Op zoek naar indicatoren van gecijferdheid

W. Oonk
FIsme, Universiteit Utrecht

1 inleiding

Er is de laatste jaren veel gediscussieerd en gepubliceerd over de gecijferdheid bij leerlingen, in het bijzonder over de mate van gecijferdheid van aanstaande leraren basisonderwijs. In het afgelopen jaar verschenen er ook weer diverse publicaties over dit onderwerp.
Zo schreef Garssen (2007) onder de titel ‘Vraag jezelf eens wat af!’, een artikel over een werkwijze voor de opleiding die beoogt de houding van pabostudenten ten aanzien van gecijferdheid te veranderen. Die werkwijze zou dan een verandering teweeg moeten brengen van een formele, antwoordgerichte houding naar een nieuwsgierige, onderzoekende houding met betrekking tot reken-wiskundige aspecten in het dagelijks leven.
Hoogland en Meeder (2007) probeerden de discussie over gecijferdheid een impuls te geven door het in beeld brengen van een keur aan situaties waarin getallen, patronen en structuren een rol spelen, met als afsluiting een aantal vaak gestelde vragen over onderwijs op het gebied van gecijferdheid.
Van Zanten en Van den Brom-Snijders (2007) schreven over de consequenties van de invoer van de verplichte landelijke rekentoets voor pabo’s. Doordat de meeste pabo’s de tot dan toe gehanteerde toetsen - van een hoger niveau dan de nu verplichte toetsen - hebben afgeschaft, verwachten ze een niveauverlaging in plaats van een verhoging van rekenvaardigheid en gecijferdheid. Ze pleiten voor aanvullende toetsing van een adequaat niveau.
Oonk e.a. (2007) gaven een overzicht van vier eeuwen ontwikkeling van (onderwijs) in gecijferdheid. Zij sloten af met een perspectief voor de ontwikkeling van gecijferdheid bij pabo-studenten. Ze zien die ontwikkeling als een amalgaam van vier componenten, een groei in kennis, vaardigheid en houding die zich spiraalsgewijs ontwikkelt. Bij de ervaren leraar zouden de componenten gaandeweg als ‘viercomponentenlijm’ geïntegreerd moeten zijn.

De 'Panama Kerngroep Opleiders' besteedde vanzelfsprekend in haar publicatie 'Opleiden in geuren en kleuren' (Van Zanten & Van Gool, 2007) ook aandacht aan gecijferdheid. Door de casus van eerstejaarsstudente Aischa krijgt de lezer inzicht in de problemen die door Wiscat-pabotoets worden opgeworpen. De beide in het oog springende 'bakens' van het hoofdstuk over gecijferdheid, geven een korte samenvatting van de opvattingen die er bij de leden van de Kerngroep en ongetwijfeld bij het merendeel van de opleiders W&D leven omtrent de ontwikkeling van gecijferdheid bij aanstaande leraren. De volgende uitspraak van een opleider bij het eerste baken, spreekt wat dat betreft boekdelen:

> Mijn ervaring is dat studenten die onvoldoende gecijferd zijn, hun leerlingen (onbewust) dwingen tot standaardaanpakken en zich vaak beperken tot een didactiek van voordoen en nadoen. (pag.47).

Zoals al blijkt uit de genoemde publicaties van het afgelopen jaar is er zo langzamerhand veel bekend over gecijferdheid. In alles wat er gezegd en geschreven wordt valt echter op dat er nog weinig duidelijkheid is over hoe je op denk- en handelingsniveau kunt waarnemen in hoeverre iemand gecijferd is. Wat zijn de indicatoren van gecijferdheid?

Tijdens de 26^ste^ Panama-conferentie heeft een werkgroep zich beziggehouden met dit onderwerp. De focus was daarbij gericht op indicatoren van gecijferdheid bij pabo-studenten. Aan de hand van opgaven uit het onderzoek 'Theorie in Praktijk' (TIP; Oonk, 2003, 2004) werd gezocht naar indicatoren van (on)gecijferdheid. Dat gebeurde in een meewerkpracticum, waarbij alternerend in kleine groepen gewerkt werd en plenair verslag werd gedaan en gediscussieerd. Het accent lag daarbij op de analyse van het studentenwerk en mogelijkheden om studenten tot niveauverhoging te brengen.
Hierna wordt allereerst kort aangegeven wat de plaats is van gecijferdheid in het onderzoek TIP en wordt enige informatie gegeven over welke aspecten van gecijferdheid daarbij een rol spelen. Vervolgens wordt aan de hand van enkele uitwerkingen van studenten een korte 'zoektocht' gemaakt naar indicatoren van gecijferdheid. Er wordt afgesloten met de schets van een perspectief voor de ontwikkeling van gecijferdheid voor aanstaande leraren.

2 niveaus van gecijferdheid en bijbehorende indicatoren

niveaus van gecijferdheid in recente literatuur

McIntosh e.a. (1992) spreken in het kader van de analyse van gecijferdheid

over drie dimensies van getalgevoeligheid: een getals-, een bewerkings- en een toepassingsdimensie. De derde en laatste dimensie bestrijkt onder meer het analyseren en correct oplossen van problemen en daarbij de kritische reflectie achteraf op het proces van redeneren en besluiten.
In de ‘Proeve van een nationaal programma voor rekenen-wiskunde & didactiek op de pabo’ (Goffree & Dolk,1995), worden negen bakens beschreven in de lijn van rekenvaardig naar gecijferd door de gehele opleiding (pag.31-35); de bakens beschrijven een geheel van reken-wiskundige en didactische componenten van gecijferdheid.
Goffree (1995) onderscheidt drie niveaus van gecijferdheid, namelijk elementaire-, gevorderde- en professionele gecijferdheid. Op tenminste het niveau van elementaire gecijferdheid functioneert iedere burger die zich kan redden in veel voorkomende situaties in het dagelijks leven. Voor het niveau van gevorderde gecijferdheid verwijst Goffree naar het boek van Paulos (1989) en destilleert daaruit dertien bouwstenen die hij typeert als een geïntegreerd geheel van gezond verstand en wiskundekennis. Net als bij Paulos ligt er een tamelijk zwaar accent op statistisch denken en kansrekenen. Professionele gecijferdheid is het niveau waarop de beroepsuitoefenaar functioneert. Voor de leraar gaat het dan om de didactische component van de gecijferdheid.
Bokhove (1995) noemt - impliciet - een aantal aspecten van gecijferdheid naar aanleiding van zijn analyse van de oplossingsaanpakken van ruim honderd leerlingen in het PPON-onderzoek van 1992:

– kennis van getallen, getalrelaties, bewerkingen en oplossingsstrategëeen en het vermogen om die kennis efficiënt en op het goede moment in te zetten;
– kennis van ‘de wereld’ en die kennis toepassen op basis van gezond-verstand-redeneren;
– het herkennen van (reken)bewerkingen in contexten en gebruikmaken van eigenschappen van die contexten (denk bijvoorbeeld aan geldcontexten);
– reflectie op antwoorden met het oog op de context, dat wil zeggen de antwoorden kunnen beoordelen op juistheid of waarschijnlijkheid en waar nodig het antwoord corrigeren;
– gebruikmaken van passende referenties, hulpcontexten en andere concretiseringen.

Bokhove vindt dat ‘gecijferdheid op zeer veel niveaus beschouwd kan worden, met hele getallen, maar ook met breuken en kommagetallen’ (pag.8). Hij staaft zijn bewering met voorbeelden uit het ‘Periodiek Peilingsonderzoek’ (PPON), zoals de delingsalgoritme ‘2475 supporters vervoeren met bussen van 48 personen, hoeveel bussen nodig?’ en de opgave ‘0,497 × 48 is ongeveer?’

Treffers (1995) spreekt over 'gradaties van gecijferdheid' (pag.13). Algemeen geldt volgens Treffers als criterium - voor wat hij als 'basale gecijferdheid' betitelt - dat men de betreffende getallen kan ordenen, kan plaatsen op de getallenlijn en zodoende een idee heeft van de orde van grootte van die getallen. Dat geldt dan in een bepaald getallengebied, bijvoorbeeld dat van de kommagetallen. Een ander criterium is dat men inzicht heeft in hoe de (basis)operaties met getallen uitwerken en dat men de relaties tussen die operaties doorziet. Een derde criterium is dat men de basisbewerkingen op de geëigende problemen kan toepassen, zowel globaal als precies rekenend, waarbij het resultaat op redelijkheid kan worden ingeschat.
Van Groenestijn (2002) benadert het concept gecijferdheid vanuit de optiek van de volwasseneneducatie. Zij onderscheidt drie niveaus van gecijferdheid: elementaire, functionele en optimale gecijferdheid. Iemand is elementair gecijferd als hij of zij beschikt over minimale rekenvaardigheid in combinatie met elementaire communicatieve vaardigheden om te kunnen functioneren in werk en persoonlijk leven; hulp van anderen is nodig in bepaalde situaties. Iemand die functioneel gecijferd is, kan zijn handelen flexibel aanpassen aan nieuwe ontwikkelingen in de maatschappij. Iemand is optimaal gecijferd als hij of zij beschikt over een breed scala van wiskundige kennis en vaardigheden, meer dan nodig om adequaat te kunnen handelen in het persoonlijk, professioneel en maatschappelijk leven en om kritisch te kunnen reflecteren op maatschappelijke ontwikkelingen.
Goffree en Oonk (2004) hanteren in het boek 'Rekenvaardig. Op weg naar basale en professionele gecijferdheid' twee niveaus van gecijferdheid, zoals uit de titel al blijkt.
Basale gecijferdheid is het niveau van gecijferdheid dat de grondslag biedt voor het rekenen vanaf groep vijf van de basisschool en dat bovendien een basis vormt voor het rekenen in het leven van alledag. Het niveau van professionele gecijferdheid voor aanstaande leraren basisonderwijs wordt vooral bepaald door het vermogen om het eigen (reken)werk te verdiepen en didactisch te verrijken.

niveaus van gecijferdheid in het onderzoek TIP

In het onderzoek 'Theorie in Praktijk' (TIP) onder 269 studenten van elf pabo's, is na afloop van de onderzoeksmodule die de studenten werd aangeboden een 'peiling gecijferdheid' afgenomen. De peiling leverde informatie over het niveau van rekenvaardigheid c.q. gecijferdheid van de deelnemende studenten en over de mate waarin studenten zelf de moeilijkheid van de gebruikte opgaven inschatten. De uitkomsten van de peiling werden gebruikt voor het beantwoorden van een subvraag van het onderzoek, namelijk de vraag of er een significante correlatie bestaat tussen de mate van gecijferdheid van studenten en hun vermogen om didactische begrippen te

gebruiken in praktijksituaties. De peilingsopgaven waren afgeleiden van de in het jaar van afname (2003) op pabo's veel gebruikte opgaven uit de publicatie 'Gecijferdheid' van de HBO-raad (Faes e.a., 1992), waaronder 'kale rekenopgaven', zoals $0,25 \times 2,5 \times 48000 =$. De opgaven zijn aangepast om ze geschikt te maken voor het peilen van aspecten van gecijferdheid, zoals het reflectief vermogen van studenten en hun wiskundige attitude. Vooral door de beide karakteristieken 'wiskundige attitude' en 'reflectief vermogen' wordt in het onderzoek TIP gecijferdheid onderscheiden van rekenvaardigheid. Rekenvaardigheid kan beschouwd worden als een - essentiële - basiscomponent van gecijferdheid. Hoewel er in de praktijk niet altijd een duidelijke scheidslijn is tussen die twee, gaat het bij rekenvaardigheid vooral om de vaardigheid in het gebruik van rekentechnieken en procedures om zo effectief en zo efficiënt mogelijk tot antwoorden van rekenproblemen te komen. In 'gecijferdheidssituaties' wordt - behalve op de rekenvaardigheid - een beroep gedaan op de wiskundige attitude van degene die op de situatie moet inspelen en wordt het reflectieve vermogen ingezet om de situatie kritisch te interpreteren en om ook achteraf de gevonden oplossingen terug te kunnen koppelen naar consequenties voor de gegeven probleemsituatie.
Ten behoeve van het onderzoek werden zes niveaus van gecijferdheid beschreven. De niveaus worden voor een belangrijk deel medebepaald door de aard van de leerstofdomeinen, door moeilijkheidsgraad van de problemen die aan de orde (kunnen) komen en door de niveaus van oplossen. Zo wordt iemand die de opgave: 'Hoeveel kosten vier paar sokken van € 4,95' oplost door te redeneren: $4 \times € 5 – 4 \times € 0,05 = € 19,80$ geacht op een hoger niveau van gecijferdheid te functioneren dan degene die het probleem algoritmisch te lijf gaat met een cijferopgave.

Hierna worden drie competenties van gecijferdheid voor (aanstaande) leraren beschreven en daarna de zes niveaus met enkele voorbeelden van bijbehorende indicatoren. De indicatoren kunnen dienen als gereedschap voor het peilen van de gecijferdheid.

competenties van gecijferdheid

1 De student kan beschikken over de kennis en inzichten voor rekenen en wiskunde op het betreffende niveau (1 tot 6; zie volgende paragraaf) en beheerst de vaardigheden op dat niveau, inclusief het daarbij behorend gebruik van wiskundetaal en het niveau van wiskundig redeneren.
2 De student ontwikkelt een wiskundige attitude die groeit naar een (didactisch) ontwerpniveau (niveau 6).
3 De student beschikt over een reflectief vermogen dat hem of haar in

staat stelt de eigen oplossingen en het oplossingsgedrag in beschouwing te nemen, waar mogelijk in het perspectief van een verbeterde of alternatieve aanpak.

De drie competenties hangen nauw samen.

zes niveaus van gecijferdheid van pabo-studenten

niveau 1: eind groep 6

De kennis, vaardigheden en inzichten van niveau 1 en het bij dat niveau behorende gebruik van wiskundetaal en het niveau van wiskundig redeneren, zijn vergelijkbaar met het niveau eind groep zes. Deze vormen het fundament voor het verdere rekenen op de basisschool (niveau 90-100 procent PPON).

Voorbeeld van een indicator bij niveau 1

De student heeft bij het maken van berekeningen de tafels van vermenigvuldiging paraat.

niveau 2: eind groep 8

De kennis, vaardigheden en inzichten van niveau 2 en het bij dat niveau behorende gebruik van wiskundetaal en het niveau van wiskundig redeneren, zijn vergelijkbaar met het niveau eind groep acht (niveau 90-100 procent PPON).

Voorbeeld van een indicator bij niveau 2

De student begrijpt het verband tussen 0,75, $\frac{3}{4}$ en 75 procent en weet op basis daarvan dat de prijs van 0,73 kg kaas ongeveer driekwart van de kilogramprijs is en berekent dat dezelfde kaas bij een andere supermarkt duurder is (absoluut en in percentages).

niveau 3: start pabo

De student kan de eigen oplossing begrijpelijk verwoorden voor anderen (medestudenten, stagementor, opleider).

Voorbeeld van een indicator bij niveau 3

De student gebruikt handige strategieën bij het maken van de deling 1539 : 19, controleert de eigen oplossing en legt uit hoe er gedacht is (staartdeling en schattend rekenen).

niveau 4: einde propedeuse

De student kan meerdere oplossingen en oplossingsstrategieën aangeven voor problemen die zich daartoe lenen. De student heeft een adequate wiskundige attitude en is in staat reflectieve oplossingen te verwoorden en te beschrijven.

Voorbeeld van een indicator bij niveau 4
De student kent meerdere oplossingen voor de opgave ‘vijf repen verdelen met z’n zessen’, beschrijft die oplossingen zowel mondeling als schriftelijk en markeert de verschillen tussen die oplossingen; de student toont een zekere mate van plezier en zelfvertrouwen (> 2 op een vijfpuntsschaal).

niveau 5: major
Reken-wiskundige verdieping en didactische verrijking. De student kan gebruik maken van passende referenties, hulpcontexten en andere concretiseringen en oplossingen beoordelen op juistheid of waarschijnlijkheid en waar nodig het antwoord corrigeren. De student heeft een adequate wiskundige attitude.

Voorbeeld van een indicator bij niveau 5
De student maakt een uitgebreide reflectieve oplossing bij het volgende probleem:

> Tuincentrum *A* biedt zakken tuinaarde aan: vijf halen vier betalen; de concurrent, tuincentrum *B* biedt dezelfde zakken aan met de slogan: ‘vier halen drie betalen’. Waar is de tuinaarde het goedkoopst? Hoeveel scheelt het per bedrijf procentueel? Hoe zit het als bij het bij tuincentrum *A* gaat om zakken van 30 liter die per zak € 1,50 kosten en bij centrum *B* om zakken van 40 liter die € 2,15 kosten?
> Stel je voor dat je een driehoekige border van 3 m bij 4 m bij 5 m wilt ophogen met 5 cm tuinaarde. Bij wie van de twee bedrijven ga je de tuinaarde kopen en wat gaat dat kosten?

De student past het probleem vervolgens aan voor zijn stagegroep 8 en noteert hints voor de leerlingen en anticipeert op mogelijke vragen en valkuilen.

niveau 6: bachelor
De student toont een vanzelfsprekende - niet-schoolse - aanpak van reken-wiskundeproblemen, ook van problemen uit het leven van alledag, bijvoorbeeld misverstanden of fouten in de media die reken-wiskundig verhelderd of gecorrigeerd kunnen worden. De student is in staat statistische gegevens logisch te interpreteren of te verwerken in grafieken. De student ziet samenhang tussen getallen en getalrelaties, bijvoorbeeld tijdens schattend rekenen (globaal rekenen) en precies berekenen. De student toont reflectief vermogen en een wiskundige attitude ook op (didactisch) ontwerpniveau.

Voorbeeld van een indicator bij niveau 6
De student maakt een kritische analyse van een krantenartikel over waterverbruik, bedenkt - en beantwoordt - naar aanleiding daarvan enkele

zelfgestelde vragen en bijbehorende opgaven. Ten slotte neemt de student het eigen oplossingsgedrag in beschouwing en bedenkt nog een alternatieve reactie op het oorspronkelijke commentaar, voorzien van didactische adviezen aan zichzelf. De student ontwerpt vervolgens bij het artikel een probleemsituatie voor groep acht en verdedigt in de teamvergadering van haar stageschool de plaats van het probleem in het programma, c.q. het curriculum van groep acht. De student kan anticiperen en inspelen op de leerprocessen van haar leerlingen.

voorbeelden bij de competenties 2 en 3

Hierna nog enkele voorbeelden van indicatoren bij de twee kerncompetenties van gecijferdheid competentie 2 (wiskundige attitude) en competentie 3 (reflectief vermogen).
Enkele voorbeelden van indicatoren bij competentie 2 (wiskundige attitude). De student:

a heeft plezier in het maken van wiskundige opgaven;
b gebruikt wiskundetaal correct en adequaat;
c toont zelfvertrouwen tijdens het oplossen van (wiskundige) problemen;
d als (b), ook in samenwerking met anderen;
e herkent- en past wiskunde toe in dagelijkse situaties;
f gebruikt ‘mooie’ getallen, handige strategieën of passende referentiematen;
g zet passende materialen, schema’s of modellen in bij het oplossen en uitleggen van de oplossingen;
h volgt oplossingen cq redeneringen van anderen - medestudenten, leerlingen, experts - of zet die voort;
i bedenkt meerdere oplossingsvarianten en past die toe;
j toont creativiteit bij het oplossen van wiskundige problemen;
k is kritisch op het gebruik van wiskunde is dagelijkse situaties, brengt correcties aan of verzint alternatieve aanpakken;

(Zie verder de bijlage: ‘Overzicht wiskundige attitudes’; Oonk & De Goeij, 2006.)

Enkele voorbeelden van indicatoren bij competentie 3 (reflectief vermogen). De student:

a verwoordt de eigen oplossing en legt die uit aan anderen;
b volgt, analyseert en becommentarieert eigen oplossingen en die van anderen;
c anticipeert op (on)mogelijkheden van strategieën of op consequenties van (onjuiste) redeneringen;
d schrijft reflectieve oplossingen;

e reflecteert op de eigen oplossing ten gunste van een betere- of alternatieve oplossing;
f beschouwt het eigen oplossings*gedrag* kritisch;

3 naar een verfijning van de indicatoren

opdracht voor de werkgroep-participanten

Tijdens de werkgroepbijeenkomst op de Panama-conferentie werd naar verfijnde indicatoren van gecijferdheid gezocht aan de hand van uitwerkingen van de opgaven die door studenten gemaakt waren. Met 'verfijnd' wordt hier bedoeld een verfijning op denk- en handelingsniveau van de eerder genoemde indicatoren. Het zoeken naar indicatoren door de participanten van de workshop gebeurde in cycli van analyseren van studentenwerk in kleine groepen en het plenair bespreken van die analyses. De participanten werd gevraagd daarbij zoveel mogelijk de volgende werkwijze te volgen:

- probeer de gedachtegang van de student te achterhalen of althans vermoedens daarover uit te spreken;
- noem een paar indicatoren van (on)gecijferdheid die je als eerste te binnen schieten;
- geef een niveau-indicatie van de uitwerking. Dat kan een niveauaanduiding van 1 tot 6 zijn (zie voorbeelden), een cijfer (0 tot 10) of anderszins;
- geef een collegiaal 'hulpadvies' voor de opleider die deze student onder zijn of haar hoede heeft.

De plenaire discussies waren dermate intensief dat de bespreking van slechts enkele uitwerkingen al leidde tot een scala van mogelijke indicatoren. Als illustratie van de werkwijze tijdens de workshopbijeenkomst volgt hierna eerst informatie over de opdracht die de pabo-studenten kregen en daarna de analyse van een uitwerking van één van de studenten zoals die in de workshop plaats vond.

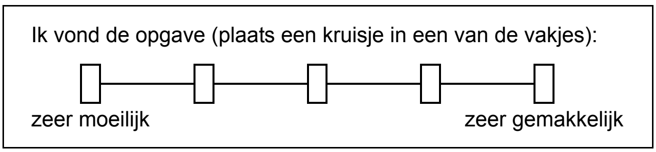
de opdracht voor de studenten

De eerste-, tweede- en derdejaarsstudenten kregen in het kader van het onderzoek TIP allemaal dezelfde tien opgaven. Om reflectie uit te lokken en een indruk te kunnen krijgen van de wiskundige attitude van de studenten werd bij elke opgave een zestal aanwijzingen gegeven voor het oplossen en uitwerken van de opgaven:

- noteer de volledige berekening;

- maak eventueel eerst een globale schatting te maken;
- licht die berekening waar mogelijk toe met hoe je gedacht hebt;
- zet erbij of je zeker bent van je antwoord en zo mogelijk waarom;
- zet erbij hoe je je antwoord gecontroleerd hebt en of je daardoor zekerder bent geworden;
- schrijf voor het geval je er niet uit bent gekomen wél op wat je allemaal geprobeerd hebt!

Verder werd hen gevraagd bij elke opgave een kruisje te plaatsen in een van de vakjes op een vijfpuntsschaal (fig.1).



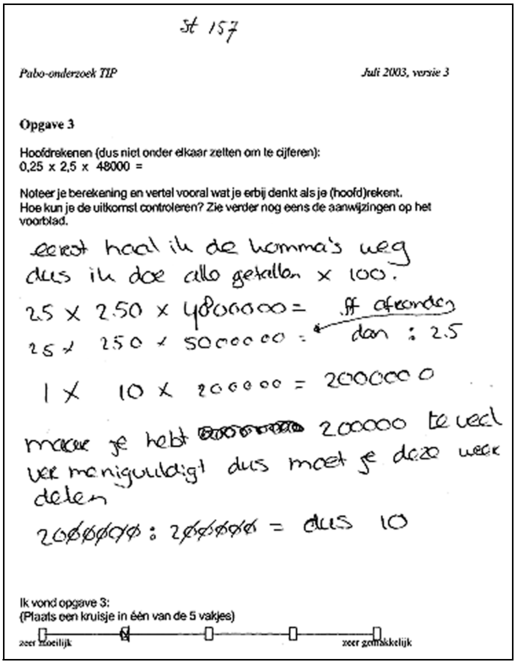
figuur 1

Hoewel een combinatie van instrumenten als schriftelijk werk, observatie, interactie en interview natuurlijk de meest betrouwbare gegevens genereert, valt het op welke rijke opbrengst alleen schriftelijk werk al oplevert. Vooral de vraag aan studenten om zoveel mogelijk op te schrijven van hun denk- en rekenwerk, leverde veel op. In het kader van dit artikel is als illustratie van het analysewerk gekozen voor opgave 3, namelijk de 'kale rekensom' $0{,}25 \times 2{,}5 \times 4800 =$. De opbrengst van deze ogenschijnlijk eenvoudige opgave geeft veel inzicht in het vermogen van studenten om handig te rekenen, een fundamentele basisconditie voor gecijferdheid. De grote opbrengst levert bovendien een rijke bron voor het zoeken naar indicatoren van gecijferdheid, doel van de werkgroep.

analyse van studentenwerk (1)

De student met de wat oneerbiedige onderzoeksnaam student 157, is een eerstejaarsstudent met vooropleiding 'havo met wiskunde'. Deze student heeft een notie van 'komma's weg werken' bij het delen met kommagetallen (fig.2). Maar dat loopt verkeerd af, want hij vermenigvuldigt alle drie factoren met 100, dus vermenigvuldigt in feite met $100 \times 100 \times 100$, maar deelt door $25 \times 25 \times 25$. De latere '200.000 teveel' compenseert die fout niet, want dat was een aanvulling en geen factor. De strategie 'komma's weg werken' kan vaak goed toegepast worden bij het delen van kommagetallen, omdat dan de ene factor tegen de ander wegvalt.

Zo is $2{,}5 : 0{,}05 = 250 : 5 = 50$; deeltal en deler beide met 100 vermenigvuldigen levert een gelijkwaardige en gemakkelijker uit te voeren deling op. Bij het vermenigvuldigen levert het zelden een voordeel op, omdat je grote getallen moet gaan vermenigvuldigen en die weer moet delen door het product van alle factoren waarmee je eerst hebt vermenigvuldigd. Bij een strategie als halveren en verdubbelen ligt dat anders, daar gaat het uiteraard om vermenigvuldigen én delen.



St 157

Pabo-onderzoek TIP *Juli 2003, versie 3*

Opgave 3

Hoofdrekenen (dus niet onder elkaar zetten om te cijferen):
0,25 x 2,5 x 48000 =

Noteer je berekening en vertel vooral wat je erbij denkt als je (hoofd)rekent.
Hoe kun je de uitkomst controleren? Zie verder nog eens de aanwijzingen op het voorblad.

eerst haal ik de komma's weg
dus ik doe alle getallen x 100.
25 x 250 x 4800000 = ff afronden
25 x 250 x 5000000 = dan : 25
1 x 10 x 200000 = 2000000
maar je hebt 200000 te veel
vermenigvuldigt dus moet je deze weer
delen
2000000 : 200000 = dus 10

Ik vond opgave 3:
(Plaats een kruisje in één van de 5 vakjes)
zeer moeilijk zeer gemakkelijk

figuur 2

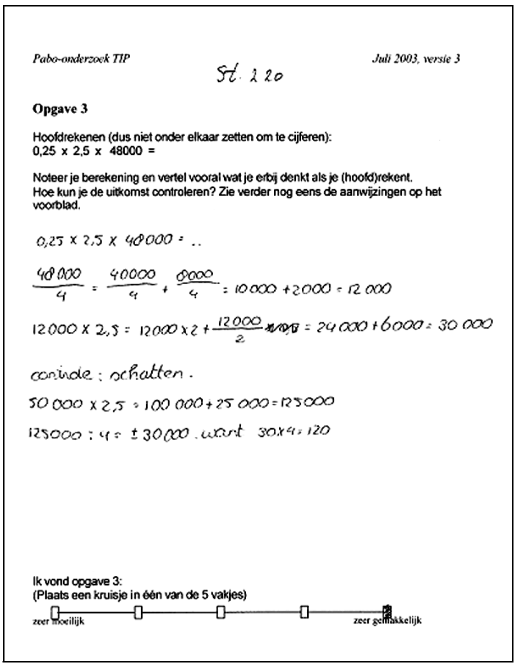
De analyse van wat bij deze student kennelijk aan inzicht en vaardigheid ontbreekt, verschaft tegelijkertijd een aantal indicatoren van handig rekenen c.q. gecijferdheid:

- inzicht in vermenigvuldigstructuren, hier in het bijzonder de toepassing van de commutatieve en de associatieve wet van vermenigvuldigen;
- handig rekenen bij het vermenigvuldigen met kommagetallen (bijvoorbeeld halveren en verdubbelen door $2{,}5 \times 48000 = 5 \times 24000 = 10 \times 12000 = 120000$ en daar een kwart van nemen);
- de relatie leggen tussen breuken en kommagetallen (bijvoorbeeld weten dat 0,25 is een vierde en dan eerst een kwart van 48000 nemen, daarna $2\frac{1}{2} \times 12000$);
- reflectie op de procedure, waardoor bijvoorbeeld de onmogelijkheid van een teveel afwijkend antwoord (in dit geval 10) ontdekt kan worden;

– de wiskundige attitude om handige strategieën in te zetten, zoals hier 0,25 als operator ($\frac{1}{4}$ ×) gebruiken.

analyse van studentenwerk (2)

Student 220 is een eerstejaarsstudent met vooropleiding ‘vwo met wiskunde’. Zij heeft weinig moeite met de opgave, al is haar oplossing wat omslachtig (fig.3). Je zou verwachten dat ze een vierde deel van 48000 vlot uit het hoofd zou kunnen uitrekenen. Het kan zijn dat ze het advies om haar gedachten op te schrijven op deze manier interpreteert. Hoe dan ook, ze noteert alle denkhandelingen correct; dat geldt ook voor de berekening van 12000 × 2,5. Verder controleert ze haar antwoord door te schatten; de keuze van 50.000 daarbij is begrijpelijk, maar 48000 nemen is gemakkelijker.


Pabo-onderzoek TIP

Juli 2003, versie 3

St. 220

Opgave 3

Hoofdrekenen (dus niet onder elkaar zetten om te cijferen):
0,25 x 2,5 x 48000 =

Noteer je berekening en vertel vooral wat je erbij denkt als je (hoofd)rekent.
Hoe kun je de uitkomst controleren? Zie verder nog eens de aanwijzingen op het voorblad.

0,25 x 2,5 x 48000 = ..

$\frac{48000}{4} = \frac{40000}{4} + \frac{8000}{4} = 10000 + 2000 = 12000$

$12000 \times 2,5 = 12000 \times 2 + \frac{12000}{2} = 24000 + 6000 = 30000$

controle : schatten.

50 000 x 2,5 = 100 000 + 25 000 = 125000

125000 : 4 = ± 30000 . want 30x4 = 120

Ik vond opgave 3:
(Plaats een kruisje in één van de 5 vakjes)

zeer moeilijk … zeer gemakkelijk

figuur 3

We kunnen naar aanleiding van deze uitwerking onder andere de volgende indicatoren aanwijzen:

– handig gebruik maken van de relatie tussen breuken en kommagetallen (een kwart van 48000 nemen);
– weten dat je eerst de factoren 0,25 en 48000 mag vermenigvuldigen;
– de wiskundige attitude om de rekenhandelingen nauwkeurig te (kunnen) noteren;

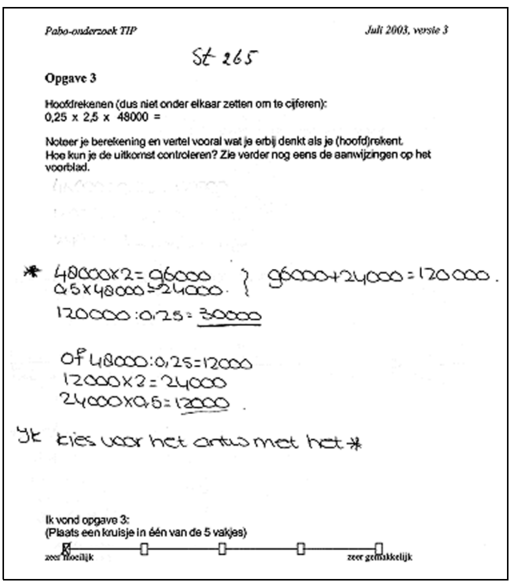
- het vermogen om het antwoord te controleren door het uitvoeren van een alternatieve berekening;
- schattend kunnen rekenen.

De tweede indicator: weten dat je eerst de factoren 0,25 en 48000 mag vermenigvuldigen, lijkt te berusten op vanzelfsprekende kennis en inzicht maar schijn bedriegt. In feite mag die vermenigvuldiging worden uitgevoerd op basis van achtereenvolgens de commutatieve wet ($0{,}25 \times 2{,}5 = 2{,}5 \times 0{,}25$) en de associatieve wet ($[2{,}5 \times 0{,}25] \times 48000 = 2{,}5 \times [0{,}25 \times 48000]$).

Het is zelfs vrijwel zeker zo dat drie van de vier studenten die hier genoemd worden hun oplossing goed of beter hadden kunnen maken als ze zich bewust waren van deze beide wetten!

analyse van studentenwerk (3)

Student 265 is een tweedejaarsstudent met vooropleiding ‘mbo zonder wiskunde’. Deze studente maakt twee verschillende berekeningen en kiest uiteindelijk voor de eerste berekening. Het is niet duidelijk waar die keuze op gebaseerd is (fig.4).


Pabo-onderzoek TIP — Juli 2003, versie 3

St 265

Opgave 3

Hoofdrekenen (dus niet onder elkaar zetten om te cijferen):
0,25 x 2,5 x 48000 =

Noteer je berekening en vertel vooral wat je erbij denkt als je (hoofd)rekent.
Hoe kun je de uitkomst controleren? Zie verder nog eens de aanwijzingen op het voorblad.

* 48000x2=96000
0,5x48000=24000. } 96000+24000=120000.
120000:0,25=30000

of 48000:0,25=12000
12000x2=24000
24000x0,5=12000.

Ik kies voor het antw met het *

Ik vond opgave 3:
(Plaats een kruisje in één van de 5 vakjes)
zeer moeilijk — zeer gemakkelijk

figuur 4

De eerste berekening leidt tot het goede antwoord, al maakt ze wel een notatiefout ($120000 : 0{,}25 = 30000$ in plaats van $120000 : 4 = 30000$). Het is de vraag of dat alleen maar een notatiefout is. Een veel voorkomend mis-

verstand is de gedachte dat 120000 : 0,25 gelijkwaardig is aan 120000 : 4. Soms is die misvatting ontstaan door een foutieve interpretatie van de regel: ‘delen door een breuk is vermenigvuldigen met het omgekeerde’. Deze studente maakt in haar tweede oplossing een soortgelijke fout (48000 : 0,25 = 12000). Verder maakt ze in de tweede oplossing een fout door 12000 × 2,5 te berekenen als 12000 × 2 + 24000 × 0,5 in plaats van 12000 × 2 + 12000 × 0,5. Ze rekent na 12000 × 2 door met het antwoord daarvan (24000) in plaats van de oorspronkelijke 12000.
In feite heeft ze geen inzicht in de distributieve wet van de vermenigvuldiging en optelling die hier speelt, namelijk dat 12000 × 2,5 = (12000 × 2) + (12000 × 0,5). In algemene vorm: $a\,(b + c) = ab + ac$.

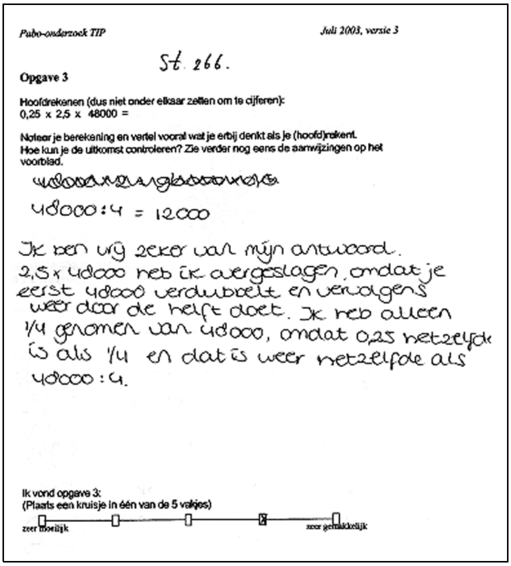
Naar aanleiding van deze analyse noteren we de volgende, hiervoor nog niet genoemde indicatoren:

– de rekenhandelingen en keuzen daarbij kunnen verantwoorden in duidelijke (wiskunde)taal;
– inzicht hebben in de distributieve wet en die kunnen toepassen;
– inzicht hebben in de gelijkwaardigheid van bepaalde breuken en kommagetallen;
– inzicht hebben in de gelijkwaardigheid van wiskundige notaties (bijvoorbeeld 0,25 × 48 = $\frac{1}{4}$ × 48 = 48 : 4 = een kwart van 48).

analyse van studentenwerk (4)

Student 266 is een tweedejaarsstudent met vooropleiding ‘vwo met wiskunde’. Deze student weet dat hij eerst de vermenigvuldiging 0,25 × 48000 = 12000 mag maken en kent ook de gelijkwaardigheid van 0,25 × 48000 en $\frac{1}{4}$ deel van 48000 (fig.5). Vervolgens maakt hij echter - vermoedelijk twee met elkaar samenhangende - denkfouten. In de eerste plaats ziet hij niet in dat 2,5 vermenigvuldigd moet worden met 12000 in plaats van met 48000. Ten tweede lijkt er de misvatting bij hem te bestaan dat de factor 2,5 niets oplevert: ‘Je verdubbelt eerst en daarna neem je weer de helft!’ De laatste is een gedachtekronkel die misschien ontstaat door de valse combinatie van noties dat 2,5 × 48000 = 2 × 0,5 × 48000 = 1 x 48000. De laatste stap is uiteraard juist, maar de angel zit in de eerste stap, namelijk de veronderstelling dat de factor 2,5 gesplitst kan worden in twee factoren 2 en 0,5. Er is kennelijk verwarring met de optelling 2,5 = 2 + 0,5.
Mogelijk is ook het feit dat er drie factoren in het geding zijn oorzaak van de verkeerde gedachtegang. Het is immers nauwelijks te geloven dat een student met deze vooropleiding die fout ook bij vermenigvuldiging van twee getallen (2,5 × 48000) zou maken. Ook hier geldt weer dat zo’n fout vrijwel zeker vermeden kan worden, als de student voldoende inzicht heeft in de commutatieve-, de associatieve- en de distributieve wet. Verder mist deze

student kennelijk de houding om zichzelf kritisch te volgen, bijvoorbeeld door een alternatieve oplossing te zoeken of door te schatten.


Pabo-onderzoek TIP Juli 2003, versie 3

St. 266.

Opgave 3

Hoofdrekenen (dus niet onder elkaar zetten om te cijferen):
0,25 x 2,5 x 48000 =

Noteer je berekening en vertel vooral wat je erbij denkt als je (hoofd)rekent.
Hoe kun je de uitkomst controleren? Zie verder nog eens de aanwijzingen op het voorblad.

~~48000 x 2,5~~

48000 : 4 = 12000

Ik ben vrij zeker van mijn antwoord.
2,5 x 48000 heb ik overgeslagen, omdat je eerst 48000 verdubbelt en vervolgens weer door de helft doet. Ik heb alleen 1/4 genomen van 48000, omdat 0,25 hetzelfde is als 1/4 en dat is weer hetzelfde als 48000 : 4.

Ik vond opgave 3:
(Plaats een kruisje in één van de 5 vakjes)
zeer moeilijk ☐ ☐ ☐ ☒ ☐ zeer gemakkelijk

figuur 5

Nog niet eerder genoemde indicatoren die we uit deze analyse kunnen afleiden zijn:

- inzicht in vermenigvuldigingen met meer dan twee getallen en het gebruik van de drie wetten bij het vermenigvuldigen;
- het overzichtelijk en correct weergeven van oplossingen in (wiskunde)taal;
- de wiskundige attitude om de eigen rekenhandelingen nauwkeurig te (kunnen) volgen, bijvoorbeeld door een alternatieve oplossing te zoeken of door een schatting te maken.

4 de ontwikkeling van gecijferdheid voor aanstaande leraren

Het voorgaande heeft duidelijk gemaakt dat de analyse van enkele schriftelijke uitwerkingen van een schijnbaar eenvoudige opgave een reeks van indicatoren van gecijferdheid kan opbrengen, in dit geval vooral indicatoren voor de domeinen hoofdrekenen en handig rekenen. Verder blijkt dat deze opgave, een vermenigvuldiging van drie getallen waarvan twee kommagetallen, veel studenten voor problemen plaatst. Dat geldt zelfs voor een

deel van de studenten met vooropleiding ‘vwo met wiskunde’. Of de oorzaak van de misvattingen nu gezocht moet worden in ‘achterstallig onderhoud’ of dat die voortkomen uit gebrek aan inzicht, in ieder geval maakt deze activiteit duidelijk dat inzichtelijk (blijven) oefenen van dergelijke opgaven noodzakelijk is. Het mondeling en schriftelijk verwoorden van redeneringen en oplossingen in correcte (wiskunde)taal is daarbij van cruciaal belang. Kennis van indicatoren kan zowel studenten als opleiders helpen bij het verwerven en begeleiden van dergelijke activiteiten. De boodschap in dit concrete geval blijkt vooral te zijn, dat meer aandacht voor vermenigvuldigingen van dit type en het inzichtelijk gebruik daarbij van de commutatieve-, de associatieve- en de distributieve wet zeer gewenst is.
Wat betreft de ontwikkeling van gecijferdheid die pabo-studenten doormaken, onderscheiden Oonk, Van Zanten en Keijzer (2007) vier fasen, de zogenaamde ‘vierslag’. Het is een geheel van elkaar overlappende, spiraalsgewijs verlopende stadia van ontwikkeling. Het volgende citaat geeft een samenvatting van die fasering.
Samengevat luidt de geschetste ‘vierslag’:

- Het verwerven van elementaire rekenvaardigheid, in het bijzonder het oplossen van opgaven uit reken-wiskundemethoden voor de basisschool.
- Het herkennen van wiskunde in de eigen omgeving en die van kinderen.
- Het gericht zijn op oplossingsprocessen bij het (laten) oplossen van reken-wiskundeproblemen, onder andere door te reflecteren op eigen en andermans oplossingen.
- Het inspelen op het wiskundig denken van leerlingen, onder andere door te anticiperen op hun denkprocessen en hen te stimuleren tot niveauverhoging. Bij deze laatste slag wordt het mathematiseren als het ware verstrengeld met het didactiseren.

Het lijkt erop dat het ‘professionele’ in professionele gecijferdheid juist en vooral zit in de didactische componenten van gecijferdheid, dat zijn in het bijzonder de componenten twee tot en met vier van deze vierslag. Je kunt de groei van de ontwikkeling in de gecijferdheid zien als een amalgaam van de vier componenten, een groei in kennis, vaardigheid en houding die zich spiraalsgewijs ontwikkelt. Aanvankelijk ligt het accent voor de (aanstaande) leraar op elementaire basisvaardigheden en schuilt er enige ‘professie’ in de vorm van praten over je oplossing met een medestudent of het ‘ontwerpen’ van een simpele uitleg voor een kind. Een eenvoudige reflectie - bijvoorbeeld in de vorm van een reflectieve oplossing bedenken - hoort hier ook bij. Gaandeweg krijgt de gecijferdheid een duidelijk professioneel karakter, zichtbaar in specifieke didactische kwaliteiten, die ten slotte - bij de ideale leraar - uitmondt in een mooi evenwicht. Alle componenten zijn

dus van meet af aan bij de ontwikkeling betrokken, zij het in verschillende mate. Bij de ervaren leraar zou je willen dat de componenten als 'viercomponentenlijm' geïntegreerd zijn. (Oonk, Van Zanten & Keijzer, 2007, pag.15).
De indicatoren die voortkomen uit de hiervoor beschreven activiteiten, passen in elk van de vier fasen en zijn enerzijds expliciet aantoonbaar in het oefenwerk van studenten, anderzijds zijn ze meer ingebed in het werken van studenten met de kinderen van hun stagegroep. De indicatoren die wijzen op reflectief gedrag of op een wiskundige attitude (zie ‘voorbeelden bij de competenties 2 en 3’, pag.47) zijn vervlochten met alle andere indicatoren. Zij vormen de ‘smeerolie’ voor de motor die leerlingen en studenten op weg helpt naar een hoger niveau van gecijferdheid.

noot

1 Zie desgewenst de hand-out voor aandachtspunten op www.fi.uu.nl/panama/conferentie/conferentiearchief.

literatuur

Bokhove, J. (1995). Er zijn 51,5625 bussen nodig. Een beschouwing over gecijferdheid. *Willem Bartjens, 14*(3), *6-11*.

Faes, W.H.L., K. Olofsen & J.W.M. van den Bergh (red.) (1992). *Gecijferdheid. Docentenhandleiding & Studentenmateriaal. Verzameling toetsvragen*. Uitgave HBO-raad.

Garssen, F. (2007). Gecijferdheid: vraag jezelf eens wat af! *Reken-wiskundeonderwijs: onderzoek, ontwikkeling, praktijk, 26*(1), 12-18.

Goffree, F. & M. Dolk (red.) (1995). *Proeve van een nationaal programma voor rekenen-wiskunde & didactiek op de pabo.* Utrecht/Enschede: Freudenthal Instituut/SLO (31-35).

Goffree, F. (1995). Gecijferdheid. In: L. Verschaffel & E. De Corte (red.) *Naar een nieuwe reken/wiskundedidactiek voor de basisschool en de basiseducatie. Deel 1*. Leuven: STOHO/ACCO (16-49).

Goffree, F. & W. Oonk (2004). *Rekenvaardig. Op weg naar basale en professionele gecijferdheid*. Groningen: Wolters-Noordhoff.

Groenestijn, M.J.A. van (2002). *A Gateway to Numeracy. A Study of Numeracy in Adult Basic Education*. Utrecht: CD-β Press, Centrum voor Didactiek van Wiskunde, Universiteit Utrecht (proefschrift).

Hoogland, K. & M. Meeder (2007). *Gecijferdheid in beeld*. Meppel: Boom.

McIntosh, A., B.J. Reys & R.E. Reys (1992). A proposed Framework for Examining Basic Number Sense. *For the learning of Mathematics, 12* (3), (2-9).

Oonk, W. (2003). *Pabo Onderzoek ‘Theorie in Praktijk’ (TIP). Handleiding voor opleiders*. Utrecht: Freudenthal Instituut.

Oonk, W. (2004). *Competenties van gecijferdheid en bijbehorende indicatoren. Overwegingen voor het bepalen van de mate van gecijferdheid van pabostudenten*. Utrecht: Freudenthal Instituut.

Oonk, W., M. van Zanten & R. Keijzer (2007). Gecijferdheid, vier eeuwen ontwikkeling. Perspectieven voor de opleiding. *Reken-wiskundeonderwijs: onderzoek, ontwikkeling, praktijk, 26*(3), 3-18.

Paulos, J.A. (1989). *Ongecijferdheid*. Amsterdam: Bert Bakker.

Treffers, A. (1990). *Het voorkomen van ongecijferdheid op de basisschool,* Utrecht: Universiteit Utrecht (oratie).

Zanten, M. van & P. van den Brom-Snijders (2007). Beleidsagenda lerarenopleiding leidt tot niveauverlaging - Gehanteerde rekenvaardigheids- en gecijferdheidstoetsen. *Reken-wiskundeonderwijs: onderzoek, ontwikkeling, praktijk 26*(1), 19-23.

Zanten, M van & A. van Gool (red.) (2007). *Opleiden in geuren en kleuren. Bakens voor rekenen-wiskunde & didactiek op de pabo.* Utrecht/Enschede: Panama/FIsme/SLO.

bijlage: Overzicht wiskundige attituden

(Oonk & De Goeij, 2006)

Algemene houding ten aanzien van wiskunde	• zelfvertrouwen tonen tijdens het oplossen van (wiskundige) problemen, bijvoorbeeld durf en doorzettingsvermogen laten zien; • plezier in het maken van wiskundige opgaven; • zelfstandigheid en verantwoordelijkheidsgevoel; • brede belangstelling; • verwondering; • betrokkenheid.
Reflecterende houding	• het eigen denken en handelen in beschouwing nemen; • terugkijken en anticiperen op eigen en andermans (denk)activiteiten; • heuristisch denken, jezelf vragen stellen; • aandacht voor relativering; • kritisch zijn op het gebruik van wiskunde.
Onderzoekende houding	• de wil om diepgaander te begrijpen; • nieuwsgierigheid; • aandacht voor objectiviteit; • gericht zijn op alternatieve aanpakken; • alert zijn op doodlopende paden en die durven te verlaten; • aanpassingsvermogen; • gericht op raadplegen van informatiebronnen; • drang naar inzicht; • meerdere oplossingsvarianten bedenken en toepassen; • oplossingen cq redeneringen van anderen - medestudenten, leerlingen, experts - volgen of voortzetten; • wiskunde in situaties herkennen en toepassen; • wiskundetaal en wiskundige activiteiten* gebruiken; • creativiteit tonen bij het oplossen van wiskundige problemen;
Communicatieve houding	• wiskundetaal gebruiken in samenwerking met anderen; • actief luisteren; • gericht op informatie delen; • aanpassingsvermogen; • oplossingen cq redeneringen van anderen – medestudenten, leerlingen, experts – volgen of voortzetten.
Doelgerichte houding	• efficiëntie nastreven; • gericht op nauwkeurigheid, volledigheid, structurering, eenvoud; • beslistheid en consequentie; • mooie' getallen, handige strategieën of passende referentiematen gebruiken; • materialen, schema's of modellen inzetten bij het oplossen en uitleggen van de oplossingen; • wiskundetaal adequaat gebruiken.

*) Onder wiskundige activiteiten verstaan we bijvoorbeeld structureren, generaliseren, vergelijken, ordenen, concretiseren, visualiseren en systematisch werken.

Het in staat zijn tot het uitvoeren van genoemde wiskundige activiteiten (structureren, generaliseren, vergelijken, ordenen, concretiseren, visualiseren en systematisch werken), blijkt bijvoorbeeld uit het handig kunnen gebruiken van basiskennis, het gevoel hebben voor structuren- of de orde van grootte van getallen, het maken van effectieve schattingen, het herkennen van patronen, het zien van soortgelijke oplossingen, het zich kunnen voorstellen van getallen of bewerkingen met getallen en zo meer.