Ideeën, handelingen en symboliseringen van leerlingen als leerinhouden

Jean-Marie Kraemer[1]
Cito, Arnhem

1 inleiding

Dit artikel is een bewerking van de plenaire lezing die op de Panama-conferentie van 2009 is gehouden.[2] Het idee om het betoog in deze vorm te bewerken is ingegeven door lopende werkzaamheden van de unit ‘Ontwikkeling & Onderzoek Rekenen-Wiskunde Primair Onderwijs’ van het Cito die in een eerdere bijdrage in het tijdschrift ‘Reken-wiskundeonderwijs: onderzoek, ontwikkeling, praktijk’ zijn beschreven (Kraemer, 2009a). Een van de ondernomen vernieuwingen betreft de afstemming van de toetsen van het Leerling- en onderwijsvolgsysteem (LOVS) op de behoeften van de verschillende groepen ‘speciale’ leerlingen en de ontwikkeling van een aanvullende evaluatieomgeving voor de groep zeer moeilijke lerende kinderen (Visser, 2008). De opdracht om aan te sluiten bij de specifieke behoeften van leerlingen en leraren uit het speciaal (basis)onderwijs en tegelijkertijd te proberen de voortgang van deze leerlingen met die van het reguliere onderwijs te vergelijken, verscherpt de meer algemene vragen die ik in mijn lezing heb aangestipt. Ze komen in deze bewerking in de bredere context van het primair onderwijs en meer in samenhang met elkaar aan de orde:

– Wat is de primaire functie van toetsen, of het nu om het LOVS gaat of de voortgangstoetsen van de gebruikte rekenmethoden?
– Wie bepaalt de norm bij het stellen van referentieniveaus, indicatieniveaus, minimumdoelen, en dergelijke?
– Wat leren we nu van toetsen? En: wat zouden van evalueren kunnen leren?
– In hoeverre belemmeren actuele onderwijspolitieke ontwikkelingen, denkbeelden over de omgang met verschillen, en belemmeren lokale onderwijstheorieën en vormkenmerken van de gebruikte onderwijsmethoden veranderingen die de leercondities zouden kunnen verbeteren?

Deze bewerking van de gehouden lezing is als volgt gestructureerd.
In paragraaf 2 richt ik de aandacht op wat we als kern van leren (hoofd)rekenen kunnen beschouwen, wat Gravemeijer (2005) het ‘mathematiseren van de eigen wiskundige acti-

viteit' noemt. In het verlengde hiervan geef ik beknopt aan hoe we het voortschrijden in kennis en bekwaamheid in de loop van dit proces met het instrumentarium van het LOVS in kaart proberen te brengen en expliciteer onze bedoelingen daarbij (paragraaf 3). Dit geeft aanleiding om stil te staan bij de kwestie van de normen bij het stellen van referentieniveaus en minimumdoelen (paragraaf 4). Dan komen de vijf uitdagingen aan de orde die zich aandienen als we ons, op alle fronten, meer door de denkbeelden, handelingswijzen en symboliseringen van leerlingen laten leiden (paragraaf 5). In een korte terugblik wordt het geheel tenslotte binnen het thema van de 27ste Panama-conferentie geplaatst.

2 mathematiseren van de eigen wiskundige activiteit

Evenals in de lezing, beperk ik mijn reflectie tot leren en onderwijzen in het domein van de gehele getallen en de operaties en zal vooral de aftrekhandelingen als voorbeeld nemen. In de woorden van Freudenthal (1984b), 'dienen de getallen en bewerkingen en het tellen er allereerst toe, zekere verschijnselen, die met hoeveelheden te maken hebben, te ordenen'.[3] Dit duidt het mathematiseren aan, de organiserende activiteit die wiskunde zo typisch maakt. Ik grijp terug op de reflectie van Gravemeijer en Buijs over deze kwestie, naar aanleiding van de honderdste geboortedag van Freudenthal om te expliciteren waar het, vanuit deze organiserende activiteit bekeken, bij leren (hoofd)rekenen in de kern om gaat. Onderstaand citaat is Freudenthals bekendste typering van de wiskunde als activiteit:

> It's an activity of solving problems, of looking for problems, but it is also an activity of organizing subject matter. This can be matter from reality which has to be organized according to mathematical patterns if problems from reality have to be solved. It can also be a mathematical matter, new or old results, of your own or of others, which have to be organized according to new ideas, to be better understood, in a broader context, or by an axiomatic approach. (Freudenthal, 1971, pag.413-414)

In zijn onderwijstheorie maakt Treffers (1987), vanuit deze typering, onderscheid tussen horizontaal en verticaal mathematiseren:

> De horizontale mathematisering bestaat uit het zodanig schematiseren van het gebied, dat het probleemveld met mathematische middelen aangepakt kan worden. De vervolgactiviteiten die betrekking hebben op de mathematische verwerking, de probleemoplossing, de generalisatie van de oplossing en de verdergaande formalisering, worden met de termen verticale mathematisering aangeduid. (Treffers, 1987, 79, cursief in het origineel)

Hierover nadenkend stelt Gravemeijer (2005) nu voor om de verticale component in tweeën te splitsen, om zo meer recht te doen aan de organisatie van *mathematical matter,* het wiskundig organiseren van de eigen wiskundige activiteit. Dit leidt dan tot de volgende driedeling:

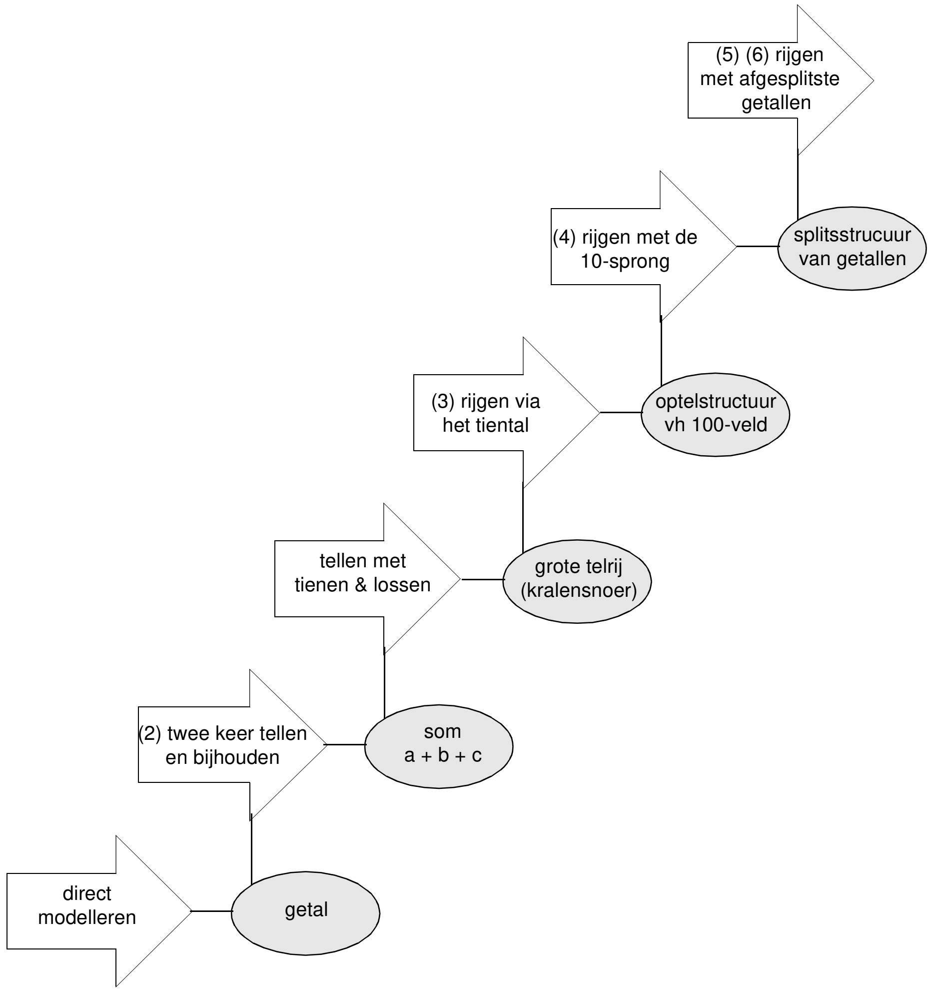
– het horizontaal mathematiseren als het schematiseren van een probleem uit de reële wereld om het wiskundig te kunnen oplossen;

– het uitvoeren van wiskundige bewerkingen dat tot de oplossing leidt;
– het verticaal mathematiseren in engere zin van '*organizing the own or others mathematical matter*'.

Dit verticaal mathematiseren, door de leerlingen zelf en onder leiding van hun leraar, van wat er in de groep wordt gedacht en uitgevonden, is in mijn ogen nu datgene waar het in de kern bij leren (hoofd)rekenen over zou moeten gaan. Buijs (2005) legt in zijn reflectie de vinger op wat we nog niet scherp kunnen waarnemen, omdat we daar nog zo weinig van weten: de verhouding tussen het voortschrijdend inzicht in de getallen, bewerkingen, tellen en de progressieve schematisering van de handelingen bij het steeds verder verkorten, formaliseren en generaliseren van de rekenhandelingen.

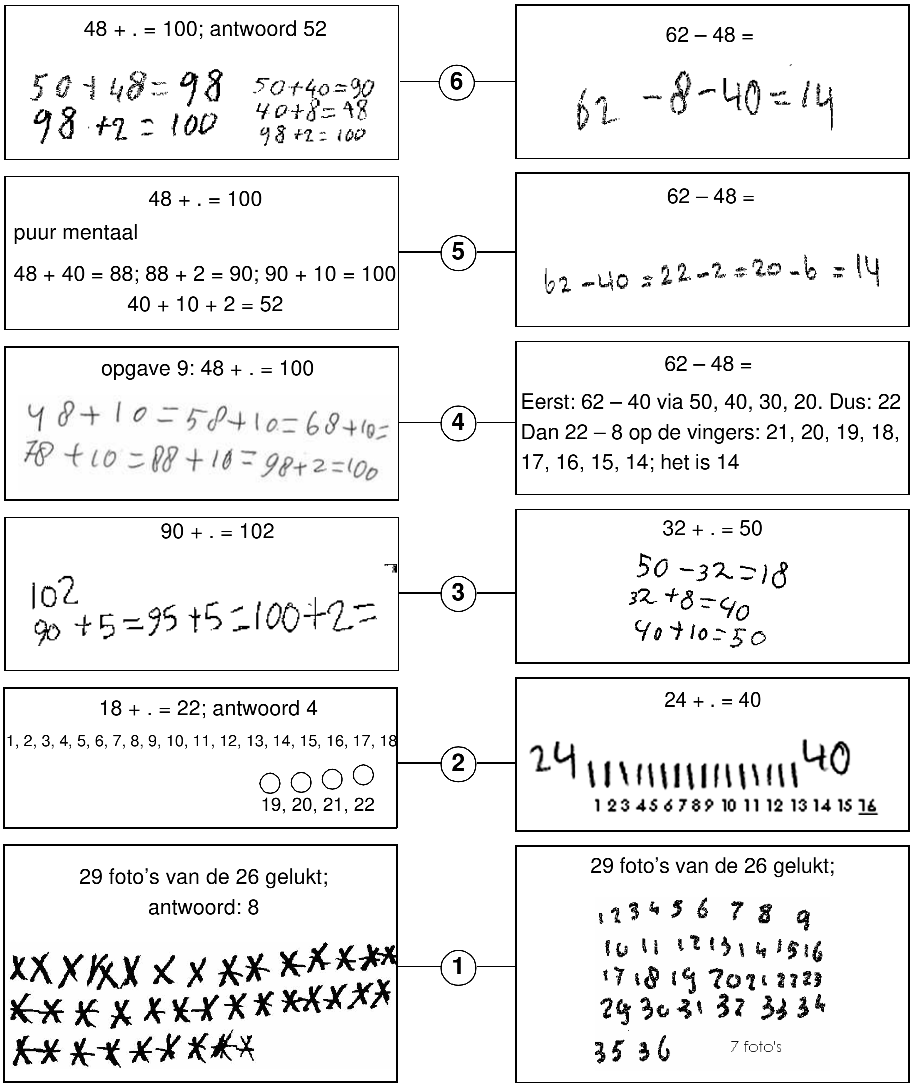
In Freudenthals visie behoren leerlingen de getallen, de bewerkingen en tellen te heruitvinden en steeds verder te organiseren, zoals deze objecten en handelingen als zodanig tot stand zijn gekomen. Hij duidt dit proces aan als een 'wisselspel tussen vorm en inhoud' dat 'steeds beter georganiseerd gezond verstand' teweegbrengt. Uitgaande van de beschrijving van Freudenthal,[4] heb ik voor deze bewerking van de lezing geprobeerd dit wisselspel aan de hand van geobserveerde oplossingswijzen van leerlingen in kaart te brengen. Het resultaat van figuur 1 geeft mijns inziens de wisselwerking weer waar Buijs op doelt, tussen het begripsaspect van de operaties aan de ene kant en het handelingsaspect aan de andere kant. Dit laat zich mijns inziens als volgt beschrijven:

– Het uitbeelden van optel- en aftrekproblemen met verzamelingen objecten levert het mentale object 'getal' op, als product van tellen met één. Dit vinden we terug in de oplossingen van zorgleerlingen die de totale hoeveelheid van een probleem met opeenvolgende teltallen symboliseren, zoals in oplossing 1 van figuur 2. Er is een fundamenteel verschil met direct modelleren, zoals kleuters en leerlingen van groep 3 dat aanvankelijk doen: zorgleerlingen die zo handelen weten wel dat de opgave gaat over twee deelhoeveelheden die samen een overkoepelende hoeveelheid vormen. Ze structureren daarom één reeks turven of teltallen, terwijl leerlingen aanvankelijk drie hoeveelheden moeten maken en tellen.
– Dit besef van deel-geheel-relatie brengt de leerling op het idee om direct, vanaf de bekende term van de opgave (als mentaal aantal) door te tellen (oplossingen 2). Het mentale object 'som' is het product van de reflectie. Het besef dat elk natuurlijk getal (behalve 1) de som is van twee andere getallen verklaart waarom doortellen werkt zoals het werkt en geeft de garantie dat deze nieuwe rekenvorm wiskundig correct en be-



figuur 1: wisselspel tussen vorm en inhoud als progressieve conceptualisering en schematisering van aftrekken als mentale handeling

trouwbaar is.



figuur 2: geobserveerde oplossingswijzen van negen- en twaalfjarige BaO- en BSO-leerlingen[5]

– Van hieruit neemt de mathematisering een nieuwe wending, afhankelijk van de nieuwe wiskundige structuren die de leerling, onder leiding van de leraar, uitvindt en leert gebruiken. Zo komt in Nederland eerst het rijgen in het vizier, via het leren tellen met tienen en lossen, het uitbeelden van de uitkomsten van denkbeeldige tellingen met het kralensnoer en de symbolisering van tellingen en telresultaten met sprongen op een lege getallenlijn. Op basis van deze nieuwe denkbeelden over teltallen en aantallen, transformeren kinderen doortellen en terugtellen tot verder springen en terugspringen in de grote telrij (oplossingen 3).

– Door bijvoorbeeld in geldcontexten nader te onderzoeken hoe samenstellen en verdelen met tienen en lossen werkt en bedragen in reeksen van tien euromunten te representeren, ontdekken kinderen de decimale optelstructuur van samengestelde getallen: 48 + 10 = 58, zoals 62 + 10 = 72 en 95 – 10 = 85. Dit inzicht leidt tot het idee om samengestelde getallen direct aan elkaar te knopen, waardoor het springen in de telrij flexibeler en efficiënter wordt (oplossingen 4).
– de reflectie op de oplossingen met de tiensprong om van het uitbeelden op de getallenlijn af te komen, verlegt de aandacht van de lineaire relatie tussen de getallen naar de kardinale relaties, dat wil zeggen naar hoe elk willekeurig getal kan worden ‘gemaakt’ en ‘afgebroken’. Naarmate de leerling meer inzicht in deze splitsstructuren verwerft, wordt de band met tellen en rijgen afgesneden en wordt rijgen veranderd tot afsplitsend optellen en aftrekken (oplossingen 5). Dit leidt, langs dit spoor, uiteindelijk tot de kortste vormen van rijgen (oplossingen 6), als de leerling alle voorwaardelijke basisoptellingen en aftrekkingen heeft geautomatiseerd.

Deze hiërarchische organisatie van opeenvolgende manieren van aftrekken laat zien wat de leerling behoudt en wat hij transformeert, als hij een ‘lagere’ tot de eerstvolgende ‘hogere’ vorm transformeert, gebruikmakend van een hogere, meer overkoepelende representatie van ‘getal’ als mentaal object en ‘aftrekking’ als mentale handeling. Paradigmatisch voor dit aspect van de niveauverhoging is de overgang van lineair, sprongsgewijs aftrekken naar structurerend aftrekken met afgesplitste getallen. De leerling verlaat dan het sequentieel rekenen, maar blijft met gehele getallen rekenen, gebruikmakend van hun dubbel- en vijfstructuur, de splitsingen van 100 en de machten van tien en teruggrijpend op de redeneringen en het gebruik van rekeneigenschappen die eerder in het getalgebied tot 10 en 20 zijn uitgevonden. In die zin vormen de progressieve conceptualisering en schematisering van ‘getal’, ‘optellen’, ‘aftrekken’, ‘vermenigvuldigen’ en ‘delen’, in mijn visie, de kern van leren rekenen.

3 evalueren om te anticiperen en aan te sturen

Met deze progressieve mathematisering van de wiskundige activiteit in gedachten, duidt Freudenthal ‘leren’ aan als ‘voortschrijden in kennis en bekwaamheid’. De ontwikkeling van het LOVS van het Cito sluit hier naadloos op aan. De ontworpen toetsen zijn bedoeld om vast te stellen in welke mate de leerling, van de ene afname naar de andere, meer inzicht in tientalligheid heeft verworven, de getallen verder heeft georganiseerd en efficiënter (c.q. formeler) met deze getallen kan opereren.
In het verlengde van de schriftelijke of digitale toetsing proberen we ook, via systematisch opgezette diagnostische activiteiten, vast te stellen hoe leerlingen de gebeurtenissen of relaties, die in de voorgelegde opgaven zijn beschreven, wiskundig interpreteren (schemati-

sering als horizontale mathematisering), met welke combinatie van strategie en hoofdrekenmethode ze het onbekende gegeven uitrekenen (bewerking van de numerieke gegevens) en vanuit welke voortschrijdende inzichten in de getallen, tellen en de bewerkingen ze een verworven vorm van rekenen verder (op een hoger niveau van gezond verstand) perfectioneren. Deze tweezijdige evaluatie is gericht op drie doelen:

– beter begrijpen hoe leerlingen hun eigen wiskunde construeren, organiseren en toepassen:
– de ontwikkeling van een empirisch gefundeerd systeem van referenties dat aangeeft welke vormen en inhouden de leerlingen achtereenvolgens uitvinden en leren gebruiken;
– het uitwerken van een ontwikkelingsgerichte manier van plannen, uitgaande van het verworven niveau van gezond verstand en van de inhouden die aan de orde moeten worden gesteld om de eerstvolgende drempel te kunnen nemen.

Evalueren is in die zin primair didactisch bedoeld, om te anticiperen op wat de leerling in principe zou kunnen leren en om zijn leerproces in die richting aan te sturen.

4 wat een leerling inzichtelijk kan leren als onderwijsnorm

De kernvraag bij de planning en sturing van het leerproces is wat de leraar als referentie moet nemen. In de huidige onderwijspolitieke context worden leraren aangespoord om zich op referentieniveaus en minimumdoelen te richten, die door onderwijsexperts worden geformuleerd. In mijn opvatting kleven er twee belangrijke bezwaren aan deze benadering van de normering - in Nederland nog meer dan in de ons omringende landen- dit als gevolg van de autonomie van de scholen. Ik licht dit kort toe.

Het eerste bezwaar is dat men wenselijke kennis en bekwaamheid van de groep zorgleerlingen omschrijft, terwijl we op basis van de meest gangbare evaluatieprocedures vooral de kwantiteit kennis en bekwaamheid en slechts sporadisch en indirect de kwaliteit van het denken en van de reken-wiskundige handelingen meten. Het is dan ook uitermate moeilijk en riskant om voorspellingen te doen over wat subgroepen zorgleerlingen kunnen leren, laat staan over wat het aan inspanning kost om een gewenste niveauverhoging te behalen.
Het tweede bezwaar is dat de wenselijke kennis en bekwaamheid die groepen zorgleerlingen binnen de gekozen termijnen moeten verwerven, los van de behandeling van de leerstof worden geformuleerd om de autonomie van de scholen te kunnen garanderen. Dit is tegenstrijdig met de meest recente inzichten over wat er bij leren en onderwijzen werkt: namelijk niet een specifiek aanbod, een speciale leeromgeving of typische aanpak, maar meer hoe de leraar de behandeling van de leerstof onder de betreffende condities feitelijk initieert, aanstuurt en ondersteunt (Stein et al., 2007).

In elke rekenmethode bakenen minimumdoelen af wat zorgleerlingen minimaal moeten weten en kunnen om de geplande voortgang in de methode te kunnen volgen. Deze beoogde kennis en vaardigheid wordt in de toetsen van de methode gecontroleerd en komt in de diagnostische gesprekken van de methode aan de orde om vast te kunnen stellen welke begrips- en handelingsaspecten van een bepaalde bewerking de voortgang bij rekenen belemmeren of blokkeren. De leraar kan dan de daarvoor ontworpen remediërende activiteiten inzetten om de leerling te helpen meer in de pas van de auteurs van de methode te lopen.

De problemen die zich op SBO-scholen voordoen, met zeer grote verschillen in ontwikkelingsniveau tussen leerlingen van eenzelfde leeftijdsgroep en de nog complexere differentieproblematiek in de scholen waar ZML-leerlingen worden opgevangen, laten de beperkte didactische waarde van minimumdoelen zien. Deze omschrijvingen lossen het probleem van de leraren niet op, omdat er altijd leerlingen zijn die de omschreven verwachtingen niet kunnen waarmaken.
In mijn ogen missen leraren die onder deze omstandigheden werken, in eerste instantie betrouwbare referenties en in tweede instantie voorbeelden van niveauverhogende groepsactiviteiten. Wat het eerste betreft, doel ik op kwantitatieve en kwalitatieve data van het ontwikkelingsproces tussen vier en twaalf jaar in het domein van de getallen en de operaties. De bedoelde voorbeeldactiviteiten zouden zichtbaar en begrijpelijk moeten maken hoe de betrokken leerlingen zichzelf naar een hoger niveau van gezond verstand tillen door samen na te denken over (zojuist) uitgevonden vormen van rekenen en/of aspecten van getallen en operaties. Dit is de reden waarom het Cito zoveel in de observatie en analyse van oplossingswijzen investeert, ter aanvulling van de evaluatie van voortschrijdende kennis en bekwaamheid via de methodeonafhankelijke toetsing van de leerresultaten. Vanuit deze benadering van leren en evalueren geven de verschillende groepen zorgleerlingen zelf aan wat voor hen de norm is, door in toetsen te tonen wat ze weten en kunnen, in gesprekken zichtbaar te maken hoe ze denken en rekenen en, al doende, aan te geven op welk ontwikkelingsniveau ze hun plafond van gezond verstand hebben bereikt.

5 Vijf uitdagingen ter verbetering van progressief mathematiseren

In deze paragraaf laat ik de vijf uitdagingen de revue passeren die tijdens mijn lezing zijn gepresenteerd. Ze worden hier toegespitst op het hoofdthema van de progressieve mathematisering van de eigen wiskundige activiteit en de omgang met verschillen tussen de subgroepen binnen de populatie basisschoolleerlingen. Het gaat om de volgende vijf kwesties:
- evalueren op basis van onderwijsdocumenten en geobserveerde wiskundige producties van leerlingen;
- benaderen van zorgleerlingen als uitvinders;
- stellen van doelen voor de (zorg)leerling die hem op zijn verantwoordelijkheid aanspreken;
- plannen als anticiperen op het effect van activiteiten op de actuele denkbeelden en handelingswijzen van de leerling;

- uitbeelden van relaties, redeneringen en herleidingen als middel om bruggen tussen de leerlingen te slaan.

evalueren op basis van onderwijsdocumenten en wiskundige producten van leerlingen

Omdat het Cito methodeonafhankelijke toetsen moet maken, gebruiken we hoofdzakelijk curriculumdocumenten en het aanbod van de rekenmethode als bron om de te meten kennis en bekwaamheid in concrete toetsbare leerstofinhouden te expliciteren. Deze referenties zijn, wat het curriculum betreft, gekleurd door onderwijspolitieke verwachtingen en, wat de rekenmethode betreft, door het beleid van de uitgever en de eigen invulling van de aangestelde auteursgroep, vanuit de aangehangen visie op en ervaring met het ontwerpen en inrichten van doorgaande lijnen en dwarsverbindingen. Deze referenties bieden, door hun aard, geen garantie dat de beschikbare kennis en bekwaamheid van de leerling wordt getoetst. Zeker niet in het geval van de groepen leerlingen die (extreem) laag en (extreem) hoog op de rekenschaal scoren, omdat deze leerlingen zelden op hun werkelijk niveau van begrip en vaardigheid worden aangesproken en getoetst. Daarom gebruiken we, ter aanvulling, eigen constructies en producties van leerlingen.

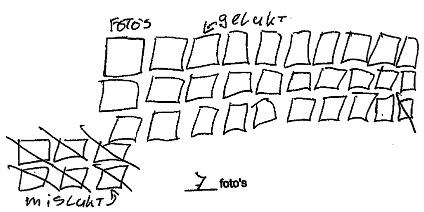
(7) 62 – 48 =

4e rekenpeiling halverwege de basisschool

Eerst 62 – 40 via 50, 40, 30, 20.
Dan is 62 – 40 evenveel als 22
Dan 22 – 8 op de vingers: 21, 20, 19, 18, 17 16, 15, 14.
Dus 14.

(5) 29 van de 36 foto's gelukt.
Hoeveel niet gelukt?

Rekenpeiling 2006 in hetspeciaal basisonderwijs



(3) 60 – 35

4e rekenpeiling halverwege de basisschool

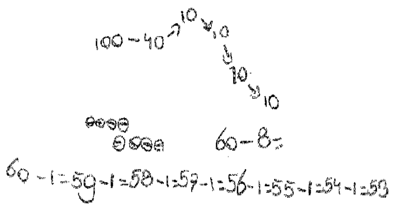
60-59-58-57-56 ... wacht effe. Begint opnieuw. Telt dan structurerend terug door telkens een interval leeg te maken en houdt de stand bij met de vingers van de twee handen.

Van 60, 59, 58 ... 51, 50 naar 49, 48, 47 ... 40 naar 39, 38, 37 ... naar 29, 28, 27, 26, **25**.

Ik doe er steeds 10 af, voor de zekerheid. Van de meester moet het met tientallen. Dat moet niet, maar dat gaat sneller. Voor de zekerheid doe ik dat niet. Ik onthoud dat goed ... in mijn hoofd.

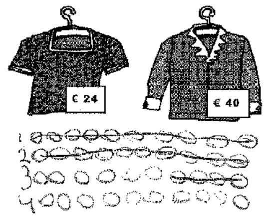
(1) 100 – 48

4e rekenpeiling halverwege de basisschool



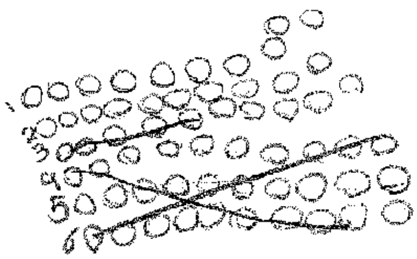
(6) De jas met de korte mouwen is goedkoper
Hoeveel euro goedkoper? (antwoord: 16)

Rekenpeiling 2003 halverwege de basisschool



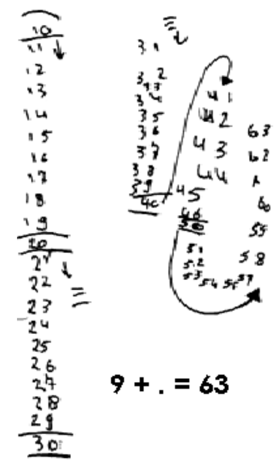
(4) 60 – 35 =

Rekenpeiling 2003 halverwege de basisschool



(2) Willemien is 9 jaar, oma 63.
Hoeveel jaar is oma ouder?

Eerste rekenpeiling in de voormalige LOM- en MLK-scholen

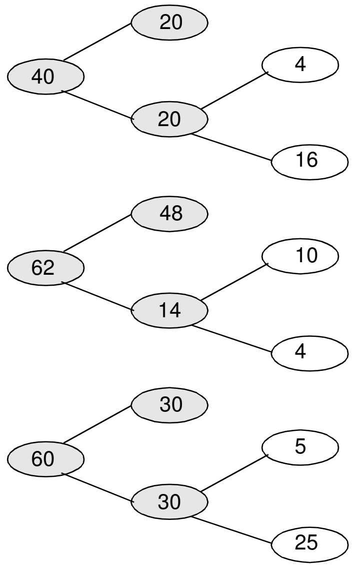


figuur 3: aftrekoplossingen van zorgleerlingen – de klokkenluiders van de basisschool

Het gaat aan de ene kant om de (geïllustreerde) aantekeningen die leerlingen in hun toetsboekjes maken in het kader van de LOVS- en PPON-onderzoeken en aan de andere kant om de uitspraken, redeneringen, tekeningen en mondelinge en schriftelijke herleidingen die kinderen maken tijdens de afgenomen diagnostische interviews die we houden om een brug tussen toetsen en plannen te kunnen slaan (Kraemer, 2008).

Zorgleerlingen die het tempo van de methode niet kunnen volgen, verschijnen in die context als de ‘klokkenluiders’ van de basisschool. Wat ze uitvinden om zich te redden, toont de gaten en grijze vlekken in de doorgaande lijn van de methoden en/of de inadequate sturing en ondersteuning van de leraar. De oplossingen van figuur 3 illustreren wat ik hiermee bedoel. Wat opvalt, is dat het probleem in alle gevallen correct in kaart is gebracht. De handeling van de opgave en/of de relatie tussen de hoeveelheden (c.q. grootheden, getallen) van de opgaven, zijn met gezond verstand geschematiseerd. De zwakte van deze schematiseringen en van de bewerking van de getallen zit in de discrepantie tussen het verworven begrip van de getallen en aftrekken en de toegepaste vorm van aftrekken.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	**10**
11	12	13	14	15	16	17	18	19	**20**
21	22	23	24	25	26	27	28	29	**30**
31	32	33	34	**35**	36	37	38	39	**40**
41	42	43	44	45	46	47	48	49	**50**
51	52	53	54	55	56	57	58	59	**60**
61	**62**	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100



figuur 4: aftrekken via afsplitsen op basis van getalstructuren en
de optelstructuur van het honderdveld

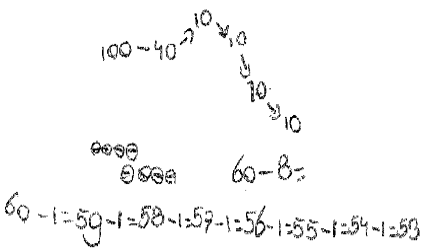
Oplossingen 5 en 6 van figuur 3 zijn paradigmatisch. In beide gevallen weet de leerling meer en begrijpt hij meer van ‘getal’ en ‘aftrekken’ dan wat de uitgevoerde handelingen tot uitdrukking brengen. De samengestelde getallen worden opgevat als nx10 + nx1 en geassocieerd met de tweedimensionale ordening van objecten in reeksen van tien (zie het honderdveld in figuur 4). Dit weerspiegelt een hoog begripsniveau van tientalligheid dat het mogelijk maakt om het verschil in aantal of prijs via de afsplitsing van de getallen uit te rekenen, in plaats van tellend met tientallen. Als 60 evenveel is als 6×10 en 35 evenveel als $3 \times 10 + 5$, dan kan $60 - 35$ niets anders zijn dan 30 en 5 eraf. Daar is geen tekening voor nodig, maar een afbeelding die laat zien hoe 60 met 30 en 35 wordt gemaakt, zoals 40 met 20 en 24 (oplossing 6) en 62 met 48 en 14 (oplossing 7) (zie splitsnotatie in figuur 4).

Maak 65 zoals 85, 25, 45 en 105 zijn gemaakt

85	=	40 + 45
25	=	15 + 10
45	=	25 + 20
105	=	50 + 55
65	=	

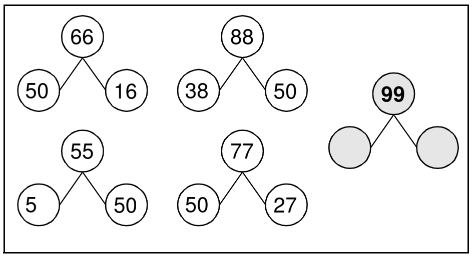
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Jane heeft 100 – 48 zo uitgerekend:



Ze komt uit op 53.
Laat met sprongen op een getallenlijn zien dat 52 het juiste antwoord is en niet 53.

Vijfenvijftig is vijf keer tien en vijf keer één erbij
55 = 5 x 10 + 5 x 1
Teken een cirkel rond dit getal.
Teken ook een cirkel rond deze drie getallen:
1^e getal 9 x 10 + 9 x 1
2^e getal 7 x 10 + 3 x 1
3^e getal 4 x 10 + 7 x 1



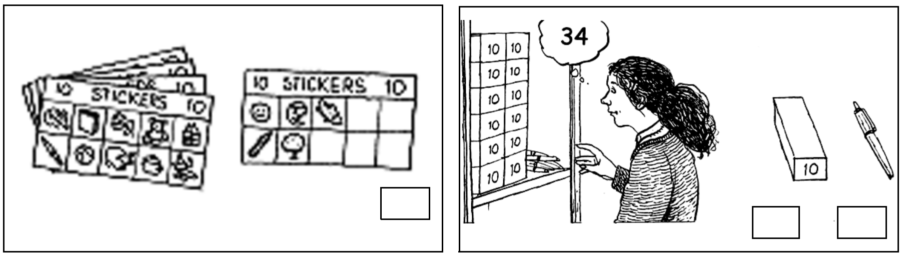
figuur 5: drempelopgaven op basis van eigen constructies van leerlingen

Deze oplossingen maken in die zin de inhouden zichtbaar die een lagere vorm van aftrekken verklaren (in dit geval springen in de telrij, gebruikmakend van de rekenkundige reeksen van het honderdveld als optelstructuur in het getalgebied tot 100) en die de leerlingen op het spoor zetten van een nieuwe, hogere vorm van aftrekken: in dit geval via handig ‘maken’ of ‘breken’ van de getallen van de opgave. Van dergelijke oplossingen kunnen we dan leren ‘drempelopgaven’ te ontwerpen die letterlijk aansluiten bij ‘voortschrijden in kennis en bekwaamheid’, zoals bedoeld door Freudenthal (fig.5).

benaderen van zorgleerlingen als uitvinders

Elke leerling kan zijn gezond verstand tot een bepaald plafond aanscherpen. Leerlingen bepalen in die zin de inspanningsnorm voor de leraar: het hoogst haalbare niveau van kennis en bekwaamheid dat de leerling op eigen kracht kan bereiken. Naarmate we het wisselspel tussen vorm en inhouden, via de constructies en producties van de leerlingen, beter begrijpen, sequentieel ordenen en empirisch valideren, neemt de mogelijkheid toe om de zorgleerlingen scherper vanuit hun eigen denkbeelden, handelingen en symboliseringsmiddelen van het ene niveau van gezond verstand naar het andere te leiden.

In dit perspectief heb ik er eerder voor gepleit om afstand te nemen van het 'medische' model van de leerlingenzorg: het benaderen van de leerling als patiënt die volgens een bepaald protocol moet worden behandeld nadat de oorzaak van de kwaal is vastgesteld. De voorbeelden van figuur 2 en 4 tonen ondubbelzinnig aan dat we structureel anders met zorgleerlingen moeten omgaan: zij doen niet zomaar iets, maar zij schematiseren, redeneren, tellen of rekenen juist vaak met gezond verstand, hoe laag dit niveau van horizontaal en verticaal mathematiseren ook mag zijn. Leerlingen die achterlopen, zijn in die zin geen patiënt maar uitvinders, die in hun eigen uitvindingen zijn vastgelopen, omdat methodeschrijvers (laat staan hun leraren) zich onvoldoende hebben ingeleefd in de problemen die zij kunnen ondervinden langs de rekenweg van de gebruikte methode.



figuur 6: diagnostische opgaven die Sahar heeft opgelost

Sahar, een achtjarige ZML-leerling, is zo'n klokkenluidster. Volgens haar leerkracht kan ze in het getalgebied tot vijftig rekenen. Ze zou dan, zonder hulp, de linker opgave van figuur 6 correct moeten kunnen oplossen. Het tellen loopt anders dan verwacht, maar Sahar komt eerder over als een verstandige leerling die, met een goede begeleiding, zichzelf op een hoger niveau kan tillen, dan als patiënt die voor een telaandoening moet worden behandeld. Op de afbeelding staan de stickers die de juf in haar lade heeft. Hoeveel zijn het er?

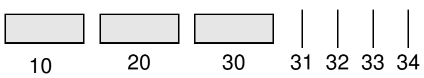
> Sahar zegt eerst: Tien en tien is twintig; twintig en tien is … vijtien…dertig…Oh nee! Dan roept ze: Oh! ... Ze komt op het idee om de vellen te tellen. Ze wijst achter elkaar de vier opgestapelde vellen stickers en telt synchroon 1, 2, 3, 4 en telt door 50, 60, 70, 80, 90, wijzend naar de zegels van het vijfde vel dat ernaast is getekend.
> Ik tel na om van Sahar te horen of ik precies kan tellen zoals zij het doet. Mijn (foutieve) telling wordt goedgekeurd.
> Ik zeg dan dat ik dacht dat het, na veertig, anders ging. Ik leg mijn telwijze voor, wijzend

> naar de getelde dingen, terwijl Sahar nauwlettend mijn telhandelingen volgt:
> ‘eerst de vellen, zoals jij: 1, 2, 3, 4 vellen’;
> ‘dan de zegels: na 40 komt eenenveertig, dan tweeënveertig, dan ….’
> Als ik klaar ben, zegt Sahar op eigen initiatief:
> Er zijn twee manieren: 10, 20, 30, 40… en 10, 20, 30, 40 en 1, 2, 3, …
> Op mijn vraag welke van de twee manieren in dit geval het juiste antwoord geeft, reageert Sahar zonder aarzeling: die van jou!

stellen van doelen voor de (zorg)leerling die hem op zijn verantwoordelijkheid aanspreken

Een cruciaal verschil met de traditionele benadering van zorgleerlingen is dat we, op grond van de voorlopige ontwikkelingsreferenties, doelen voor hen kunnen stellen die ze op hun eigen verantwoordelijkheid aanspreken. Sahar weet blijkbaar dat er twee manieren van tellen zijn en kan deze telwijzen met getalpatronen aanduiden: 10, 20, 30 … als tellen met groepen van tien en 10, 20, 30 … 1, 2, 3 … als tellen met tientallen en eenheden. Aansluitend op het tellen van de stickers, leg ik haar het tweede probleem van figuur 6 voor. Ze moet nu demonstreren hoe ze 34 potloden uit de afgebeelde voorraadkast zou halen. Nu blijkt hoe instrumenteel ze met tientallen en eenheden omgaat. Ze analyseert 34 als 3×10 en 4×10, telt 30 bij 40 op en komt op 70 uit en realiseert zich pas bij het uitspreken van 69 dat ze 34 ‘moest hebben’. Ik herinner haar aan de telling van de stickers en laat haar opnieuw met tien tellen, terwijl ik de dozen symboliseer: 10, 20, 30. Sahar telt, na 30, door met tien (40, 50) en gaat pas de eenheden doortellen, nadat ik haar vraag om de losse potloden die erbij komen te symboliseren (fig.7).

De misconcepties en onjuiste telhandelingen van Sahar wijzen erop dat ze het grote geheim van het positiesysteem aan het ontrafelen is. Ze heeft zich op haar manier het principe van het bundelen eigen gemaakt, weet hoe tellen met groepen van tien gaat en kan zelfs tienvouden in de vorm van een product symboliseren (30 als 3×10). Haar analyse van 34 als $3 \times 10 + 4 \times 10$ toont aan dat ze nog niet heeft begrepen hoe tweecijferige getallen worden samengesteld, wat tellen daarmee te maken heeft, laat staan hoe de eenheden van dergelijke getallen zich tot de tientallen verhouden (positionele orde).

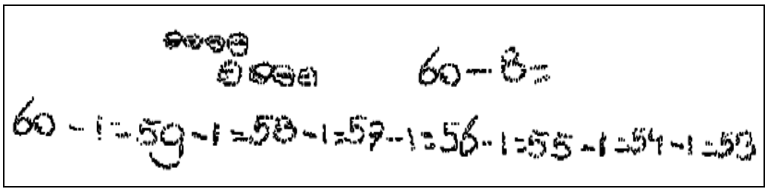


figuur 7

Omdat het haar direct aangaat, gaat Sahar telkens direct in op de initiatieven die ik neem om haar door de valkuilen van haar eigen getallenwereld te helpen. Ze blijft betrokken, denkt constructief mee en aanvaardt in die zin het doel van de opgaven en de verantwoordelijkheden die ik in mijn vragen kenbaar maak.

anticiperen op het effect van een wiskundige activiteit

Alle omslachtige correcte en onjuiste oplossingen van zorgleerlingen maken de inhouden zichtbaar die, voor de betreffende leerling, te snel en meestal op een te formeel niveau onder de aandacht zijn gebracht. Dit geldt zowel voor de misconcepties van Sahar als voor de leerling van onderstaande oplossing, die bij de aftrekking 62 – 48, zestig eraf acht (60 – 8) terugtellend uitrekent en de telstappen met twee keer 4 rondjes bijhoudt (en zich desondanks vergist) (fig.8).



figuur 8

De inhouden waarover beide leerlingen struikelen, zijn verbonden met wat Freudenthal de ‘constitutie’ van tientalligheid noemt in relatie tot de constitutie van aftrekken als mentale handeling. Sahar moet er, via het tellen van grote hoeveelheden, achter zien te komen hoe tweecijferige getallen (kunnen) worden ‘gemaakt’, ‘gebroken’ en ‘geordend’, hoe het volmaken en leegmaken van een interval werkt en wat dat voor aftrekken vanaf een tiental betekent.

Een groepsles uit het pakket ‘Diagnosticeren en plannen’ (Kraemer, 2008) illustreert wat anticiperen op het effect van een activiteit inhoudt, een didactische vaardigheid die cruciaal is voor het plannen van adequate mathematiseringsactiviteiten voor verschillende groepen zorgleerlingen. Het principe is ontleend aan Simons visie op het ontwerpen van leerlijnen (1995; 2001) en komt overeen met Freudenthals idee van gedachte-experiment (1984a): zich in gedachten voorstellen hoe de communicatie tussen en met de leerlingen, onder de eigen regie, tijdens een specifieke opdracht zou kunnen verlopen.

Het probleem dat wordt aangekaart is de voorbereiding van een gecombineerde verjaardag. Rita en haar moeder zijn op dezelfde dag jarig. Rita wordt dit jaar tien en moeder 35. Ze mag geheel zelfstandig beide taarten versieren en koopt hiervoor pakjes met tien kaarsjes erin. Hoe kan nu het denkbeeldig kopen van de kaarsjes en het symboliseren van beide leeftijden het verworven begrip van tweecijferige getallen de actuele manier van tellen en aftrekken beïnvloeden? Dit is de sleutelvraag bij het plannen.

Vermoedelijk zal het kopen en symboliseren van de gekochte dozen geen probleem opleveren, omdat het principe van bundelen in tien bekend is. De symbolisering met sprongen op een getallenlijn kan als belangrijk effect hebben dat leerlingen bewuster gaan nadenken over de relatie tussen de hoeveelheid (één doos van 10 is $1 \times 10 = 10$, twee dozen van 10 is $2 \times 10 = 2\ 0$, …) en de plaats van 10, 20 … op de zelf getekende getallenlijn.

De cruciale vraag voor beide leerlingen dient zich aan bij de uitbreiding van de symbolisering in het interval van 40, om 35 jaar op de lijn te markeren. Zal Sahar in die context inzien dat ze de eenheden met 30 moet combineren? Hoe zal de leerling die met telstappen terugtelt met dit probleem aan de slag gaan? Zal hij, voor hij begint te tekenen, beseffen dat hij vijf kaarsjes zal overhouden omdat hij vijf stuks van de vierde doos gaat gebruiken? Zal hij, vanuit dit besef, 35 in het midden tussen 30 en 40 op zijn lijn plaatsen? Hoe zal hij reageren op de opdracht om 52 en 67 op zijn lijn te plaatsen, denkend aan het uitpakken en prikken van de kaarsjes? Zal hij, door de context, de gekozen getallen en de manier van afbeelden, uit zichzelf op het idee komen om de splitsingen van tien gebruiken? En: hoever zal hij dan nog verwijderd zijn van aftrekken met de vriendjes van tien in plaats van met telstappen, bijvoorbeeld zo:

– 52 is 2 meer dan 50, dus 8 minder dan 60, omdat 50 + 10 = 60 en 2 + 8 = 10:
– 67 is 7 meer dan 60, dus 3 minder dan 70, omdat 60 + 10 = 70 en 7 + 3 = 70.

bruggen slaan via uitbeelden

Figuur 1 en 3 tonen verschillende oplossingen waarin de bedenker de rekenrelatie van de opgave op een meer informele manier representeert dan het merendeel van de groepsgenoten. Zorgleerlingen en ook groepsgenoten die niet zeker van zichzelf zijn, bedenken deze afbeeldingen ‘stiekem’. Ze gummen ook vaak dergelijke representaties uit als ze de antwoorden hebben gevonden, wetend dat ze niet handelen zoals hun leraar dat verwacht. Ze zouden in mijn ogen om twee redenen juist open en bloot en hardop denkend op deze manier de opgaven moeten modelleren, zoals ze tegenwoordig open en bloot hun vingerbeelden op een intelligente manier mogen gebruiken. Op de eerste plaats, omdat deze representaties voor hen en voor gelijkdenkenden betekenis hebben. Op de tweede plaats, omdat ze zelf deze rekenvormen op een hoger niveau kunnen tillen door, onder leiding van hun leraar, de wiskundige inhouden te onderzoeken die achter hun symboliseringen schuilgaat:

– de ‘som’ als optelrelatie, achter de reeks turfjes of teltallen die de totale hoeveelheid representeert;
– de tientallen als ‘lineaire knooppunten’, achter een lange sliert getallen waarin de tientallen zijn gemarkeerd;
– de ‘optelstructuur’ van de getallen tot 100, achter de tweedimensionale representatie van hoeveelheden;
– de ‘splitsstructuren’ van meercijferige getallen, achter de reconstructie van ‘sommen’ en ‘verschillen’ met bekende rekenfeiten (oplossing 6 van figuur 2).

Ontwerpers van onderwijsleermaterialen zouden moeten onderzoeken hoe ze deze typen afbeeldingen in hun leergangen kunnen integreren, opdat zorgleerlingen meer kans krijgen om in hun eigen tempo en op eigen kracht de rekenvormen uit te vinden en de inhouden te onderzoeken die hen op het hoogst haalbare niveau van gezond verstand kunnen brengen. In die zin kunnen we zelf uitgevonden representaties gebruiken om bruggen tussen leerlingen te slaan.

Leerlingen die een vergelijkbaar niveau van gezond verstand hebben bereikt, herkennen de gebruikte wiskundige structuur en symbolen, hoe verschillend ze ook mogen symboliseren. Groepsgenoten die één niveau hoger denken en rekenen, kunnen met hun iets abstractere uitbeeldingen, hen een polsstok[6] aanreiken (Gravemeijer, 1996; 1999) om, al was het maar in die context, kennis te maken met hun manier van kijken en denken.

6 conclusie

'Leren van evalueren - de lerende in beeld bij reken-wiskundeonderwijs', zo luidde de titel van de 27ste Panama-conferentie. De strekking van mijn reflectie was dat we meer van de leerling kunnen leren dan we tot nu toe doen en dat we hiertoe nauwkeuriger en systematischer moeten (leren) observeren en analyseren wat hij zegt en doet bij zijn schematisering en oplossing van opgaven die we in verschillende contexten voorleggen.
In deze bewerking heb ik dit pleidooi toegespitst op de kwestie van de progressieve mathematisering bij leren aftrekken, omdat voorbeelden die we hebben verzameld over hoe leerlingen in die context wiskundig denken zo treffend aangeven wat we kunnen doen om de huidige leer- en onderwijscondities te verbeteren.
Realistisch rekenen ligt op dit moment onder vuur. Ik zie in mijn onderzoeksgegevens echter geen aanleiding om de gemaakte keuze voor realistisch, probleemgericht, interactief rekenen ter discussie te stellen. We moeten wel, in een open en constructief debat, serieus nadenken over hoe de huidige tekortkomingen met betrekking tot vlot formeel rekenen kunnen worden opvangen door (1) meer te 'luisteren' naar wat verstandige (zorg)leerlingen ons hierover zeggen (Van den Heuvel-Panhuizen, 2005) en (2) een betere balans te vinden in de aandacht voor de conceptuele en procedurele aspecten van leren rekenen om de wisselwerking te bevorderen tussen het uitvinden van handelingsvormen en het verklaren van hun efficiency via de reconstructie van de wiskundige structuur waarin ze verankerd zijn. Er staat ons gelukkig nog veel te doen!

noten

1 Met dank aan Tessa Kraemer en Marc van Zanten voor hun redactionele hulp.
2 Beelden van leerlingen als onderwijsinhouden.
3 Zie hoofdstuk 4: Natuurlijke getallen, pagina 92.
4 Zie pagina 13 van de tweede bijdrage van het drieluik 'Wiskunde fenomenologisch', dat in de achtste jaargang van het 'Tijdschrift voor nascholing en onderzoek van het reken-wiskundeonderwijs' is verschenen als Nederlandse bewerking van het eerste hoofdstuk van 'Mathematics Education Revisited'.
5 Deze oplossingen zijn in het kader van drie onderzoeken geobserveerd: de eerste rekenpeilingen in de voormalige LOM-en MLK-scholen (Kraemer, 1995; 1996), de vierde rekenpeiling halverwege de basisschool (Kraemer, 2009c) en de eerste rekenpeiling in de speciale scholen van de basisschool (Kraemer, 2009b).
6 Gravemeijer heeft dit begrip voor het eerst op de Panama-voorjaarsdag van 1996 gebruikt. Raadpleeg Gravemeijer (2002) voor meer informatie hierover.

literatuur

Buijs K. (2005). Wiskunde leren - een kwestie van gezond verstand -. In: H. ter Heege, T. Goris, R. Keijzer & L. Wesker (red.). *Freudenthal 100* (*Reken-wiskundeonderwijs: onderzoek, ontwikkeling, praktijk, 24(3 / Nieuwe Wiskrant, 25(1).* Utrecht: Freudenthal Instituut, 98-105.

Freudenthal (1971). Geometry between the Devil and the Deep Sea. *Educational Studies in Mathematics, 3,* 413-435.

Freudenthal, H. (1984a). *Appels en peren / wiskunde en psychologie.* Apeldoorn: Van Walraven.

Freudenthal, H. (1984b). *Didactische fenomenologie van wiskundige structuren.* Utrecht: OW&OC.

Freudenthal, H. (1990). Wiskundig fenomenologisch; aflevering 2. *Tijdschrift voor nascholing en onderzoek van het reken-wiskundeonderwijs, 8*(2), 11-20.

Gravemeijer, K. (1996). *Polsstok of prothese*. Paper gepresenteerd op de Panama voorjaarsdag 1996.

Gravemeijer, K. (1999). Van concreet naar formeel. In: W. Faes & W. Oonk (red.). *Van Rekenend Nederland voor Fred Goffree. 65/2 Onderwijsverhalen voor pabostudenten.* Groningen: Wolters Noordhof, 62-64.

Gravemeijer, K. (2002). Didactisch gebruik van de lege getallenlijn – een persoonlijk perspectief -. *Reken-wiskundeonderwijs: onderzoek, ontwikkeling, praktijk, 21*(2), 11-23

Gravemeijer, K. (2005). Revisiting ‘Mathematics education revisited’. In: H. ter Heege, T. Goris, R. Keijzer & L. Wesker (red.). *Freudenthal 100* (*Reken-wiskundeonderwijs: onderzoek, ontwikkeling, praktijk, 24*(3) */ Nieuwe Wiskrant, 25*(1). Utrecht: Freudenthal Instituut, 106-113.

Heuvel-Panhuizen, M. van den (2005). Twee ‘didacticikids’ over de lege getallenlijn. In: H. ter Heege, T. Goris, R. Keijzer & L. Wesker (red.). *Freudenthal 100* (*Reken-wiskundeonderwijs: onderzoek, ontwikkeling, praktijk, 24*(3) */ Nieuwe Wiskrant, 25*(1). Utrecht: Freudenthal Instituut, 82-89.

Kraemer, J.M. (1995; 1996). Aanknopingspunten voor de versterking van het aanvankelijk rekenen in LOM- en MLK-scholen. *Tijdschrift voor nascholing en onderzoek van het reken-wiskundeonderwijs. 14*(2), 3-16 en *14(*3), 3-16.

Kraemer, J.M. (2008). *Diagnosticeren en plannen in de onderbouw. Leerling- en onderwijsvolgsysteem.* Arnhem: Cito.

Kraemer, J.M. (2009a). Drempelverleggend leren en onderwijzen met LOVS. *Reken-wiskundeonderwijs: onderzoek, ontwikkeling, praktijk. 27*(3/4), 88-103.

Kraemer, J.M. (2009b). *Balans (40) van het reken-wiskundeonderwijs in het speciale basisonderwijs 3.* Arnhem: Cito.

Kraemer, J.M. (2009c). *Balans (41) van de strategieën en procedures bij het hoofdrekenen halverwege de basisschool. Uitkomsten van de peiling in 2005.* Arnhem: Cito.

Kraemer, J.M., J. Vos & F. Scheltens (2009). *Laat eens zien wat je ziet. Ontwerpspecificatie van een evaluatieomgeving voor leerlingen van cluster 3.* Interne nota SO.2009.001.

Simon, M. (1995). Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. *Journal for Research in Mathematics Education*, *26*(2), 114-145.

Simon, M. (2001). De rol van de leerkracht in het bevorderen van begripontwikkeling. In: R. Keizer & W. Uittenbogaard. *Uit de lengte of uit de breedte - de kwaliteit van het meetonderwijs -.* Utrecht: Panama / Freudenthal Instituut, 71-82.

Stein, M.K., J. Remillard & M.S. Smith (2007). How curriculum influences student learning. In: F. Lester (ed.). *Second handbook of research on mathematics teaching and learning*. Greenwich, CT: Information Age Publishing.

Visser, J. (2008). *Rapportage oriëntatiefase LOVS speciaal (basis)onderwijs.* Interne nota SO.2008.003.