenen’.

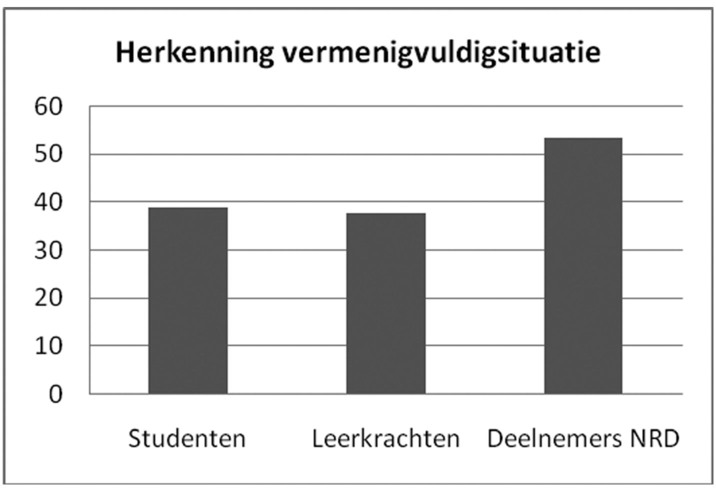
In de eerdere versies van deze vraag waren de verhalen van de kinderen veel langer. In het uitproberen van de vragen met tweedejaars pabo-studenten is met hen samen gezocht naar korte, krachtige omschrijvingen in de spreekwolken die toch de essentie van de strategie bleven aangeven. Naar aanleiding van de tweede ronde met tweedejaarsstudenten zijn er aanpassingen gedaan in de lay-out. In de testsetting met dertig derdejaars studenten bleek de tijdlimiet nog te ruim. Het gevolg was dat studenten niet reageerden zoals in de beroepssituatie (direct), maar uitgebreid de tijd namen om de hele grote deling op vier manieren uit te gaan voeren. Naar aanleiding van die ervaring werd besloten de tijd te verkorten.

5 afname van de schriftelijke SCK-toets

De toets werd afgenomen onder honderdendrie derdejaars pabo-studenten van vijf pabo’s van Stenden hogeschool (twee verschillende curricula) en van de Marnix academie. Hoewel de toets vooral bedoeld was om de leerkrachten van groep 4 ten opzichte van elkaar te kunnen positioneren, is het interessant om te weten hoe deze leerkrachten zich verhouden ten opzichte van hun collega's. Ten tijde van het schrijven van dit artikel wordt de toets nog afgenomen onder alle leerkrachten van het bestuur, maar zijn al de gegevens bekend van 85 leerkrachten.



figuur 6: grafiek geeft het percentage aan dat de strategie correct beoordeeld. Dus: bijna 60 procent van de studenten zegt dat Nova's strategie niet klopt, bijna 30 procent vindt dat Koosjes strategie correct is.



Studenten *n* = 103, Leerkrachten *n* = 85, Deelnemers NRD *n* = 31

figuur 7: grafiek geeft het percentage aan dat de prijssticker als vermenigvuldigsituatie herkent en daar een vermenigvuldiging van gewicht × prijs/gewicht bij geeft.

Tijdens de 'Nationale Rekendagen' (NRD) konden bezoekers op vrijwillige basis vijf van de vragen maken. Hier deden 31 leerkrachten aan mee. Volledige analyse van de data moet op het moment van schrijven nog plaatsvinden. De twee voorbeelden die in dit artikel worden besproken, leveren het beeld op dat de NRD bezoekers beter scoren op het beoordelen van alle deelstrategieën en het herkennen van de prijssticker als vermenigvuldigsituatie (fig.6 en 7). Hierbij moet worden opgemerkt dat bezoekers aan de NRD op zichzelf al vaak meer dan gemiddeld geïnteresseerd zijn in rekenen. Bovendien was deelname aan de test op vrijwillige basis. Opvallend is dat zowel derdejaars pabo-studenten als leerkrachten de strategie van Abel, die eigenlijk basaal is voor het delen in de huidige reken-wiskundemethoden, niet allemaal als een goede strategie waarderen. Het percentage pabostudenten dat de strategie van Mehmet (deler en deeltal met twee vermenigvuldigen) als foutief beoordeeld is ruim 40 procent. Een even hoog percentage als studenten die vinden dat de aanpak van Nova (delen door 15 is hetzelfde als delen door 10 + delen door 5) prima is. Een kleine 30 procent van de studenten weet de strategie van Koosje (delen door 15 is hetzelfde als delen door 5 en vervolgens delen door 3) op zijn waarde te schatten. De leerkrachten weten deze strategieën iets (Nova, Koosje) tot veel (Mehmet) beter te waarderen. In de herkenning van de vermenigvuldigsituatie in de prijssticker scoren leerkrachten en pabo-studenten ongeveer gelijk: nog geen 40 procent herkent de prijssticker als een vermenigvuldigsituatie en kan er een passende vermenigvuldiging bij geven.

6 slot

De schriftelijke toets lijkt interessante gegevens op te leveren over een deel van de SCK van derdejaars pabo-studenten en zittende leerkrachten. Verdere analyse van de toetsgegevens zal hier nog meer informatie over gaan bieden. De SCK-toets is ontwikkeld om leerkrachten ten opzichte van elkaar te kunnen positioneren met betrekking tot hun SCK. Het doel van de toetsontwikkeling is uiteindelijk om te onderzoeken of en hoe de SCK van een leerkracht een rol speelt in het vormgeven van goed reken-wiskundeonderwijs. Dit laatste is onderwerp van het vervolg van dit lopende onderzoek.

literatuur

Ball, D.L. & H. Hill (2009). The curious -and crucial -case of mathematical knowledge for teaching. *Phi Delta Kappan, 91*(2), 68-71.

Ball, D.L., H. Hill & H. Bass (2004). *Knowing and using mathematical knowledge in* *teaching: Learning what matters*. Paper presented at the Twelfth Annual Conference of the South African Association for Research in mathematics, Science and technology Education (SAARMSTE), South Africa: Durban.

Ball, D.L., H. Hill & H. Bass (2005). Knowing mathematics for teaching. Who knows mathematics well enough to teach third grade, and how can we decide? *American Educator, Fall,* 14-17, 20-22, 43-46.

Ball, D.L., M.H. Thames & G. Phelps (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education, 59*(5), 389-407.

Buijs, K. (2008). *Leren vermenigvuldigen met meercijferige getallen*. Utrecht: Universiteit Utrecht (proefschrift).

Dolk, M. (1997). *Onmiddellijk onderwijsgedrag. Over denken en handelen van leraren in onmiddellijke onderwijssituaties*. Utrecht: WCC.

Dolk, M., F.B. Garssen & N. Figueiredo (2010). *Op weg naar een lokale theorie over professionalisering van leerkrachten* (ongepubliceerd manuscript).

Fosnot, C.T. & M.Dolk (2001). *Young mathematicians at work. Constructing multiplication and division*. Portsmouth: Heinemann.

Garssen, F. (2007a). Geinspireerd gecijferd. In: *Inspiratie, leren en onderwijzen. Een zoektocht naar inspiratie*. Emmen: Hogeschool Drenthe.

Garssen, F.B. (2007b). Gecijferdheid: Vraag jezelf eens wat af! *Reken-wiskundeonderwijs: onderzoek, ontwikkeling, praktijk, 26*(1), 12-18.

Hill, H., D. Ball & S. Schilling (2008). Unpacking pedagogical content knowledge: Conceptualizing and measuring teachers' topic-specific knowledge of students. *Journal for Research in Mathematics Education, 39*(4), 372-400.

Hill, H.C., L. Sleep, J.M. Lewis & D.L. Ball (2007). Assessing teachers' mathematical knowledge: What knowledge matters and what evidence counts? In: F.K. Lester (ed.). *Second handbook of research on mathematics teaching and learning*. Reston, VA: National council of teachers of mathematics, 111-115.

Kool, M. (2009). De professionele wiskundekennis van de basisschoolleraar. In R. Keijzer & V. Jonker (eds.). *Over de muurtjes heen kijken*. Utrecht: Freudenthal Instituut, 54-64.

Ma, L. (1999). *Knowing and teaching elementary mathematics: Teachers' understanding of fundamental mathematics in China and the United States*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

Oonk, W., M. van Zanten & R. Keijzer (2007). Gecijferdheid, vier eeuwen ontwikkeling. Perspectieven voor de opleiding. *Reken-wiskundeonderwijs: onderzoek, ontwikkeling, praktijk, 26*(3), 3-18.

Shulman, L.S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher, 15*(2), 4-14.

Speer, N.M. & J.F. Wagner (2009). Knowledge needed by a teacher to provide analytic scaffolding during undergraduate mathematics classroom discussions. *Journal for Research in Mathematics Education, 40*(5), 530-562.

Treffers, A. & E. de Moor (1990). *Proeve van een nationaal programma voor het reken-wiskundeonderwijs op de basisschool. Deel 2 basisvaardigheden en cijferen*. Tilburg: Zwijsen.

Zanten, M. van, F. Barth, J. Faarts, A. van Gool & R. Keijzer (2009). *Kennisbasis rekenen-wiskunde voor de lerarenopleiding basisonderwijs*. Den Haag: HBO-raad.