Het moet en kan beter?!

Wat dan? Voor wie? En hoe?

A. van Streun
Voorzitter werkgroep rekenen & wiskunde
Expertgroep Doorlopende Leerlijnen Taal en Rekenen.

1 oriëntatie

in het nieuws

Het onderwijs is in het nieuws. Er gaat geen week voorbij of er zijn alarmerende berichten over de kwaliteit van ons onderwijs, met name wat betreft taal en rekenen. Een troost voor de leraren is dat ook het onderwijsbeleid en het onderwijsmanagement forse kritiek krijgt. Dat is wel eens anders geweest! Nog niet zo lang geleden was alles wat slecht ging in het onderwijs de schuld van de leraren, die niet met hun tijd meegingen en nog ouderwets, ja zelfs soms klassikaal, les gaven. Alarmerende berichten leiden helaas veelal niet tot serieuzer onderzoek, maar tot vragen aan de minister.
Wat denkt de minister aan deze 'kennelijk' rampzalige toestand te doen? En de (vorige) minster zoekt wijsheid en wint tijd door een commissie in te stellen. Deze keer werd het een breed samengestelde groep 'experts' uit alle sectoren van het onderwijs, zowel bestuurders als vakdeskundigen. In vier maanden tijd zijn de leerlijnen rekenen en wiskunde vanaf het primair onderwijs tot aan het hbo doorgelicht door een nog breder samengestelde werkgroep rekenen & wiskunde, waarin het po, vmbo, havo-vwo, mbo, pabo, hbo en wo door 'experts' waren vertegenwoordigd, evenals instituten als de SLO, het FIsme en het APS. Een werkgroep die ik mocht voorzitten. Het eindrapport 'Over de drempels met rekenen' is te vinden op de website van de SLO, evenals het algemene eindrapport over taal en rekenen (Expertgroep Doorlopende leerlijnen, 2008a, 2008b).

zorgpunten

We hebben gekeken naar de instroom op de pabo en geconstateerd dat een groot deel van die studenten de laatste zes jaar in vmbo en mbo niet meer hebben gerekend en daarvoor tot de veelal zwakke rekenaars behoorden. We hebben gekeken naar het verwante probleem van de uitstroom van het mbo naar het gehele hbo, waarvoor hetzelfde geldt. We hebben geconstateerd dat de instroom in havo-vwo niet op hun sterke en zwakke kanten in het rekenen wordt aangesproken, zodat er van een doorlopende rekenlijn amper sprake is. We hebben de diverse Periodieke Peilingsonderzoeken voor het rekenen van de laatste twintig jaar naast elkaar gelegd om te zien wat er verbeterd en verslechterd is. Het onderzoeksrapport over tekortschietende rekenvaardigheden van verpleegkundigen (DUO Market Research, 2007) was aanleiding tot zorg, vooral onder de oudere leden van onze werkgroep.

lichtpunten

Er waren ook wel lichtpunten. De onderzoekers van het cohortenonderzoek van het GION, naar verluid het duurste langlopende onderwijsonderzoek in Nederland (Kuyper & Van der Werf, 2007), konden er niet onderuit; de prestaties van vijftienjarigen gingen er de laatste vijf jaar op het gebied van rekenen en wiskunde zelfs op vooruit! Met name was dat het geval op het vmbo. En wat te zeggen van PISA (Dekker e.a., 2006a, 2006b) en TIMSS (Vos, 2007a, 2007b)? Nederland staat voor rekenen-wiskunde onbetwist in de top vijf van de hele wereld. Maar ja, we zakten met de laatste PISA een beetje naar de vijfde plaats in de wereld en de tweede plaats in de OESO-landen. Herinnert u zich de negatieve krantenkoppen in december 2007 nog? Passen de conclusies uit empirisch onderzoek niet bij uw vooroordeel? Dan deugen de opgaven niet, de 'kale' reken- en wiskundesommen in TIMSS of de 'toegepaste' sommen in PISA, al naar gelang uw vooroordeel. Toch zijn bijna alle ontwikkelde westerse landen afgunstig op de positie van Nederland! Vooral onze zwakste groep doet het goed, want de spreiding in de Nederlandse resultaten is gering. Dat geldt door de jaren heen zowel voor TIMSS als PISA. De Vlaamse top scoort duidelijk beter dan de Nederlandse top. De Vlaamse minister van Onderwijs en Vorming merkt daarover in een persbericht van 4 december 2007 het volgende op:

> Ik hecht een zeer groot belang aan deze internationale onderzoeken. Zij leveren een perspectief op de sterktes en zwaktes van ons onderwijsbestel. De titel van mijn beleidsnota in 2004, 'Vandaag kampioen in wiskunde, morgen ook in gelijke kansen', was rechtstreeks beïnvloed door de resultaten van PISA 2003. Deze toonden aan dat Vlaanderen in gemiddelde resultaten kwalitatief tot de internationale top behoort, maar dat er tegelijk een zeer grote en door sociaal-economische factoren bepaalde kloof bestaat tussen sterke en zwakke leerlingen. De nieuwe resultaten zijn een aanleiding om de analyse te bevestigen en te verbreden.[1]

Wellicht dat onze minister op grond van het internationale onderzoek een beleidsnota moet uitbrengen onder de titel: 'Vandaag kampioen in gelijke kansen, morgen ook kampioen in wiskunde'.

twee sporen in het kennen en kunnen van rekenen en wiskunde

Een kenmerk van rekenen-wiskunde is de cumulatieve structuur van het vakgebied, waarin begrippen en rekenprocedures op elkaar voortbouwen. Een voorwaarde voor het kunnen verwerven van nieuwe kennis en vaardigheden is de 'beheersing' van de begrippen en methoden waarop wordt voortgebouwd. In de discussie binnen de Expertgroep, waarvan slechts enkele leden inhoudelijke kennis van rekenen-wiskunde hadden, bleek bij voortduring dat deze cumulatieve structuur duidelijk en essentieel verschilt van de structuur en dus ook de didactiek van andere vakgebieden.

Het 'voortbouwen' op die bestaande kennis kan gaan in de richting van het 'functioneel gebruiken' in allerlei situaties uit het dagelijks leven, uit andere vakgebieden en uit praktijk- of beroepssituaties. Dat voortbouwen kan ook een verder verdiepen zijn van de bestaande kennis in de richting van formaliseren, abstraheren en generaliseren, aansluitend bij de wiskundevakken in het voortgezet onderwijs. Daarom zijn in het onderwijs voor het rekenen twee *sporen* onderscheiden met verschillende accenten, namelijk het *F*-spoor (fundamentele kwaliteit) met *functioneel gebruiken* als zwaartepunt en het *S*-spoor (streefkwaliteit), waarin het formaliseren, generaliseren en abstraheren een belangrijke rol speelt, samengevat met de term *verdiepen*.

wat? voor wie? waarom? hoe?

In dit artikel probeer ik duidelijk te maken welke argumentatie heeft geleid tot onze keuzen voor de inhoud van elk van de genoemde referentieniveaus (het 'wat') en geef ik aan waar onze keuze voor de verschillende doelgroepen op is gebaseerd (voor 'wie'). Dat viel onder de opdracht van de Expertgroep. Daarnaast ga ik in op het 'waarom' van de gekozen indeling van kennen en kunnen en geef ik aan langs welke weg mogelijkerwijs de gewenste verbetering tot stand kan worden gebracht (het 'hoe'). De probleemanalyse van die twee aspecten mag in deze conferentiebundel niet ontbreken en komt geheel en al voor mijn verantwoording, even als andere didactische beschouwingen.

2 ontijdig onderbroken en afgebroken leerlijnen

struikelend over drempels en klimmend uit ravijnen

De route van leerlingen door ons onderwijsstelsel blijkt inderdaad over drempels en door ravijnen te gaan. Veel van de rekenproblemen die in allerlei deelonderzoeken zijn geconstateerd zijn een rechtstreeks gevolg van de *defecten* in ons onderwijsstelsel. Neem bijvoorbeeld het feit dat de helft van de gediplomeerden van de mbo-opleiding tot onderwijsassistent doorstroomt naar de pabo en daar een aanzienlijk deel van de groep eerstejaars pabo-studenten vormt. Die binnenstromende studenten hebben de laatste vier jaar op het mbo niet meer gerekend, want rekenen en/of wiskunde is daar geen onderdeel van het curriculum. Daarvoor heeft een deel van deze groep na twee jaar vmbo het vak wiskunde laten vallen en op die leeftijd van dertien à veertien jaar behoorden die leerlingen tot de zwakste rekenaars van de totale leerlingenpopulatie. Met andere woorden, na een zwakke start met de ontwikkeling van hun rekenvaardigheden hebben ze zes jaar niet meer gerekend. En zo komen ze aan bij de pabo! Welkom, goed gemotiveerd, maar met veel te weinig inhoudelijke bagage.

doorgaande rekenlijnen

Hetzelfde geldt natuurlijk voor de uitstroom van het mbo in de meeste andere sectoren, waar rekenen of wiskunde geen integraal onderdeel van het curriculum vormt. Wij bevelen aan dat alle vmbo-leerlingen, dus ook de 20 procent van de vmbo-leerlingen die nu het vak wiskunde laat vallen, minimaal het basale referentieniveau 2*F* (burgerschapsniveau) moet bereiken. Dat kan worden gerealiseerd door ze minimaal het rekendomein uit het vmbo examenprogramma wiskunde kader-beroeps te laten volgen. In het mbo moet minimaal dat niveau structureel worden onderhouden en voor de vierjarige mbo moet 2*F* worden uitgebreid tot referentieniveau 3*F*. Op die manier moet de genoemde kloof van een zes jaar ontijdig onderbroken leerlijn rekenen worden gedicht.
Additioneel achten wij het wenselijk om een module 'Getallen' (3*S*) te ontwikkelen, die zowel in het mbo (de opleiding tot onderwijsassistent) als de bovenbouw havo-studenten de mogelijkheid biedt om zich in de vrije keuzeruimte beter voor te bereiden op de pabo dan met het uitgebreide burgerschapsniveau 3*F* mogelijk is. Wij achten een goede eigen rekenvaardigheid en inzicht in de structuur van de getallenwereld een noodzakelijke beginvoorwaarde voor het op niveau leren onderwijzen van rekenen in het basisonderwijs.

aansluiting primair onderwijs op havo-vwo

Ook bij de overgang van het basisonderwijs naar havo-vwo sluiten van beide kanten de leerlijnen rekenen en wiskunde niet goed aan. In de onderbouw havo-vwo wordt niet meer systematisch gewerkt aan het onderhouden en uitbreiden van de verworven kennis en vaardigheden op het gebied van het rekenen.
Op basis van de referentieniveaus moeten in nationaal en regionaal overleg tussen scholen voor basisonderwijs en voortgezet onderwijs die leerlijnen worden geharmoniseerd.

3 weten over weten: houding, motivatie, vertrouwen en reflectie

Op pagina 13 van het rapport 'Over de drempels met rekenen' lezen we het volgende:

> In alle discussies over het kennen en kunnen van leerlingen, de toetsbare componenten van kennis en vaardigheden, moeten we niet vergeten dat voor een goede leeropbrengst het essentieel is dat leerlingen leren reflecteren op hun eigen kennis en aanpak en zelfvertrouwen ontwikkelen. Het gaat dan om het ontwikkelen van een positieve houding ten aanzien van het leren van rekenen en wiskunde; het is interessant, het geeft voldoening en ik kan het. Met recht kunnen deze streefdoelen zelfs voorwaardelijk worden genoemd voor het verwerven van de andere componenten van wat we leerlingen in onze scholen willen leren.

Of, zoals De Groot en Traas het in 1980 formuleren:

> Een school waarin de leraren er niet in slagen leerlingen te laten ervaren dat leren leuk en bevredigend kan zijn, zo'n school deugt niet. Een belangrijker onderwijsdoelstelling dan 'leren leuk gaan vinden' zou ik niet weten. Lukt dat niet dan is eigenlijk alles verloren.

Onze meest beroemde schoolmeester is ongetwijfeld Theo Thijssen (1927), wiens boekje 'De gelukkige klas' in 2007 op grote schaal is verspreid. Op pagina 125 vertelt hij over de introductie van de decimale schrijfwijze van getallen. Ik citeer zijn afsluitend commentaar:

> Zie, we hebben van de week nog wel wat anders gedaan. Maar de tiendelige breuken hebben alles overheerst, door het zo sterkend succes; het bijna tastbare succes dat de kinderziel behoeft voor zo'n groei.

Onderwijs dat niet het vertrouwen, het gevoel van succes, het idee van 'dit kan ik' weet te stimuleren, is voor leerlingen niet de moeite waard. Thijssen doet zijn didactisch geweten soms geweld aan om dat vertrouwen maar te kunnen bevorderen.

We kennen wereldwijd het tegengestelde effect van reken- en wiskundeonderwijs. Omstreeks 1970 (die goede oude tijd met opa's algoritmen en algebra in de scholen) heb ik een tiental jaren in totaal aan een duizend studenten van een mo-*A* pedagogiek opleiding statistiekonderwijs mogen verzorgen. Allemaal volwassenen, onderwijzers, kleuterleidsters en maatschappelijk werkers. In de eerste lesuren liet ik ze in groepen een angstschaal ontwerpen en zo kwamen alle verhalen over onbegrepen algoritmen en algebra boven. Zeker de helft keek vooraf vol angst naar dat wiskundevak statistiek. Dezelfde angst die jaren later twee meisjes bij de Gamma uitstraalden, toen ze de prijs van een regenpijp van drie meter lengte moesten uitrekenen, terwijl de prijs van vier meter negentien gulden was (Van Streun, 2001)! We constateren dat het nieuwe wiskundeprogramma 12-16, tegelijk met de basisvorming ingevoerd, een veel positiever houding van leerlingen in het vmbo en de onderbouw havo-vwo ten opzichte van het schoolvak wiskunde teweeg heeft gebracht dan voorheen het geval was. Daar ligt voor die doelgroep in Nederland geen knelpunt.

4 rekening houden met verschillen

opa vertelt

Opa's zijn 'in', ze nemen de tijd om te luisteren, moet u maar denken. En in de didactiek van rekenen-wiskunde nemen ze weer een belangrijke plaats in. Mijn oratie sloot ik onder andere af met de volgende beschouwing (Van Streun, 2001):

> Freudenthal wandelde met zijn kleinzoon Bastiaan en schreef daar een boek met didactische verhandelingen over. Met mijn kleinkinderen zaag ik bomen om en verjaag ik rovers uit het naburig bosje. Ik zie daar nog geen boek uit voortkomen.

Ik heb me bedacht! Het zal u niet zijn ontgaan dat J. van de Craats ten strijde is getrokken tegen een trend in het rekenen in het basisonderwijs. Kort samengevat gaat het om 'handige' methoden (handig staat tussen aanhalingstekens) als kolomsgewijs rekenen, de hapmethode en dergelijke versus het onderwijzen van de bekende algoritmen, uit te rekenen met pen en papier. Ik kom daar later nog op terug. Een andere opa, een creatieve en door mij zeer gerespecteerde rekendidacticus, W. Uittenbogaard (2007), heeft daar in het tijdschrift 'Reken-wiskundeonderwijs: onderzoek, ontwikkeling, praktijk' weer op gereageerd met zijn uitleg aan kleinkinderen.

Tja, het geval wil dat wij acht kleinkinderen hebben. Het is de kerstvakantie twee jaar geleden dat ik met mijn vier logeetjes, Sietze, tien jaar, zus Marieke, acht jaar, Adriaan, acht jaar en zus Melinda, zeven jaar in de auto op weg ben naar Speelstad Oranje. Het onderlinge gesprek gaat over rekenen en die oersaaie sommen met bussen. Ik spits mijn oren.

> Melinda zegt resoluut: 'Ik vind rekenen stom, ik wil er niet over praten.' Marieke meldt dat zij verhaaltjessommen stom vindt. Ik vraag: 'Bedoel je dat je ze moeilijk vindt?'
> 'Ja', zegt Marieke. 'Wat vind je moeilijk?'
> 'Kijk opa, ik kan in die verhaaltjes de som niet vinden.'
> Een geniale analyse! De jongens snuiven dat ze die verhaaltjessommen schietgemakkelijk en oersaai vinden.
> Dat kan ik niet op me laten zitten. Er schiet me een klassiek verhaal uit de didactische literatuur binnen. 'Sietze, Adriaan, dan heb ik nu voor jullie

> een mooie som.' Oké, ze hebben er zin in! We zijn nog niet in Speelstad Oranje. 'Een reddingboot vaart uit met een kapitein en vier bemanningsleden. Ze redden 34 drenkelingen. Hoe oud is de kapitein?'
> Adriaan zegt onmiddellijk: '39 jaar'.
> Sietze kreunt en steunt en zegt dan verwijtend: 'Opa, dat kun je niet weten!'

In een notendop alle didactische problemen en mogelijkheden.

uitdagend versus versuffend rekenonderwijs

Rekening houden met verschillen, daar gaat het om. Er zijn leerlingen die bliksemsnel met getallen kunnen omgaan, op grond van een enkel voorbeeld kunnen generaliseren, al heel jong kunnen formaliseren en abstraheren. Wij denken dat die leerlingen, zeg de top-20, in de gangbare schoolpraktijk van het basisonderwijs pas op de plaats moeten maken en niet de bij hen passende ontwikkelingsmogelijkheden worden aangeboden. En dan bedoelen we niet wat extra sommetjes om ze bezig te houden. Aanbeveling 7 zegt dan ook:

> Rekening houden met verschillen houdt voor rekenen & wiskunde ook in dat de leerlingen die beter kunnen abstraheren, formeel manipuleren en generaliseren dan de modale leerlingen in hun onderwijsgroep door het verdiepen worden uitgedaagd om in de beschikbare tijd hun plafond te benaderen.

Voor die groep hebben we geen referentieniveau geformuleerd, maar verwijzen we naar additief lesmateriaal van bijvoorbeeld 'Vierkant' en naar de publicatie van K. Buijs (2007).

het basale minimum

Het *F*-spoor (het 'basale minimum') loopt vanaf het basisniveau op twaalfjarige leeftijd (1*F*, fundamentele kwaliteit) naar het burgerschapsniveau op zestienjarige leeftijd (2*F*, fundamentele kwaliteit), met een mogelijke verbreding of toespitsing naar de leeftijd van omstreeks achttien jaar (3*F*, fundamentele kwaliteit). Niveau 2*F* beschouwen we als het minimale niveau dat alle Nederlanders zouden moeten beheersen om op het gebied van rekenen maatschappelijk goed te kunnen functioneren, samenvallend met het rekendomein van de huidige examenprogramma's wiskunde van het vmbo BB-KB.

Concentreren we ons op het uitstroomniveau van het basisonderwijs dan gaat het om het minimale niveau 1*F* dat nodig is om een goede start te kunnen maken in het vmbo BB of KB. In omvang gaat het om ruim 30 procent van de totale leerlingenpopulatie. In de doelbeschrijving en de voorbeelden van dit referentieniveau nemen we opgaven uit het 25^{e} percentiel (*P*25) van PPON 2004.

1F paraat hebben - getallen

Optellen en aftrekken (waaronder ook verschil bepalen) met gehele getallen en eenvoudige decimale getallen:
235 + 349; 1268 – 385; € 2,50 + € 1,25

1F paraat hebben - getallen

- delingen uit de tafels (tot en met tien) uit het hoofd kennen;
- ook met complexere getallen en decimale getallen: 18 : 100; 1,8 $\times$ 100;
- volgorde van bewerkingen.

1F paraat hebben - getallen

- vermenigvuldigen van een getal van twee cijfers met een getal van twee cijfers: 35 $\times$ 67 = ;
- getallen met maximaal drie cijfers delen door een getal met maximaal twee cijfers, al dan niet met een rest: 132 : 16 = ;

1F paraat hebben - getallen

- vergelijken en ordenen van de grootte van eenvoudige breuken en deze in betekenisvolle situaties op de getallenlijn plaatsen;
- optellen en aftrekken van veel voorkomende gelijknamige en ongelijknamige breuken binnen een betekenisvolle situatie op de getallenlijn plaatsen:
  $\frac{1}{4}$ liter is minder dan $\frac{1}{2}$ liter;
- omzetten van eenvoudige breuken in decimale getallen:
  $\frac{1}{2}$ = 0,5; 0,01 = $\frac{1}{100}$;
- optellen en aftrekken van veel voorkomende gelijknamige en ongelijknamige breuken binnen een betekenisvolle situatie:
  $\frac{1}{4} + \frac{1}{8}$; $\frac{1}{2} + \frac{3}{4}$.

1S paraat hebben - getallen

- een geheel getal vermenigvuldigen met een breuk of omgekeerd;
- vereenvoudigen en compliceren van breuken en breuken als gemengd getal opschrijven:
  $\frac{6}{8} = \frac{3}{4}$; $\frac{1}{5} = \frac{20}{100}$; $\frac{25}{4} = 6\frac{1}{4}$;
  :
- een breuk met een breuk vermenigvuldigen of een deel van een deel nemen, met name in situatie:
  $\frac{1}{2}$ deel van $\frac{1}{2}$ liter;
- een geheel getal delen door een breuk of gemengd getal:
  10 : $2\frac{1}{2}$;
- een breuk of gemengd getal delen door een breuk, vooral binnen een situatie:
  $1\frac{1}{2}$: $\frac{1}{4}$ hoeveel pakjes van $\frac{1}{4}$ liter moet je kopen als je $1\frac{1}{2}$ slagroom nodig hebt?

1S paraat hebben - getallen

Invuloefening: je mag de volgende symbolen gebruiken:
+ (optellen), š (aftrekken), x (vermenigvuldigen), ; (delen) = (is gelijk aan), < (is kleinder dan) en > (is groter dan).

$\frac{1}{8} \cdots \frac{1}{9}$ $\qquad$ $\frac{5}{7} \cdots \frac{5}{9} = \frac{5}{72}$

$\frac{1}{a} \cdots \frac{1}{(a+1)}$ $\qquad$ $\frac{1}{a} \cdots \frac{1}{a} = \frac{2}{a}$

1F functioneel gebruiken - verhoudingen
- notatie van breuken (horizontale breukstreep), decimale getallen (kommagetal) en procenten (%) herkennen;
- taal van verhoudingen (per, op, van de);
- verhoudingen herkennen in verschillende dagelijkse situaties (recepten, snelheid, vergroten-verkleinen, schaal, enzovoort).

1S paraat hebben - verhoudingen
- procenten als decimale getallen (honderdsten);
- veel voorkomende omzettingen van percentages in breuken en omgekeerd.

1S functioneel gebruiken - verhoudingen
- breuken en procenten in elkaar omzetten;
- breuken benaderen als eindige decimale getallen;
- verhoudingen en breuken met een rekenmachine omzetten in een (afgerond) kommagetal.

1S weten waarom - verhoudingen
- relatie tussen breuken, verhoudingen en percentages;
- breuken omzetten in een kommagetal, eindig of oneindig.

1F paraat hebben - meten
- schattingen maken over afmetingen en hoeveelheden;
- oppervlakte benaderen via rooster;
- omtrek en oppervlakte berekenen van rechthoekige figuren;
- routes beschrijven en lezen op een kaart met behulp van een rooster.

1S weten waarom - meten
- formules voor het berekenen van oppervlakte en inhoud verklaren;
- beredeneren welke vergrotingsfactor nodig is om de ene (eenvoudige) figuur uit de andere te vormen;
- verschillende omtrek mogelijk bij gelijkblijvende oppervlakte.

1F functioneel gebruiken - verbanden
- kwantitatieve informatie uit tabellen en grafieken gebruiken om eenvoudige berekeningen uit te voeren en conclusies te trekken, bijvoorbeeld:
  In welk jaar is het aantal auto's verdubbeld ten opzichte van het jaar ....?

1S weten waarom - verbanden
- op basis van een grafiek of diagram conclusies trekken over een situatie;
- op basis van een grafiek of diagram voorspellingen doen over een toekomstige situatie.

Bij een opgave *P*25 hoort de verwachting dat 25 procent van de totale leerlingenpopulatie van groep 8 die opgave niet goed maakt. Onze keuze om als ondergrens van 1*F* een *P*25-opgave aan te nemen, houdt een flinke ambitie in, want op dit moment beheerst het merendeel van de groep leerlingen die instroomt in vmbo BB-KB die opgave matig of onvoldoende. Dat moet beter, zo oordeelt de Expertgroep. Aanbeveling 15 stelt:

> Het percentage leerlingen dat minimaal het referentieniveau 1F behaalt moet toenemen van 75% naar 85%.

het modale niveau

Het *S*-spoor (het modale niveau) loopt vanaf het streefniveau op twaalfjarige leeftijd (1*S*, streefkwaliteit) naar het streefniveau op zestienjarige leeftijd 2S, met een mogelijke doorloop naar 3*S*, omstreeks achttien jaar. Dit andere spoor wordt in de bovenbouw van het basisonderwijs door het grootste deel van de leerlingenpopulatie gevolgd en het verzorgt mede de aansluiting op de wiskundevakken in vmbo TL en havo-vwo en op het gebruik van rekenen en wiskunde in andere vakken. We spreken dan over niveaus 1*S* (streefkwaliteit), 2*S* (streefkwaliteit) en 3*S* (streefkwaliteit), die op elkaar aansluiten en die de fundamentele basisniveaus overlappen. (De terminologie van streefkwaliteit is verwarrend, want het gaat bij rekenen om het modale niveau en niet over de top twintig.) Bij 3*S* gaat het om het (nieuw voorgestelde) rekendomein van het vak wiskunde *A* in de havo-bovenbouw of om enkele technische richtingen in het mbo. Bij de overgangen tussen schooltypen stappen leerlingen deels over van het ene spoor naar het andere spoor, bijvoorbeeld van 2S (vmbo-TL) naar 3*F* (mbo-4), maar ook van 2*S* (vmbo-TL) naar 3*S* (4 havo).
Letten we weer in het bijzonder op de uitstroom van het basisonderwijs, dan is niveau 1*S* bedoeld als de ondergrens voor de 65 procent van de leerlingenpopulatie, die instroomt in vmbo TL en havo-vwo. De ondergrens, want we hebben al eerder opgemerkt dat voor de top-20 een meer adequaat onderwijsaanbod moet komen. Voor het referentieniveau 1*S* is de inhoudelijke afweging dat leerlingen na het basisonderwijs met voldoende bagage kunnen instromen in vmbo-TL of havo-vwo om daar met vmbo TL af te ronden met 2S of in havo-vwo door te gaan naar 3*S*. Globaal gesproken nemen we voor 1S de opgaven uit het 50^{e} percentiel (*P*50) van PPON 2004 als voorbeeld bij onze doelbeschrijvingen. Bij een *P*50-opgave hoort de verwachting dat 50 procent die niet goed maakt. Die keuze om als ondergrens van 1*S* een *P*50-opgave aan te nemen, houdt eveneens een flinke ambitie in, want op dit moment maakt bijna een vierde deel van de groep leerlingen die instroomt in vmbo-TL of havo-vwo die opgave niet goed. Ook dat moet beter, zo oordeelt de expertgroep:

> Het percentage leerlingen dat minimaal het referentieniveau 1S behaalt moet toenemen van 50% naar 65%.

de onderstroom

Een schatting, gebaseerd op PPON en Leerling Volg Systeem (LVS), is dat 10 procent van de populatie in het basisonderwijs ook na de voorgestelde extra inspanning het basale niveau 1*F* niet zal halen. Onderzoek laat nu al zien dat deze leerlingen vanaf groep 6 te weinig leren, omdat zij de basale begrippen en vaardigheden uit de voorgaande jaren nog niet beheersen. Het onderwijsaanbod voor de gehele groep bouwt daar wel op voort, zodat zij alleen nog maar schijnresultaten kunnen boeken. Wij bevelen aan om voor deze groep in het basisonderwijs een afzonderlijk leertraject te ontwikkelen:

> De ambitie van de Expertgroep is dat meer leerlingen de basiskwaliteit 1F zullen behalen dan nu het geval is. Voor de groep leerlingen die vanaf groep 6 in de ontwikkeling van hun rekenvaardigheid stagneert, moet een afzonderlijk leertraject worden ontwikkeld.

5 menselijke informatieverwerking

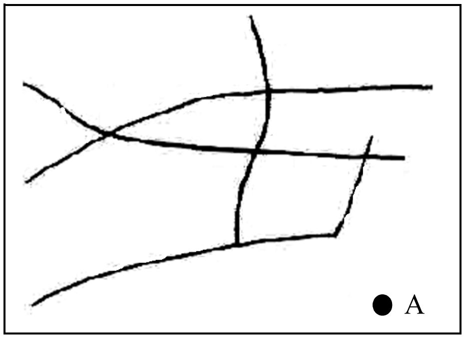
wetenschappelijke kennis

Voordat we verder gaan met de door ons gekozen zwaartepunten in de referentieniveaus is het noodzakelijk om iets te zeggen over het 'waarom' en het 'hoe'. We maken daarbij gebruik van de wetenschappelijk stevig gefundeerde kennis over het menselijk denken en de werking van het geheugen. Ter illustratie gebruiken we plaatjes van R. Skemp (1978), die hij dertig jaar geleden gebruikte bij zijn lezing op de jaarlijkse studiedag van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren. Skemp was een psycholoog, wiskundige en didacticus (1971) op wiens werk in Nederland door J. van Dormolen en andere wiskundedidactici is voortgebouwd (Van Dormolen, 1972; Tall & Thomas, 2002). Veel van wat hij indertijd al betoogde en opschreef is in deze dertig jaar bevestigd door psychologisch onderzoek naar het leren van mensen en de werking van het geheugen. Een standaardwerk als 'How people learn' (Bransford, Brown & Findell, 2000), ondersteunt zonder meer zijn betoog van dertig jaar geleden, evenals de recent verschenen overzichtspublicatie 'Adding it Up' (Kilpatrick, Swafford & Findell, 2001), toegespitst op wiskunde leren en onderwijzen.

wat weet je al?

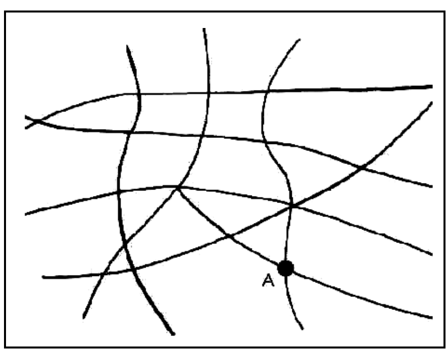
A stelt een situatie, opgave, probleem voor (fig.1). Je neemt het waar, je

leest het en je ziet het, je moet er iets mee, je vraagt je af of je er iets over weet. Je werkgeheugen, dat is je actueel beschikbare geheugenruimte waarmee je denkt, neemt *A* op.
En het probeert een verbinding te leggen met je langetermijngeheugen. Je werkgeheugen is beperkt van omvang en je kunt maar een beperkt aantal eenheden tegelijk in de aandacht houden, aan werken. (Zie bijvoorbeeld 'Knowing what Students Know' (Pellegrino e.a., 2001)).



figuur 1

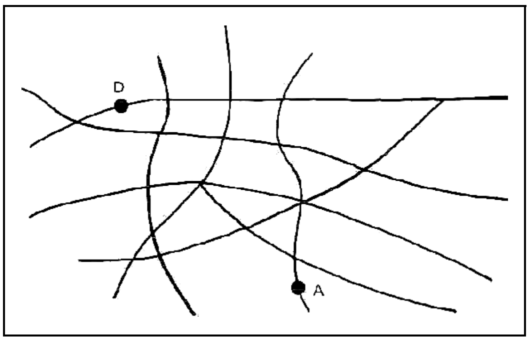
Het werkgeheugen wordt gebruikt om onmiddellijk informatie van de buitenwereld te *bewerken* en te *verwerken*, terwijl er voldoende bewijs beschikbaar is om aan te nemen dat het werkgeheugen input uit het langetermijn-geheugen kan ontvangen. De relatie tussen het probleem en het hopelijk bestaande schema in je lange termijn geheugen is nog niet gelegd. Probleemverkenning, de analyse van de gegeven situatie, heuristieken, plaatje schetsen, een getallenvoorbeeld proberen en dergelijke leiden tot een meer adequate *mentale voorstelling* van de probleemsituatie, waardoor de zoektocht naar relevante kennis meer succesvol kan zijn (fig.2).



figuur 2

een schema oproepen

Kennis is in het menselijk geheugen als het goed is opgeslagen in de vorm van zinvolle clusters, netwerken, knopen en verbindingen, schema's of welk woord je ook maar wilt gebruiken. Je identificeert probleem *A*, je herinnert je iets, je denkt te weten waar het mee te maken heeft, een eerste bijpassend schema wordt opgeroepen uit je lange termijngeheugen. Dit is nog globaal, je plaatst situatie *A* in een bepaald gebied van je geheugen waar je iets over weet (fig.3).



figuur 3

Hier gaat al vaak iets mis, als je geen aandacht hebt voor enige verkenning van het probleem, van de situatie. Voor veel leerlingen en/of studenten betekent deze fase soms het oproepen van een heel arm schema; iets van, oh ja, ik moet wegstrepen. Bijvoorbeeld:

> $3 : \frac{1}{5}$ is? Delen door een breuk is iets omkeren en vermenigvuldigen, maar wat moet je omkeren?

Leerlingen produceren soms vijf verschillende antwoorden met diverse rekenregels. Of gaan ze terug naar de betekenis van delen: hoe vaak gaat $\frac{1}{5}$ in 3?

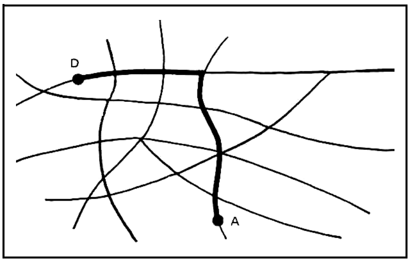
In een soort Pavlov-reactie kun je in je geheugen de opgave koppelen aan een rekentruc. Die associatieve koppeling zonder betekenis gaat alleen goed als direct na de training weer eenzelfde opgave volgt of de toets nog dezelfde week is. Het gaat al mis als er meerdere rekentrucs in aanmerking komen. Maar sommige leerlingen kunnen de diverse rekenoperaties wel goed uit elkaar houden. En in het onderwijs kun je expliciet werken aan overzichten van rekenregels gekoppeld aan de condities waarin ze van toepassing zijn.

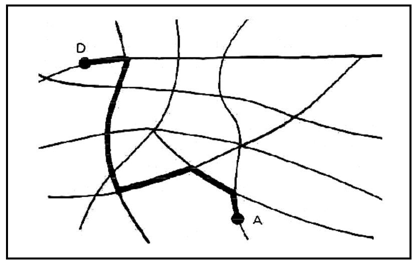
de weg zoeken in het schema

Ik ben in *A* en ik moet naar *B*. Hoe kom ik daar? Heb ik iets in huis, in mijn lange termijn geheugen, waarmee ik die weg kan vinden? Soms moet ik een plan maken, bedenken wat ik achtereenvolgens moet doen. Hier zijn we al in het gebied van de probleemaanpak. Wat helpt mij om die weg te vinden?

oplossingswegen

Het kan zo (fig.4a). maar het kan ook anders (fig.4b).

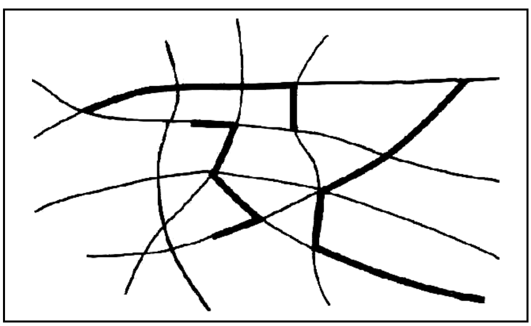




figuur 4a en figuur 4b

routines

Zo zijn er meerdere routes in een bepaald kennisgebied die vaak kunnen worden bewandeld. Dat zijn de routines, snel op te roepen, feilloos uit te voeren, gememoriseerd, een belangrijk facet van ‘weten dat’; paraat hebben en paraat houden.

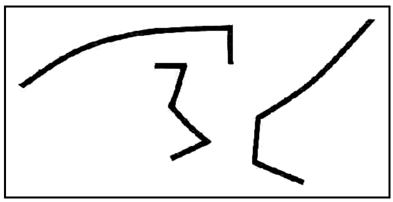


figuur 5

Kun je een probleem of situatie na verkenning direct koppelen aan een relevante routine om een deelhandeling bijna automatisch uit te voeren, dan houd je ruimte over in je werkgeheugen om aan het eigenlijke probleem te werken. Kun je dat niet en moet je ook die deelhandeling opnieuw heruitvinden, dan raak je intussen het zicht op het eigenlijke probleem kwijt. Want je werkgeheugen raakt overbelast (fig.5).

losgeraakte routines

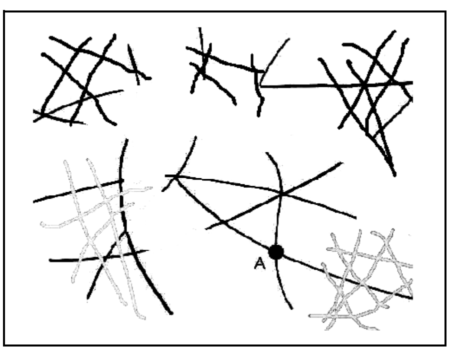
We komen nu bij een serieus didactisch probleem, dat Freudenthal in 1980 op het internationaal congres over wiskundeonderwijs tot een van de hoofdproblemen van de didactiek benoemde (Freudenthal, 1981).[2] Afzonderlijk trainen en oefenen, zonder samenhang met andere begrippen en methoden kan leiden tot onbegrip! En niet oefenen leidt tot een te zwakke beheersing. Links het voorbeeld, rechts 25 opgaven, werkt voor het inoefenen van de procedure, maar is niet wendbaar voor de situaties waarin je die procedure nodig hebt. Gevarieerd oefenen is nodig, het koppelen aan betekenissen, aan het grotere geheel, aan de situaties waarin de procedure wordt gebruikt. Toetsing van de routines in een wilde, steeds groeiende, verzameling opgaven en allerlei contexten (fig.6).



figuur 6

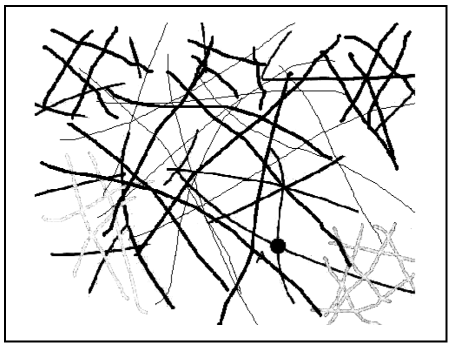
schema's rijk aan betekenis

Waarom moet rekenen-wiskunde een basisvak in elk algemeen vormend curriculum zijn? Over welke inhouden hebben we het dan eigenlijk? In de geschiedenis van het onderwijs in rekenen en wiskunde zijn daar verschillende antwoorden op gegeven. In Nederland hebben we al lang geleden gekozen voor een zwaar accent op het functioneren van de kennis en vaardigheden buiten het vakgebied.



figuur 7

De schoonheid van het getalsysteem, de historische waarde van de meetkunde, de culturele waarde, het leren redeneren of denken, het bleek voor rekenen en wiskunde niet genoeg voor de bepaling van de inhouden. Het rekenen stond heel lang in het teken van het cijferen; lange rijen berekeningen heel overzichtelijk en foutloos uitvoeren, want maatschappelijk was dat vroeger heel belangrijk (fig.7). Tegenwoordig ligt de nadruk veel meer bij het functioneel gebruiken van die kennis en routines in allerlei situaties. We weten al heel lang dat die transfer niet van zelf gaat en dat het strikt noodzakelijk is om die situaties ook te koppelen aan het cognitieve schema van de kern aan rekenkundige en wiskundige begrippen en operaties (fig.8).



figuur 8

Die terechte keuze voor het leggen van een stevige verbinding met de buitenwereld lijkt evenwel te leiden tot een voor leerlingen redelijk chaotisch beeld van wat er in wiskunde aan de orde is. De strakke structuur van de meeste wiskundige deelgebieden heeft de charme van de eenvoud en het overzicht, maar bleek in het verleden in de hoofden van de meeste leerlingen tot een afgesloten systeem te leiden, waardoor de transfer naar toegepaste situaties slecht verliep. Te verwachten, want in het cognitieve schema waren die situaties niet inbegrepen.

Op dit moment zien we een totaal door elkaar lopen van allerlei soorten opgaven, situaties, formele rekenregels, intuïtieve methoden, enzovoort. We werken in de onderwijspraktijk in het reken- en wiskundeonderwijs met schoolboeken en ander lesmateriaal waarin het zelfs voor experts lastig is om de kernen en doorlopende leerlijnen op te sporen. Laat staan voor de leerlingen. Dat brengt ons op de vraag hoe en wat we moeten onderwijzen, opdat de leerlingen optimaal een samenhangend en wendbaar schema aan begrippen, methoden en routines kunnen verwerven. Dat voert ons in dit artikel te ver.

6 weten dat, weten hoe, weten waarom

paraat hebben: weten dat

In de beschrijving van de referentieniveaus en de ambities hebben we elkaar in de werkgroep vanuit heel verschillende invalshoeken gevonden in de constatering dat het in alle sectoren van ons onderwijs in rekenen en wiskunde ontbreekt aan duidelijkheid over wat leerlingen 'paraat' moeten hebben. Zowel leraren als leerlingen slagen er veelal niet in om in de rijke hoeveelheid aan onderwerpen en situaties uit de huidige schoolboeken te identificeren wat de belangrijkste 'kernbegrippen' en 'rekenoperaties' zijn die leerlingen vanuit hun lange termijn geheugen onmiddellijk moeten kunnen actualiseren en toepassen. We hebben gezien dat het ontbreken van dat 'paraat hebben' tot gevolg heeft dat leerlingen al bij de verkenning van een probleem die feitelijke kennis moeten gaan heruitvinden, waardoor ze wegens de overbelasting van hun werkgeheugen het zicht op de eigenlijke situatie kwijt raken.
Hier ligt het belangrijkste aanknopingspunt voor een verbetering van de opbrengst van ons reken- en wiskundeonderwijs. Het opvoeren van het beheersingsniveau van een kern aan feiten, begrippen, rekenoperaties tot het niveau van 'paraat hebben' vereist de volgende onderwijsactiviteiten:

1 Identificatie van de kern die leerlingen paraat moeten hebben en houden.
2 Systematisch oefenen totdat het beheersingsniveau van paraat hebben is bereikt.
3 Systematisch diagnostisch toetsen om na te gaan of dat niveau nog aanwezig is.
4 Systematisch intern in de scholen onderhouden van die kern aan 'weten dat'.
5 Systematisch gebruiken van die kern in functionele situaties.

Ad 1: in de komende jaren zijn de referentieniveaus richtinggevend, omdat daar al het onderscheid naar beheersingsniveaus is gemaakt.
Ad 2: in het overzicht van de vorige paragraaf is voldoende duidelijk gemaakt dat het oefenen alleen maar zin heeft als het gekoppeld blijft aan het rijke schema, dus gekoppeld blijft aan de betekenissen en de situaties, waarin die kern aan kennis moet worden gebruikt.
Ad 3: diagnostisch toetsen kan op heel veel goede manieren, vanaf een rekendictee tot aan een mooi computerprogramma met ingebouwde feedback. De nadruk ligt uitdrukkelijk bij diagnostisch, dat wil zeggen toetsen om op te bouwen, vertrouwen te versterken en niet om af te rekenen.
Ad 4: het onderhouden door de jaren heen blijft vooral in het voortgezet onderwijs nogal eens achterwege. De instroom wordt niet gediagnosticeerd en het verloop door de jaren heen ook niet.

Ad 5: de volledige beheersing van die kern aan ‘weten dat’ is geen doel op zich, maar staat in functie van het daarmee kunnen aanpakken of oplossen van problemen, binnen het domein van rekenen en wiskunde of daarbuiten. Die activiteit hoort gekoppeld te blijven aan het oefenen en onderhouden.

functioneel gebruiken: weten hoe

Een tweede component van de kennis en vaardigheden die leerlingen moeten verwerven is natuurlijk het functioneel gebruiken van hun kennis, inzicht en vaardigheden in allerlei situaties. Het kunnen gebruiken van een basis aan kennis en vaardigheden van rekenen & wiskunde in verschillende situaties buiten dat vakgebied is een essentiële doelstelling van de algemene vorming en de belangrijkste component van de te verwerven competentie in rekenen & wiskunde voor alle vormen van onderwijs. Die noodzakelijke basis varieert in breedte, diepgang en abstractie voor vmbo, havo-vwo, type beroepsonderwijs en per sector. De term ‘gebruiken’ is verwant met het begrip ‘horizontaal mathematiseren’. Dan gaat het erom dat een situatie van buiten de wiskunde in wiskundige termen wordt vertaald. Dat stelt eisen aan de inhoud van het cognitieve schema van leerlingen en aan hun vermogen om een nieuw probleem aan te pakken. Van dit type opgaven uit de referentieniveaus mag worden verwacht dat leerlingen ze na wat gepuzzel over het algemeen goed maken. (We hebben in de werkgroep wel kennis genomen van het feit dat Nederlandse leerlingen in de verschillende internationale onderzoeken niet zo goed zijn in het oplossen van problemen die wat complexer zijn dan de simpele recht toe, recht aan opgaven.)

verdiepen: weten waarom

In de bovenbouw van het primair onderwijs tekenen zich al snel groepen leerlingen af die aan een enkel voorbeeld genoeg hebben om de onderliggende abstractie of regel of generalisatie te vatten. Leerlingen die aan een enkel voorbeeld het gemeenschappelijke in rekensituaties herkennen en die op grond van hun overzicht, hun inzicht, hun interpreteren van de betekenis, kunnen uitleggen waarom iets werkt of waar is of correct is. In potentie zijn dat kwaliteiten van leerlingen die het waard zijn om te worden gestimuleerd en ontwikkeld. De gangbare praktijk is dat die leerlingen pas op de plaats moeten maken voor de modale leerlingen die meer voorbeelden, oefeningen en verwerkingstijd nodig hebben. Dat geldt zeker voor het primair onderwijs, maar ook in de onderbouw van het voortgezet onderwijs wordt in de schaarse rekenlijnen zelden materiaal aangeboden dat dieper graaft als aanvulling op een horizontale verbreding.

Wij pleiten er daarom voor om in het onderwijsaanbod in de bovenbouw van het basisonderwijs en de onderbouw van havo-vwo deze groep leerlingen de kans te geven zich te 'verdiepen'. De term 'verdiepen' is verwant met het begrip 'verticaal mathematiseren'. Dan gaat het erom dat wiskundige verschijnselen met wiskundige middelen van hoger niveau worden geordend of georganiseerd. Denk bijvoorbeeld aan het bestuderen van de structuur van het getalsysteem, van de ligging van priemgetallen, van Egyptische breuken of van het voortzetten van meetkundige of getallenpatronen, enzovoort.

7 hoe nu verder?

stemmingmakerij?!

De discussies over de kwaliteit van het Nederlandse (reken)onderwijs kenmerken zich de laatste jaren helaas door het elkaar beschieten vanuit loopgraven. Enerzijds is er de heimwee naar vroeger, toen iedereen goed kon rekenen. Aanwijsbaar onjuist als je de hele populatie meeneemt en niet alleen de 12 procent die naar de hbs of het gymnasium ging of de 30 procent die de ulo bezocht. Stemmingmakerij als je niet meeweegt dat leerlingen heel veel andere vaardigheden verwerven die essentieel zijn voor hun functioneren in de moderne maatschappij. Veel opa's kunnen in dat opzicht beter in de leer bij hun kleinkinderen. Anderzijds lijkt de trend in alle schoolvakken eenzijdig te zijn doorgeschoten in de richting van 'zoek het maar uit' of 'zoek het maar op'. Het is hoog tijd om dierbare, didactische opvattingen die de laatste decennia opgeld deden eens kritisch tegen het licht te houden. Wat leveren ze in de praktijk aan opbrengsten op?

natuurlijk kan het beter!

Het is volstrekt helder dat de verkokering van ons onderwijsstelsel heeft geleid tot onaanvaardbare breuken in de doorgaande leerlijnen van leerlingen. Een verkokering die ook in de bestuurlijke organen tot en met het ministerie doorwerkt en het zelfs moelijk maakt om er iets constructiefs aan te doen. Dat moet en kan nationaal en regionaal beter.
Daarnaast heeft de werkgroep (met expertise uit allerlei stromingen en sectoren) zich verenigd in de conclusie dat er veel meer helderheid moet komen in wat leerlingen op elk referentieniveau vlot moeten beheersen (paraat hebben) en functioneel moeten kunnen gebruiken. Een sterkere focus op de beschreven inhouden met de bijpassende beheersingsniveaus moet en kan op zich al tot betere resultaten leiden.

welke didactiek werkt wel?

Iedereen die onderwijs heeft ‘genoten’, heeft wel een mening over het onderwijzen, de didactiek. Ook in onze werkgroep liepen die meningen op microdidactisch niveau nogal uiteen. We zijn het eens over meer aandacht voor: paraat hebben, consolideren, onderhouden, memoriseren, overzichten maken, oefenen in gevarieerde situaties, vinger aan de pols houden, diagnostisch toetsen. Er moet meer onderzoek komen over de praktijk in de scholen. Wat gebeurt er echt met de rekenmethoden? En we moeten ‘vondsten’ uit een vernieuwde rekendidactiek eens goed op hun effecten onderzoeken (zie bijvoorbeeld het onderzoek van Van Putten (2005, 2006)).

opa vertelt verder

> Eind groep 5 meldt Marieke mij dat ze een heel mager cijfer heeft voor rekenen. Het zit haar hoog en ze neemt het rekenschrift mee naar de camping in Frankrijk. Opa heeft er verstand van en die komt met zijn Otten ook een paar weken langs. Direct een van de eerste dagen komt het rekenschrift al tevoorschijn. Ze heeft de helft van alle minsommen fout. U kent dat wel, 83 – 27. ‘Kijk dat doe je zo, opa. Eerst vanaf links 80 – 20 is 60. En dan 3 – 7, dat kan niet, das 7 – 3 en dat wordt 64.’ De leerkracht heeft alle fouten, een schrift vol, aangestreept, zonder dit neveneffect van kolomsgewijs aftrekken te constateren.
>
> Begin groep 7. ‘Hoe gaat het op school, Marieke?’ Nu, dat is niet best, de klas verkeert in opperste verwarring. ‘Kijk opa, de helft van de klas maakt nog steeds dezelfde fout die ik toen ook maakte. Ik heb mijn vriendjes uitgelegd dat het handiger is om ze onder elkaar te zetten en te lenen en dat doen ze nu allemaal goed.’ Helaas de nieuwe meester, zo van de pabo, heeft het verboden om het zo te doen. ‘Het moet met de getallenlijn’ zegt hij. ‘Hoe dan?’, vraag ik. Na eindeloos gemodder weet Marieke mij uit te leggen hoe hij wil dat het met de getallenlijn moet.

Vraag: Is dat kolomsgewijs aftrekken wel een begrijpelijke procedure, die in de zin van Gal’perin uiteindelijk tot een verkorting kan leiden? (Uittenbogaard (2007, 2008) betwijfelt dat, al vindt hij het wel een mooie ‘vondst’.)

> Onze schoondochter van Hongaarse afkomst, luistert mee. ‘Wat doen jullie dat vreemd in Nederland.’ ‘Hoe doen jullie het dan in Hongarije?’, vraag ik. ‘723 – 586 wordt onder elkaar gezet en dan aanvullen. Van 6 naar 13 is 7, van 9 (!) naar 12 is 3 en van 6 naar 7 is 1, dus 137. Zo deed mijn bakker, die vroeger met de broodmand bij de deur kwam, het ook. En hoe!’
> De jongens willen nu wel laten zien hoe zij delen. Dat aftrekken doen ze natuurlijk vlot onder elkaar.
> Sietze, inmiddels groep 8, meldt dat hij een eigen methode heeft voor 4305 : 35.
> ‘Ik doe eerst maar eens 100 ×, dan 20 ×, dan 2 × en ja nog een keer, dus 123.’

> Adriaan past onmiddellijk het uiteindelijke algoritme toe en kan het uitleggen. De moeder van Sietze, als assistentaccountant dagelijks in de weer met getallen, volgt bewonderend de acties van de jongens en vraagt zich hardop af hoe zij dat ooit heeft geleerd. In ieder geval weet zij niet meer hoe dat met de hand moet!

Vraag: Lijkt het erop dat de zogenoemde 'hapmethode' zich wel goed leent voor een begrijpelijke procedure, die tot een verkorting kan leiden?

meester Jaap spreekt

Met instemming citeer ik J. Vriens (2007), schoolmeester in hart en nieren en auteur van de bekende 'Meester Jaap' boeken:

> Ik heb veel enthousiaste meesters en juffen ontmoet die er iedere dag weer wat moois van maken en mét hun volle verstand en op hun éigen manier inhoud weten te geven aan onderwijsvernieuwing.
> Docenten moeten boeiend en creatief les kunnen geven. Het hoeft niet altijd 'leuk' te zijn, maar wel goed, zodat leerlingen geprikkeld worden om verder te kijken dan hun neus lang is. Daarna kunnen ze dán zelf aan het werk gaan, met de leraar als coach.
> Daarnaast worden jonge mensen via internet, iPod, televisie, mobieltjes, enzovoort overspoeld met informatie. Dan komt het écht aan op een inspirerende en vakbekwame leraar die hun leert hoofd- en bijzaken te onderscheiden.

noot

1 http://www.ond.vlaanderen.be/nieuws/2007p/1204-PISA.htm
2 ICME4, Berkeley, 1980.

literatuur

Bransford, J.D., A.L. Brown & R. Cocking (eds). *How People Learn. Brain, Mind, Experience and School.* National Research Council. Washington: National Academy Press.

Buijs, K. (2007). *Leerstofgebieden en voorbeeldopgaven voor de betere leerlingen van groep 7 en 8*. Enschede: SLO.

Dekker, T., K. Lagerwaard, J. de Lange, e.a. (2006a). *Wiskundige geletterdheid volgens PISA - Hoe staat de vlag erbij? 1. Analyse.* Utrecht/Arnhem: Freudenthal Instituut/Citogroep.

Dekker, T., K. Lagerwaard, J de Lange, e.a. (2006b). *Wiskunde geletterdheid volgens PISA - Hoe staat de vlag erbij? 2. Opgaven.* Utrecht/Arnhem: Freudenthal Instituut/Citogroep.

Dormolen, J. van (1972). *Didactiek van de wiskunde.* Utrecht: Oosthoek.

DUO Market Research (2007). *Rekenvaardigheid verpleegkundigen.* Utrecht: DUO Market Research.

Expertgroep Doorlopende Leerlijnen (2008a). *Over de drempels met taal en rekenen.* Enschede: Expertgroep Doorlopende Leerlijnen.

Expertgroep Doorlopende Leerlijnen (2008b). *Over de drempels met rekenen. Con-*

solideren, onderhouden, gebruiken en verdiepen. Enschede: Expertgroep Doorlopende Leerlijnen.

Freudenthal, H. (1981). Major problems of mathematics education. *Educational Studies in Mathematics, 12*, 133-150.

Groot, A.D. de, & J.C. Traas (1980). *Onderwijs van binnen en van buiten*. Deventer Van Loghum Slaterus.

Kilpatrick, J., J. Swafford & B. Findell (2001). *Adding It Up: Helping Children Learn Mathematics*. Washington: National Research Council.

Kuyper, H. & M.P.C. van der Werf (2007). *De resultaten van VOCL'93 en VOCL'99: Vergelijkende analyses van prestaties en rendement*. GION: Groningen.

Pellegrino, J.W. e.a. (2001). *Knowing what Students Know*. Washington: National Research Council.

Putten, C.M. van (2005). Strategiegebruik bij het oplossen van deelsommen. In: J. Janssen, F. van der Schoot, & B. Hemker. *Balans van het reken-wiskundeonderwijs op het einde van de basisschool 4*. PPON-reeks nr. 32. Arnhem: Cito, 125-131.

Putten, C.M. van & M. Hickendorff (2006). Strategieën van leerlingen bij het beantwoorden van deelopgaven in de periodieke peilingen aan het eind van de basisschool van 2004 en 1997. *'Reken-wiskundeonderwijs: onderzoek, ontwikkeling, praktijk, 25*(2), 16-25.

Skemp, R. (1971). *Wiskundig Denken*. Utrecht: Aula.

Skemp, R. (1978). Inzicht, planning en het bijbrengen van routine. *Euclides, 53*(9), 397-408.

Streun A. van (2001). *Het denken bevorderen*. Groningen: RUG (oratie). http://www.rug.nl/fwn/voorzieningen/ido/betadidactiek/Onderzoek/onderzoekers/annevanstreun/VanStreunOratie.pdf.

Tall, D.& M. Thomas (eds) (2002). *Intelligence, Learning and Understanding in Mathematics. A tribute to Richard Skemp*. Australia: Post Pressed.

Thijssen, T. (1927, 2007). *De gelukkige klas*. Amsterdam: CPNB.

Uittenbogaard, W. (2007). *Hoe Juliette en Jonas leren rekenen. Reken-wiskundeonderwijs: onderzoek, ontwikkeling, praktijk, 26*(1), 32-36.

Uittenbogaard, W. (2008). Geen catechismus leren, maar nadenken. *Nieuw archief voor wiskunde 5/9*(1), 60-64.

Vos, P. (2007a). Algebraprestaties van tweede-klassers. *Euclides, 82*(4), 129-132.

Vos, P. (2007b). Rekenen door Nederlandse tweedeklassers in internationaal perspectief (1982-2003): Zijn de prestaties voor- of achteruit gegaan? *Expertgroep Doorlopende Leerlijnen (2008b). Over de drempels met rekenen. Consolideren, onderhouden, gebruiken en verdiepen.*

Vriens, J. (2007). *Is de klas nog wel zo gelukkig?* Houten: Van Holkema & Warendorf.