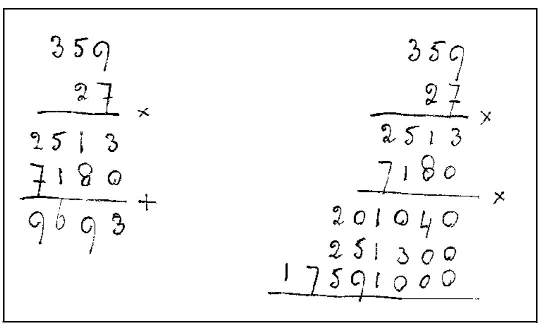
Vijanden worden vrienden
- een beknopte leergang cijferend vermenigvuldigen -

W. Uittenbogaard
FIsme, Universiteit Utrecht

1 inleiding

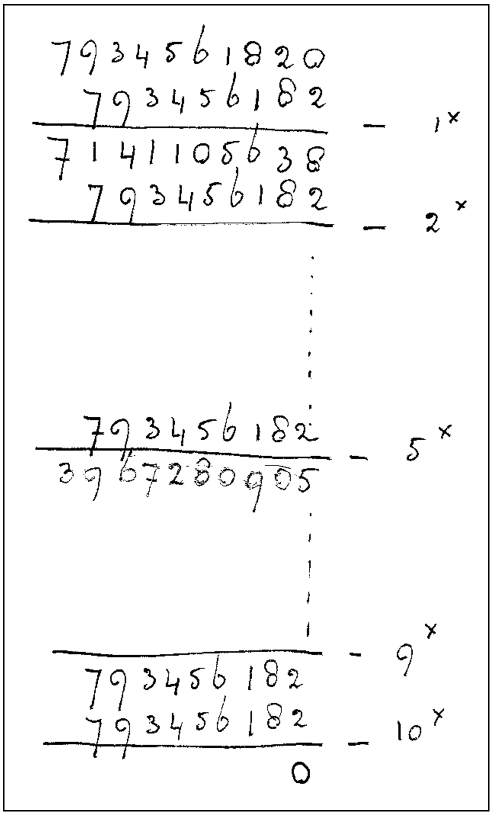
Als kind van negen heb ik cijferend vermenigvuldigen geleerd van meester Pruis. In de vierde klas. Hij was, zoals ik hem mij nu herinner, een ‘echte’ meester. Met veel bewondering denk ik aan hem terug. Hij kon ook zó mooi vertellen. Dat hij later ook met juf Oosterwelder ging trouwen (onze juf van klas één) vonden we schandelijk. Handen af van juf Oosterwelder.
Bij de introductie van het cijferend vermenigvuldigen zei hij: ‘Vandaag komt het grote werk’. Hij deed voor en wij deden na. Ik denk dat hij niks uitlegde. Niet meer dan wat je moest doen. En we deden het na. Ik herinner me nog dat ik mijn vinger opstak en zei, dat er bij mij geen eind aan kwam. Ik ging namelijk de tussenantwoorden van een vermenigvuldiging weer vermenigvuldigen (fig.1). Nee, optellen van de tussenantwoorden volstond. Ik herinner mij dat ik dacht: is dat nou alles.



figuur 1

Later in klas vijf: staartdelen en verder oefenen. Snel en foutloos, daar ging het om. Ik heb de juf van de vijfde of de meester van de zesde nog eens gevraagd waarom je dat allemaal moest leren. ‘Voor later’, was hun antwoord.
In de zesde klas begon de meester heel vaak op maandagmorgen met een willekeurig getal van negen cijfers met als tiende cijfer een nul en daaron-

der, rechts uitgelijnd hetzelfde willekeurige getal. Opdracht: tien keer aftrekken. Daar moest natuurlijk nul uitkomen. Ik herinner mij dat ik al nadacht over manieren om dat slim aan te pakken. Beginnen aan het eind, regels tellen en de nul vast opschrijven. Ook zorgen dat het bij vijf keer nog klopte (fig.2). De meester had hiervoor immers geen antwoordenboekje en ook geen rekenmachine (anno 1959).

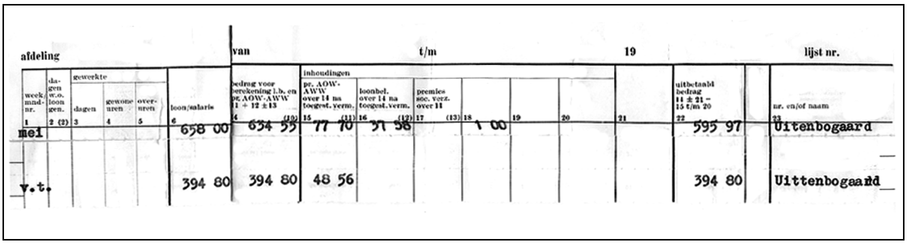


figuur 2

Zo heb ik al die algoritmen geleerd. Door te oefenen. En ik heb ze later ook begrepen. Sommige voorstanders van het inzichtloos leren van algoritmen zeggen ook dat het inzicht gaandeweg komt. Dat gold voor mij. Maar zeker niet voor een groot deel van mijn klasgenoten. Niet dat ik mijn oud-klasgenoten daarop bevraagd heb. Ik ben ze allemaal uit het oog verloren. Maar ik weet het door al mijn ervaringen in het werken met kinderen in de afgelopen 38 jaar. Ook niet door mezelf als maatstaf te nemen: ik heb er later ook in doorgeleerd.

over later

Vergeet niet dat de wereld tot in de jaren tachtig van de vorige eeuw nog van pen en papier was. Winkels, bedrijven, overheid en scholen bedienden zich van administrateurs die goed met pen en papier konden rekenen. Hieronder als illustratie mijn loonstrookje, opgemaakt door de administrateur van de school (met potlood) en overgetypt door de administratie (fig.3). In de jaren tachtig deden computers hun intrede en kwamen ook de eerste rekenmachines beschikbaar (de TI-52 kostte bij introductie ongeveer duizend gulden). Zo'n machientje kost nu niet meer dan tien euro.



afdeling | van | t/m | 19 | lijst nr.

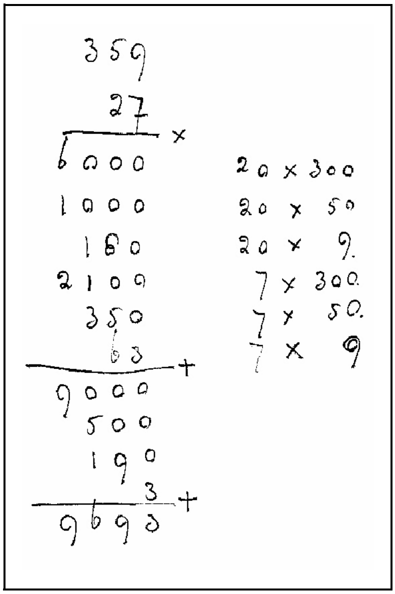
week/mnd-nr. 1	dagen w.o. loon gen. 2 (2)	gewerkte dagen 3	gewerkte gewone uren 4	gewerkte over-uren 5	loon/salaris 6	bedrag voor berekening l.b. en pr. AOW-AWW 11 + 12 ± 13 14 (10)	inhoudingen pr. AOW-AWW over 14 na toegest. verm. 15 (11)	loonbel. over 14 na toegest. verm. 16 (12)	premies soc. verz. over 11 17 (13)	18	19	20	21	uitbetaald bedrag 11 ± 21 − 15 t/m 20 22		nr. en/of naam 23
mei					658 00	634 55	77 70	37 58		1 00				595 97		Uitenbogaard
v.t.					394 80	394 80	48 56							394 80		Uittenbogaard

figuur 3: loonstrookje mei 1971 in guldens, met vakantietoeslag, samen bijna duizend gulden

over algoritmen

Wat is een algoritme? Voor mij een recept, zoals je een cake bakt. Het is dus niet een regel. Zoals 3 + 4 = 4 + 3. Ook geen eigenschap, zoals 24 × 25 = 12 × 50. Hoewel het onderscheid in regels en eigenschappen soms ook arbitrair is. Maar een algoritme is een opeenvolging van regels en voorschriften in een vaste volgorde. In Nederland noemen we het gebruik van algoritmen ook wel cijferen, als het om de hoofdbewerkingen gaat. Dat komt omdat onze traditionele algoritmen gebaseerd zijn op een aanpak van cijfer voor cijfer. Je kijkt niet naar een getal als geheel maar ontleedt dat getal in cijfers (zie ook figuur 1).

Toch zou ik het kolomsgewijs rekenen, zoals dat in alle reken-wiskundemethoden vorm heeft gekregen ook cijferen willen noemen. Niet omdat daar gekozen wordt voor een aanpak van cijfer voor cijfer. Immers, daar wordt niet gekeken naar de waarde van cijfers, maar naar het hele getal. Maar omdat daar ook sprake is van een recept. Eerst dit, dan dat. Wel met de mogelijkheid tot allerlei verkortingen. En met de meest ultieme verkortingen is het weer een algoritme. Misschien dat het ook beter is om het woord cijferen, dat lekker kort is, ook maar net als in de rest van de wereld te vervangen door algoritmische aanpak, in tegenstelling tot wat we handig rekenen noemen of hoofdrekenen (fig.4).



figuur 4

later ...

Is er enige aanleiding om kinderen van nu cijferalgoritmen te leren? Mijn antwoord is nee! Er is voor al die algoritmen geen later. Er is geen enkel beroep waarvoor je die algoritmen foutloos en snel moet beheersen. Voorlopig wel het beroep van leerkracht basisonderwijs en voortgezet onderwijs. Kennis van cultureel erfgoed. En natuurlijk studieobject, ook voor basisschoolleerlingen. Hoe deden mensen dat vroeger? Buitengewoon interessant natuurlijk. Egyptenaren, Grieken, Romeinen, Babyloniers en onze voorgangers in de zeventiende eeuw.

2 wat blijft er dan over en hoe moet het dan wel?

Hieronder een voorbeeld in tien stappen voor cijferend vermenigvuldigen. Min of meer als doel voor alle kinderen. Zouden alle kinderen zover kunnen komen? Ik denk van niet. Zover als kan, met inzicht. En anders maar met een rekenmachientje. Alleen vermenigvuldigen? Nee, dit betoog geldt voor de vier hoofdbewerkingen: optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen. Ik beperk me hier tot het cijferend vermenigvuldigen. Ik zou voor de andere hoofdbewerkingen eenzelfde betoog kunnen opzetten.

Een klein lijstje met kale opgaven:

17 × 237	
10 × 237	
83 × 346	
100 × 346	
1000 × 129	

Alle vermenigvuldigingen met getallen van meer dan één cijfer lijken vijanden.
Zijn er misschien ook vrienden bij?
Ja, de 10 ×, de 100 × en de 1000 ×.
En hoe je dat dan?
Door de nullen te verhuizen.
Dat is nog niet zo eenvoudig in te zien. Waarom is 10 × 237 hetzelfde als 1 × 2370? De geldcontext kan hier heel goed helpen. 10 × 7: 10 briefjes van 7 is hetzelfde als 7 briefjes van 10 en dat is dan weer 1 briefje van 70. En werkt dat dan altijd? Ja, dat is ook een kwestie van oefenen en van uitproberen. Ook dit inzicht groeit langzaam. Al met al leidt dat tot een strategie:

stap 1: vrienden van 10

Nog een klein lijstje:

17 × 239	vijand
10 × 169	vriend van 10
27 × 153	vijand
20 × 60	?
40 × 70	?

Zijn er misschien nog nieuwe vrienden bij?
Ja, die 20 × 60 en die 40 × 70.
En hoe doe je dat dan?
20 × 60 = 2 × 600 = 1200.
Ook hier kan de geldcontext je weer geweldig helpen. Ook hier kun je weer van 20 stapeltjes van 60 er 2 van 600 maken of 6 van 200.
Je kunt 2 × 6 doen plus twee nullen.
En werkt dat altijd? Ja, dat werkt altijd. En waarom dat zo werkt, dat is nog niet zo eenvoudig in te zien.
Mogelijk dat ook kale opgaven als 10 × 2 × 6 × 10 = 2 × 6 × 10 × 10 = 12 × 100 = 1200 kunnen helpen.
Een nieuwe strategie:

stap 2: tafels met nullen

Weer een lijstje:

27 × 473	vijand
100 × 73	vriend van 10

9 ×	34	tafels met nullen
11 ×	27	?
101 ×	27	?

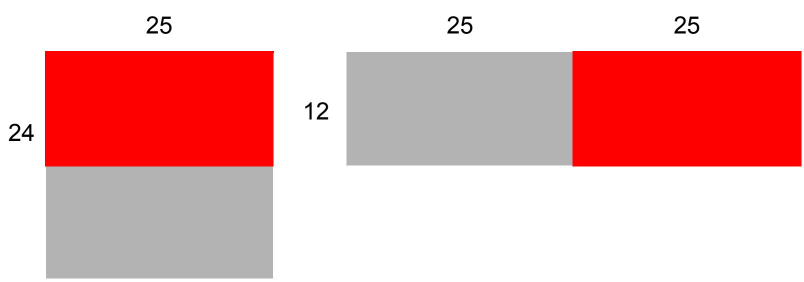
Zijn er nieuwe vrienden bij?
Misschien die 9 × 34 en die 11 × 27.
Hoe doe je dat dan? Je herinnert je misschien de één keer meer en de één keer minder strategie bij het aanleren van de tafels.
9 × en 11 × zijn allebei dicht bij 10 × .
9 × is één keer minder en 11 × één keer meer: 340 – 34 en 270 + 27.
En die kunnen mét m'n hoofd. Dat hoef ik echt niet onder elkaar te zetten.
Nog een strategie:

stap 3: bijna vrienden van 10

Eerst maar eens een poosje oefenen op deze drie strategieën. Herken ik ze ook allemaal?

100 × 69
11 × 54
37 × 83
50 × 90

Goed naar de getallen kijken en dan je strategie bepalen.
Tafelkennis verbeteren en onderhouden!



figuur 5

Maar weer eens een lijstje:

24 × 25	?
12 × 35	?
14 × 55	?

Daar lijkt geen vriend bij, of toch? Hier kun je 12 rijen van 50 maken en dan ook nog eens 6 rijen van 100, dan wordt het een vriend van 10.
Wanneer werkt het en wanneer kun je dat gebruiken? Het komt door de 24 die even is en de 5 in 25 (fig.5).

Weer een nieuwe strategie:

stap 4: halveren en verdubbelen

Na vier stappen hebben we nu een mooi stelletje vrienden:

10 × 37
9 × 47
11 × 67
200 × 60
16 × 35
1001 × 123

Als je goed naar de getallen kijkt, kun je de bijpassende strategie kiezen en zo de uitkomst bepalen. Je zult dit met kinderen moeten oefenen en beoefenen. Dat gaat allemaal niet vanzelf. Posters met de strategieën in de klas en korte oefeningen waarbij je alleen de strategie hoeft te kiezen hielpen mijn leerlingen buitengewoon.

7 × 234

Wat te doen met deze vijand?
Is er iets aan te doen?
Ja hoor,

7 × 200	tafels met nullen
7 × 30	tafels met nullen
7 × 4	tafel

en dan optellen: 1400 + 210 + 28, niet onder elkaar, maar mét je hoofd: 1610 + 28 = 1638 (dit kan met rijgen heel eenvoudig, of anders handig splitsen: 28 + 10 + 1600).
Ik zou niet verder willen gaan dan het vermenigvuldigen van ééncijferige getallen met twee- of driecijferige getallen.[1]

Stap 5: goede kennissen

intermezzo

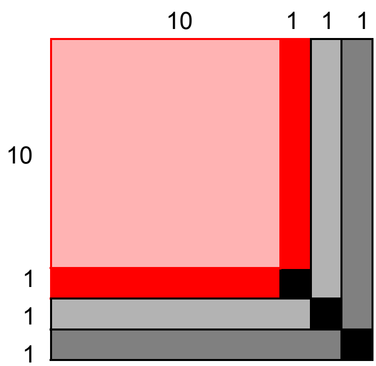
Met deze vijf stappen zouden we ons al heel aardig kunnen redden in het land van vermenigvuldigingen. Misschien niet alle kinderen van de basisschool, maar wel het overgrote deel. Zwakke rekenaars kunnen altijd terecht bij stap 9. Met een groot deel van de leerlingen kunnen nog heel veel stappen gezet worden. En met goede leerlingen nog veel meer. De volgende stappen laten daar iets van zien.

Zijn er nog meer vrienden?
Wat te denken van het volgende rijtje:

10 × 10
11 × 11
13 × 13

....
20 × 20

Een onderzoek waard (fig.6).



$11 \times 11 = 10 \times 10 + 2 \times 10 + 1$

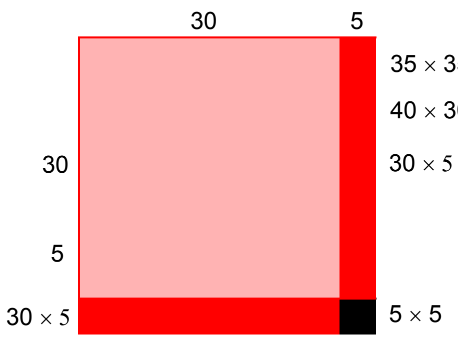
$12 \times 12 = 11 \times 11 + 2 \times 11 + 1$

figuur 6

Probeer de antwoorden te memoriseren en ook het plaatje te begrijpen. 31 × 31 zijn 30 rijtjes van 30 en dan nog een rijtje en een kolom van 30 en dan nog één extra: 900 + 30 + 30 + 1 = 961. Dus:

stap 6: kwadraten zijn ook vrienden

En wat te denken van deze?



$35 \times 35 = 30 \times 30 + 2 \times 5 \times 30 + 5 \times 5 =$

$40 \times 30 + 5 \times 5 = 1225$

figuur 7

5 x 5
15 x 15
25 x 25
35 x 35
. . . . . .
75 x 75
. . . . . . (fig.7)

Niet als algoritme, maar als onderwerp van onderzoek. 75 x 75; 7 x 8 en dan 25 erachter: 5625. Hoe kan dat?
Patronen zoeken, regels vinden, begrijpen en toepassen:

stap 7: 'goeie' vrienden

De één heeft meer vrienden dan de ander.
Nog maar eens een lijstje:

24 x 12,5 = 12 x 25 = 6 x 50 = 300
125 x 840 = 250 x 420 = 500 x 210 = 1000 x 105 = 105.000
3 x 210 = 9 x 70 = 630
3 x 37 = 111, dan weet je ook 6 x 37 en ook 27 x 37 = 999
7 x 11 x 13 = 1001, een raar weetje
54 x 56 = 50 x 60 + 4 x 6; klopt het? altijd?

stap 8: verre vrienden

En de resterende vijanden?

23 x 347 ?
34 x 273

Met een rekenmachientje! En daar in het onderwijs genoeg tijd voor inruimen! Leerlingen vertrouwd maken met het gebruik van een rekenmachine. Zowel met de rekenmachine op de desktop van een computer als met de rekenmachine in elke mobiele telefoon. Daar is nog het nodige werk voor vereist. Sommige machientjes kennen geen regels voor volgorde van bewerkingen, andere wel.
Laat leerlingen in contact komen met allerlei verschillende machientjes, misschien uitgaande van één eenvoudig standaardapparaat in het klaslokaal. Dat kan zowel een apparaatje zijn in 25-voud, als een overhead-rekenmachientje, als een machientje op een elektronisch schoolbord.

stap 9: rekenmachine wordt vriend

Als we een grotere plaats voor het rekenmachientje willen inruimen is het ook noodzakelijk om meer tijd aan schattend rekenen te besteden. Wat is er te zeggen van het antwoord van 78 x 659? Het is minder dan 80 x 700. Dat is 56 met drie nullen. Dus minder dan 56.000. Waarom eigenlijk minder? Het laatste cijfer is een 2, die komt van 8 x 9.
En zo natuurlijk ook met opgaven als: 56,4 x 107,5. Ook hier weer genoeg onderwijstijd besteden aan hoe je dat allemaal doet. Intoetsen is één. Een schatting maken van het antwoord is twee. 60 x 100: 6000. Laatste cijfer een nul. Maar waar staat die nul dan? De rekenmachine helpt natuurlijk: 56,4 x 107,5 = 6063**.** En waar is die nul dan? Allemaal onderzoeksvragen voor leerlingen. Uitzoeken; met pen en papier en met een rekenmachientje.

stap 10: schatten van vrienden

3 nawoord

Hoe meer vrienden, hoe makkelijker! Als je een beetje thuis bent in deze vriendenkring is het kiezen van een strategie niet zo moeilijk. Zwakke rekenaars zouden zich met een paar vrienden al heel erg thuis voelen. Je hebt daar géén standaardprocedures of kolomsgewijs rekenen voor nodig. Duidelijk zou moeten zijn dat er veel nadruk gelegd zou moeten worden op goede tafelkennis. Dus géén tafels met een rekenmachine. Laat in de klas leerlingen eigen namen voor strategieën bedenken. De namen die ik hier gebruik zijn ook ontleend aan eigen vondsten van kinderen. Maak als leerkracht steeds lijstjes met kale gemengde opgaven en laat kinderen aan het woord over mogelijke strategieën. Laat kinderen ook hun aanpakken gezamenlijk uitproberen.
Dit stappenplan lijkt hier en daar misschien kaal. Probeer als leerkracht ook steeds opgaven van betekenisvolle contexten te voorzien. Verlies als leerkracht niet uw geduld en vlucht niet in een aanpak met traditionele algoritmen. Uw geduld wordt beloond. Gebruik een rekenmachine met verstand: de beste rekenmachine zit in je hoofd!

waarom zo?

Op basis van twee jaar werken met grade 5 van River East Elementary School in Manhattan, New York. Met dank aan de kinderen en Peter Markovitz, de leerkracht. Met warmte denk ik terug aan hun gretigheid en enthousiasme om week na week wat nieuws te ontdekken.

voor wie?

Voor álle kinderen van de basisschool. Ieder naar z'n vermogen: met meer of minder vrienden. Uiteindelijk hoef je geen vijanden te hebben: de rekenmachine kan heel makkelijk een goede vriend worden.

door wie?

Willem Uittenbogaard, opleider leerkrachten basisonderwijs

noot

1 Als je kinderen toch vermenigvuldigen met meercjiferige getallen zou willen leren kun je niet beter terecht dan in het recente proefschrift van K. Buijs (2008). *Leren vermenigvuldigen met meercijferige getallen*. Utrecht: FIsme.