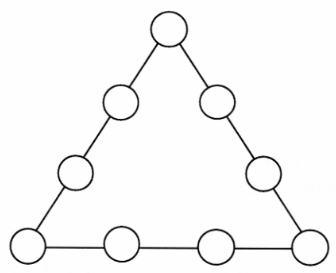
18 De magie van het probleemoplossen

Erica de Goeij
FIsme, Universiteit Utrecht
PC Julianaschool te Bilthoven

Een gouden moment

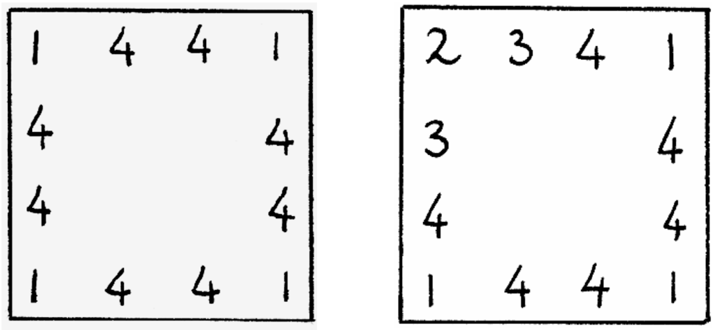
Het is vrijdagmiddag en ik zit met zes slimme rekenaars uit de bovenbouw om tafel. Doel van onze wekelijkse samenkomst is het aangaan van extra uitdaging op het gebied van rekenen-wiskunde. Vandaag zetten we onze tanden in een magische driehoek (fig.1).



figuur 1

We moeten de getallen 1 tot en met 9 zodanig in het figuur plaatsen dat elke zijde van de driehoek de som 17 oplevert. De vragen in het Wisschrift[1] waaruit we werken zetten ons op het spoor van het totaal van de getallen ($1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 45$) en het totaal van de sommen van de drie lijnen van de driehoek ($3 \times 17 = 51$). Het verschil tussen 45 en 51 is 6 en zou ons iets over de getallen op de hoekpunten moeten vertellen.

We praten met elkaar over de eigenschappen van die hoekpunten. We zien dat het getal op een hoek bij twee zijden wordt meegeteld, terwijl de andere getallen van een zijde maar één keer meedoen. Dit gegeven roept bij Sander herkenning op: ‘Oh, net als we met het wijnflessenprobleem hebben gehad.’ Het principe van de twee keer meetellende hoeken doet hem denken aan een reken-wiskundig probleem dat we inmiddels ruim drie jaar geleden in een klassikale, interactieve setting hebben opgelost (De Goeij & Treffers, 2005). In het wijnflessenprobleem gebruikt een bandiet een list om bij de kasteelheer dure wijnflessen te stelen. Deze wijnflessen liggen in speciale wijnrekken. Elke zijde van het rek bevat tien wijnflessen, zoals in figuur 2a. De bediende van de kasteelheer kan zo volstaan met het tellen van de afzonderlijke zijden van het wijnrek; als er tien flessen liggen is het goed. Maar zoals gezegd voert de bandiet een list uit. Na zijn stiekeme bezoek aan de wijnkelder ziet het rek eruit zoals in figuur 2b.



figuur 2a en 2b

Elke zijde van het rek telt nog steeds tien wijnflessen, maar er is wel degelijk een fles verdwenen! Met de kinderen uit groep 4 hebben we destijds uitgezocht hoe de list in elkaar zit. De bandiet maakt gebruik van het feit dat de flessen die op een hoekpunt liggen door de bediende twee keer worden meegeteld. Het doet me deugd dat Sander zich deze les nog kan herinneren. En hij is niet de enige; ze kennen 'm alle zes nog! Voor een leerkracht is dit een gouden moment ...

Probleemoplossen op de Panama-conferentie

Een gouden moment, zoals in het voorgaande beschreven, doet zich in mijn onderwijspraktijk gelukkig vaker voor. Meestal vind ik in deze momenten bevestiging in mijn opvatting dat het gezamenlijk oplossen van mooie, wiskundige problemen - waaronder ook klassieke problemen - grote indruk maakt op kinderen. Ze lijken de inhoud van deze lessen niet te vergeten. Dit is dan ook de reden geweest dat Adri Treffers en ik ervoor hebben gekozen tijdens een werkgroep op de Panama-conferentie in 2004 aandacht voor het probleemoplossen te vragen. In deze werkgroep, 'De magie van het probleemoplossen', legden we aan de deelnemers enkele rijke, wiskundige problemen voor. Net als in de klas zagen we dat er voor iedereen voldoende ruimte was om op zijn of haar eigen manier en eigen niveau naar een oplossing te zoeken; alleen of samen met anderen. We zagen ook het plezier dat aan het oplossen van wiskundige problemen wordt ervaren. Om te laten zien hoe kinderen met een wiskundig probleem omgaan en hoe ze erop reageren, stonden we in de werkgroep stil bij onze ervaringen met een lessenserie over tovervierkanten in een groep 4. Hiervan volgt in het onderstaande een verkorte beschrijving.

Tovervierkanten

Het beroemdste tovervierkant dat we kennen, ook wel ‘magisch vierkant’ genoemd, is een vierkant van drie bij drie waarin de getallen 1 tot en met 9 zodanig worden geplaatst dat de som van elke rij, elke kolom en elke grote diagonaal gelijk is aan vijftien. In de lessenserie over tovervierkanten gaan de leerlingen stapsgewijs op zoek naar dit magische vierkant (De Goeij & Treffers, 2004).

Elke rij 15

In de eerste les krijgen alle kinderen een kaart met daarop een vierkant van drie bij drie met negen lege hokjes. Verder knippen ze negen losse kaartjes uit met daarop de getallen 1 tot en met 9. Met de getalkaartjes kunnen de kinderen onbeperkt schuiven. We beginnen eenvoudig. De kinderen krijgen de opdracht een tovervierkant te vinden waarin elke rij opgeteld 15 is. In figuur 3 is het werk van Hannah te zien.

8	4	3	15
1	9	5	15
7	6	2	15

figuur 3

Terwijl de kinderen druk schuiven met de kaartjes ontdekt een aantal van hen waarom het vierkant een tovervierkant heet. Zij merken op dat na het volleggen van twee rijen er altijd drie kaartjes overblijven die samen 15 zijn. Ook al gaat het om verschillende getallen die overblijven, steeds doet zich dit verschijnsel weer voor. Over gouden momenten gesproken… Uiteraard is deze ontdekking onderwerp van het nagesprek.

Nu ook de kolommen 15

Vervolgens maken we het moeilijker en proberen we ook de som van de kolommen op 15 te krijgen. Voor Hannah is dit niet zo moeilijk (fig.4).

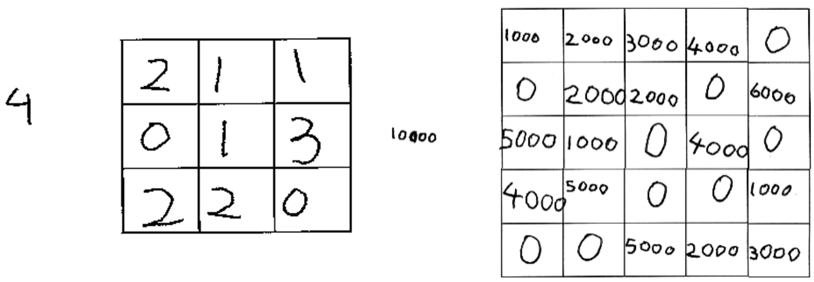
8	4	3	15
1	9	5	15
6	2	7	15
15	15	15	

figuur 4

Een enkele verschuiving met de kaartjes in de onderste rij levert al resultaat op. Kinderen die snel klaar zijn vinden uitdaging in het zoeken naar zoveel mogelijk verschillende van deze tovervierkanten.

Maak je eigen tovervierkant

In de derde activiteit krijgen de kinderen een werkblad met daarop een aantal lege vierkanten van verschillende afmetingen. Ze kiezen zelf welk getal de som van de rijen en de kolommen moet opleveren en welke getallen ze hiervoor nodig hebben. Er mogen ook gerust dezelfde getallen in voorkomen. Vervolgens gaan ze het lege vierkant invullen en kloppend maken. Dergelijke eigen producties bieden de mogelijkheid elke leerling op zijn of haar eigen niveau te laten werken; ze kiezen de getallen die ze prettig vinden. Sommige leerlingen zoeken zekerheid op en blijven met hun getallen veilig onder de tien fig.5a). Anderen volgen het principe ‘hoe groter, hoe mooier’ (fig.5b).



figuur 5a en 5b

Koning Vierkant

In het sluitstuk van de lessenserie gaan de leerlingen samen met Koning Vierkant op zoek naar het beroemde magische vierkant waarin niet alleen de som van de rijen en de kolommen, maar ook de som van de grote diagonalen opgeteld 15 oplevert. Omdat Koning Vierkant dit bijzondere vierkant zelf niet kan vinden loont hij een hoge prijs uit voor degene die ‘m wel heeft gevonden.
Het duurt niet lang of de eerste vinder meldt zich bij Koning Vierkant:

> Ik heb het magische vierkant gevonden, maar ga het u niet direct verklappen. Ik geef u een tip. U bent de grootste en hoogste in dit land, daarom staat de 9 in het midden.

De koning voelt zich gevleid. Maar voordat hij de hoge geldprijs aan de vinder overhandigt, besluit de koning de tip toch nog even aan de hoge heren voor te leggen. De hoge heren, dat zijn de kinderen. Zij controleren of de vinder recht heeft op de beloning. Dit doen ze door op hun lege vierkant het kaartje met de 9 in het midden te leggen. In groepjes overleggen ze hoe het vierkant er dan uit moet zien. Ze schuiven druk met de kaartjes, maar er lijkt weinig uit te komen. Bij navraag blijkt geen van de groepjes het vierkant te hebben gevonden. Ze komen allemaal tot de conclusie dat ze de kaartjes 6, 7 en 8 niet kwijt kunnen als de 9 in het midden ligt. ‘Als je de 6, 7 of 8 wilt neerleggen, heb je meteen teveel’, luiden de reacties. ‘Of je hebt een nul nodig, maar die ligt er niet.’ Zelfs als de 8, de 7 of de 6 in het midden ligt, lopen we tegen hetzelfde probleem aan dat we de hoge getallen niet kwijt kunnen. Koning Vierkant is zijn hoge heren erg dankbaar. Zonder hun wijze raad zou hij de beloning aan een bedrieger hebben gegeven! Een tweede vinder die bij de koning aanklopt en beweert dat de 1 in het midden moet staan, wordt na beraad door de hoge heren (lees: ‘kinderen’) op dezelfde wijze zonder geldprijs naar huis gestuurd. Zo blijft er maar één kaartje over dat in het midden kan liggen: de 5. Alle kinderen gaan de puzzel verder afmaken. Sommigen van hen - ook zwakke rekenaars! - hebben daar niet veel tijd voor nodig en ontdekken al snel de paren die samen tien zijn en met de 5 erbij 15 opleveren.

Goede problemen

In het bovenstaande zijn enkele voorbeelden van wiskundige problemen de revue gepasseerd. Maar wanneer is een probleem nu geschikt voor het reken-wiskundeonderwijs op de basisschool? Aan welke kenmerken moet een goed probleem voldoen? We vroegen het destijds aan de deelnemers van de werkgroep ‘De magie van het probleemoplossen’. In het onderstaande lijstje volgt een greep uit de kenmerken die toen werden genoemd.

Een goed probleem
- bevat voor iedereen de mogelijkheid om op het eigen niveau te starten (dus niet heuristisch: je ziet het of je ziet het niet);
- is voor iedereen op te lossen (levert een succeservaring);
- omvat verschillende niveaus van redeneren;
- bevat een eenvoudige probleemstelling;
- kent een oplossing die niet voor de hand ligt;
- vraagt om schematiseren;
- is uitdagend en niet per definitie reëel;
- is een probleem dat door de leerkracht ook leuk gevonden wordt;
- is productief; leidt tot nieuwe problemen en eigen producties;
- legt interessante reken-wiskundige structuren bloot;
- biedt mogelijkheden voor samenwerking en interactie.

Uit de reacties bleek dat de meeste deelnemers, net als wij, het probleemoplossen een warm hart toedragen. Niet alleen de kinderen, maar ook hun

leerkracht kan veel plezier beleven aan het oplossen van rijke, wiskundige problemen. Daarnaast biedt probleemoplossen ook volop ruimte voor het leren van belangrijke vaardigheden, zoals redeneren, argumenteren, noteren van gedachtes, vragen stellen en reflecteren. En niet te vergeten wordt een beroep gedaan op een wiskundige, onderzoekende houding.
Graag zou ik dan ook de wens uitspreken dat er in toekomstige reken-wiskundelessen meer ruimte voor het oplossen van mooie, klassieke problemen zal zijn. Het is belangrijk dat zoveel mogelijk leerlingen, waaronder zeker ook de kinderen die rekenen moeilijk vinden, ervaren dat rekenen-wiskunde een mooi en uitdagend vak is waarin veel te puzzelen en te ontdekken valt!

noot

1 Wisschriften worden uitgegeven door Stichting Vierkant voor Wiskunde en bevatten wiskundige onderwerpen waaraan betere rekenaars in de bovenbouw van de basisschool in principe zelfstandig kunnen werken.

literatuur

Goeij, E. de & A. Treffers, A. (2004). Tovervierkanten. *Willem Bartjens, 23*(3), 28-32.
Goeij, E. de & A. Treffers, A. (2005). Het raadsel van de wijnflessen. Een goed vraagstuk is het halve werk. *Volgens Bartjens..., 24*(3).