

10 Een kilometer stokbrood - revisited

Jean-Marie Kraemer
Cito, Arnhem

Een kilometer stokbrood! Het kwam meteen bij me op, toen ik 'gouden momenten' verzilveren in de uitnodiging van Marc van Zanten zag.

'Nee', had Nadia net voor de bel, op het allerlaatste moment geroepen. 'Het houdt nooit op! Want je kunt ook niet het grootste getal bedenken. Dat bestaat niet. Met die breuken is het ook zo. Het gaat steeds door.' En toen Jeroen 'Nu al?' zei, en eraan toevoegde dat het de mooiste les was geweest die hij ooit had gehad, kon mijn dag niet meer stuk. Moe gestreden, maar met een gerust hart en een glimlach op de lippen, fietste ik fluitend naar huis.

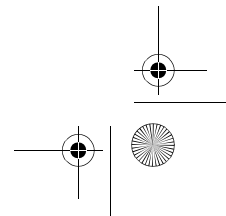
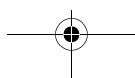
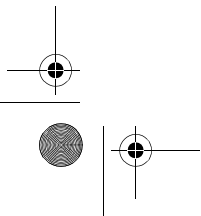
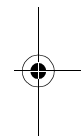
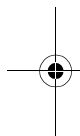
Zo staat het in 'Een kilometer stokbrood' in het tijdschrift 'Willem Bartjens' (jrg. 19 nr.5). Dit moment blijft in mijn geheugen als doorbraak gegrift. Het is ook een bijzonder mooie herinnering, omdat Marjolein Kool - de hoofdredacteur - er een spannend en intiem verhaal van heeft gemaakt, dat vanaf de eerste regel intrigeerde:

Hoe een merkwaardig stokbroodverhaal rekenzwakke leerlingen laat smullen van de rekenles. Wie af en toe durft af te wijken van het officiële programma, vangt de aandacht van alle leerlingen. Er gaat geen kruimeltje verloren. Stel je voor: je loopt op straat met een stokbrood dat een kilometer lang is. Je komt je beste vriendin tegen en die vraagt met haar liefste stemmetje: 'Mag ik de helft?' Je bent de beroerdste niet, dus je deelt je stokbrood eerlijk, precies in twee stukken. Even later kom je weer een bekende tegen en ... ja hoor, goed geraden, die vraagt je ook de helft van het stuk dat je dan op je schouder draagt. Ook je beste vriendin komt een bekende tegen die de helft van haar stuk wil hebben en zo gaat het maar door: 'Wil je met me delen?', 'Wil je met me delen?', 'Wil je ...?' Binnen de kortste keren ging deze vraag als een lopend vuurtje door de stad. Wie brood heeft, komt steeds weer een bekende tegen die bedelt om de helft. Het houdt niet op.

Toen

Zo begon de les, om half elf, op die bewuste stokbrooddag, op mijn proefschool in Den Haag. Ik worstelde destijds met een andere benadering van rekenzwakke leerlingen. We moesten van de medische aanpak af en hun talent aanspreken. Dit was de wekelijkse uitdaging. Ik experimenteerde direct na de bel van half negen met leerlingen uit groep 6 van niveau *D* en *E* - de 25 procent laagst scorende leerlingen op de toetsen van het leerlingvolgsysteem - en een uur later met de stokbroodgroep van groep 7.

Deze groep had twee weken eerder grote belangstelling getoond voor de machten van twee. Ze hadden gestoeid met het verhaal van een broer en



Jean-Marie Kraemer

een zus die een droombeloning hadden bedacht voor het wassen van de auto: één dropsleutel op maandag, twee op dinsdag, vier op woensdag, acht op donderdag, enzovoorts, en dit twee weken lang. Zou moeder er instinken?

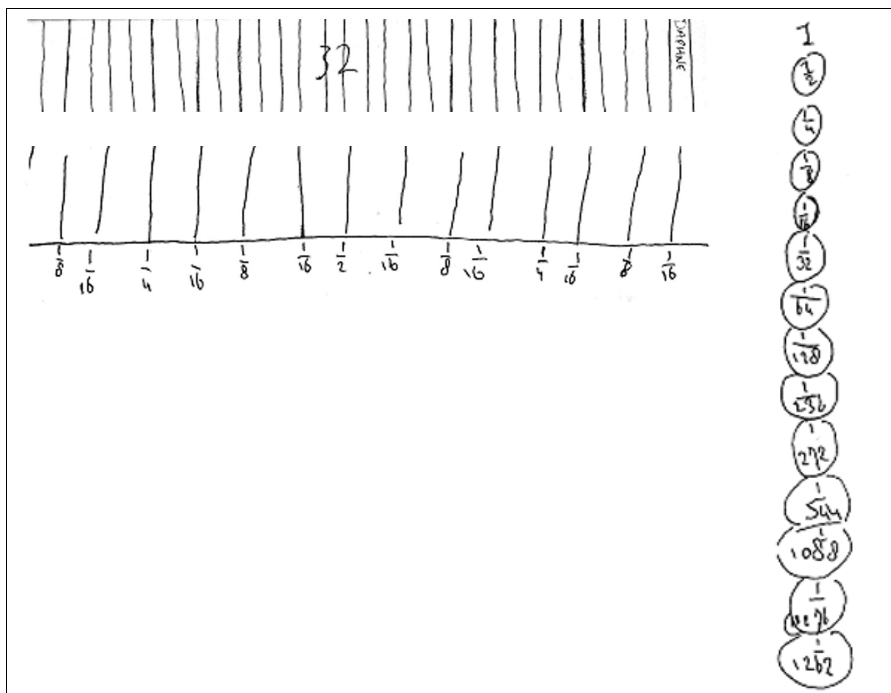
Bij het stokbroodverhaal zou juist het omgekeerde gebeuren. Ik was al weken op zoek naar situaties die ik zou kunnen gebruiken om de relatie tussen vermenigvuldigen en delen bespreekbaar te maken. Het lag voor de hand om bij verdubbelen en halveren aan te sluiten, omdat deze leerlingen het zo vanzelfsprekend vonden, en omdat het effect van deze operaties zo indrukwekkend kan zijn. Door deze handelingen te herhalen zou het rekenen voor deze kinderen snel onuitvoerbaar worden. Maar ze zouden wel aan den lijve ervaren hoe krachtig vermenigvuldigen en delen kan zijn: in een mum van tijd van 1 naar oneindig veel, en omgekeerd van 1 naar onvoorstelbaar klein.

Onder het kopje 'Sterke punten' lees ik nu wat ik toen als doorbraak ervoer. Allereerst, mijn reactie op hun houding. De leerlingen uit groep 7 hadden die dag absoluut geen zin in rekenen. Allicht! Gewone leerlingen kunnen de instructietijd zo nu en dan missen, rekenzwakke leerlingen niet. Ze moeten voortdurend op hun tenen lopen en nooit mag hun aandacht even verslappen, ook al snappen ze niets van wat er in de groep gebeurt. Rekenlessen vragen opperste concentratie en daar komt nog extra instructietijd bovenop. Uiteraard raken ze hiervan op den duur gefrustreerd. Geef ze de mogelijkheid om hun frustraties te uiten en ga er zo nu en dan op in door het officiële programma terzijde te schuiven en ter plekke met iets intrigerends te improviseren.

Mijn doorbraakervaring lag daarnaast in de inbedding van een complexe wiskundige kwestie in een humoristisch verhaal, iets ongewoons, iets 'geks'. Rekenen is altijd zo ernstig, zeker als je niet rekenen kunt. Een beetje humor is dan nooit weg. Bovendien helpt die humor vaak bij rekenen om het kwartje te laten vallen, omdat denkbeeldige extreme gevallen de wiskundige kern van iets (structuur, regel, eigenschap enzovoort) zichtbaar en voelbaar maken. Herhaald halveren was eerst een emotioneel geladen gebaar en hield daarom op bij het 'laatste kruimeltje dat je nooit weg geeft'. Het begon wiskundig pas echt te leven toen de kinderen het stookbrood 'één' gingen noemen, omdat het goed bij het hele stokbrood paste én, omdat het één kilometer lang was. Het werd ten slotte een wiskundige operatie zonder einde, toen iedereen inzag dat je ook kunt halveren zonder vouwlijnen of strepen te markeren, louter door telkens de helft van de helft van de helft... van de getallen te nemen (fig. 1).

Op vertrouwd terrein beginnen. Dit was het derde element van de doorbraak. Als je met deze leerlingen wilt construeren in plaats van te repare-

ren (remediëren), moet je er voor zorgen dat iedereen op vertrouwd terrein op onderzoek gaat. Op deze vertrouwde grond kun je dan nieuwe vragen stellen, die binnen het bereik van de leerlingen liggen. In ons geval de vraag of herhaald halveren ophoudt of niet.



figuur 1: herhaald halveren op drie niveaus van begrip

Het meest pregnante van het hele experiment ten slotte was voor mij het bewust uitlokken van problemen om de wiskundige activiteit uit de niet-wiskundige te laten ontstaan. Aanvankelijk kreeg iedereen een strook om het herhaald halveren 'wiskundig' af te beelden. Iedereen begon netjes. Geleidelijk aan verloren de leerlingen echter hun geduld en tegelijkertijd ook het begrip en het overzicht van wat ze aan doen waren. Uit de chaos van strepen viel niets wiskundigs te leren.

Ik had deze chaos bewust uitgelokt! Ik had de leerlingen in het moeras van strepen gelokt om ze daar te laten aanmodderen, met als enige houvast de fysieke ervaring. Ze zagen en voelden dat door herhaald halveren het overgebleven stuk steeds kleiner en kleiner werd. Op een gegeven moment 'zeiden' de zintuigen, de emoties en het papier dat delen ophield. Je kon of wilde niet verder vouwen. Het papier was 'op'. De wiskundige handeling stopte bij de grenzen van het materiaal en de zintuigen van de kinderen. Dat was de fundamentele ervaring die ik de kinderen wilde geven.

Jean-Marie Kraemer

De opbrengst? Na zoveel lessen diepe ellende en gouden momenten heeft het Cito een handvol principes en acht hulpboeken aan deze experimenten over gehouden:

- niet repareren, maar op onderzoek gaan,
- in de eigen zone van de naaste ontwikkeling,
- aan de hand van intrigerende problemen,
- die de groep laag presterende leerlingen als jonge wiskundige uitdagen.

Ik bouw daar nu op voort, uitgedaagd door binnen- en buitenlandse collega's die op hun manier nieuw leven in mijn kilometer stokbrood blazen.

Nu (revisited)

Jonge wiskundigen aan het werk. Met deze uitdrukking slaan Catherine Fosnot en Maarten Dolk de spijker op zijn kop. Ik interpreteer het in mijn context als volgt: val kinderen die structureel op een ander ontwikkelingsniveau rekenen niet lastig met minimumdoelen. Maar: voed hun nieuwsgierigheid, prikkel hun talent en breng zinvolle en nuttige wiskunde binnen handbereik. Zo zie ik vandaag mijn leerlingen uit groep 7 van toen. Het werd geleidelijk aan een kleine gemeenschap met een eigen taal en cultuur en een eigen manier van samenwerken. Koeno Gravemeijer heeft deze *socio-(math)norms* van de Verenigde Staten hier in Nederland geïmporteerd. Ik vond het toen, eerlijk gezegd een beetje *soft*, 'typisch Amerikaans'. In werkelijkheid begreep ik het niet echt, door gebrek aan ervaring. Terry Wood heeft mijn ogen geopend met haar lezing 'Creating classroom interactions for mathematical reasoning: beyond 'natural teaching''. Van nature willen we voordoen, voorzeggen. Uitleggen zit ons in het bloed. En dat doen leraren dan ook dagelijks, omdat hun eigen leraren dat zo hebben gedaan; op de basisschool, de middelbare school en... de pabo. Wood ontdekte met haar collega-onderzoekers dat kinderen anders denken en anders communiceren in klassen waar de leraar systematisch interacties initieert en de leerlingen stimuleert en helpt om echt samen te werken. Drie terugkerende varianten doen telkens een beroep op drie manieren van denken en communiceren: (1) je oplossingswijze voorleggen (reconstrueren); (2) toelichten hoe je gedacht en gerekend hebt; (3) je standpunt en denkwijze verdedigen (rechtvaardigen).

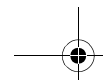
In het eerste type situaties vergelijken de luisteraars wat ze horen (en zien) met wat ze zelf hebben gedaan. Volgens Terry Wood is vergelijken en bepalen van verschillen het basale niveau van *reflective thinking*. Het legt de basis voor begrip en vaardigheden. Toelichten veronderstelt dat de spreker verklaart waarom hij zus of zo handelt. Hij moet de wiskunde die hij bij zijn redenering betreft expliciteren en daarom abstracter spreken en redeneren dan in de context van alleen voorleggen. Je gelijk verdedigen is

andere koek. Volgens Wood leer je pas echt iets nieuws, als je je visie moet verantwoorden. *Conceptual change*, zo noemt Wood het effect van de reflectie en discussie op dit niveau. Realisten zouden zeggen: er vindt een niveauverhoging plaats, op het moment dat de leerling zijn idee, veronderstelling en gedachten aan de hele groep moet rechtvaardigen en met een groepsgenoot (of leraar) in debat gaat. Dolly van Eerde zou in die context over bespiegelen spreken: denken over je eigen manier van denken. Dit zou veel meer in de dagelijkse interacties moeten gebeuren: denken over je gedachten om ze wiskundig te kunnen ordenen - verticaal mathematiseren, dus, in de Freudenthaalse betekenis van 'verticaal'.

Als ik nu, vanuit dit standpunt, het mathematiseren van de kilometer stokbrood analyseer, zou ik veel meer willen weten over wat er zich, in de laatste vijf minuten van de les, in het hoofd van de kinderen heeft afgespeeld. Welke keten van acties en reacties heeft het kwartje bij Nadia doen vallen? Wat betekent voor haar deze niveauverhoging? Wat houdt het precies in? En: hoeveel deelnemers delen haar ervaring? Mijn oogst blijft wat dit betreft erg schaars. We moeten het met het volgende doen:

- Daphne zegt dat ze het grootste getal kent en schrijft een getal in de miljoenen op het bord.
- Jeroen weerlegt haar stelling door eronder het getal op te schrijven dat één meer is. ('Het is helemaal niet het grootste getal! Kijk!')
- Op dat moment roept Nadia: 'Nee, het houdt niet op! Want je kunt ook niet het grootste getal bedenken. Dat bestaat niet. (...) Met die breuken is het ook zo. Het gaat steeds door.'

Oorzaak en gevolg, dat is, volgens Simon, bij *conceptual change* (niveauverhoging) de kwestie. Denk van te voren over het effect van de handelingen van de leerling in die context en met deze materialen op zijn huidige manier van denken en doen. Wat zou kunnen veranderen? En: waardoor zou het zo kunnen veranderen? De zwakste schakel van mijn experiment is wat dit betreft de, vanuit de leerling gezien, nogal kunstmatige overgang van herhaald vouwen en markeren naar herhaald halveren van breuken. Ik moest, op een of andere manier 'één' als uitgangseenheid in het vizier van de kinderen zien te krijgen. De nieuwe leerlijn van het TAL-team voor breuken, procenten, kommagetallen en verhoudingen biedt perspectieven voor een zinvolle revisie. Halveren als meettechniek om een stelsel van maten te ontwikkelen. Je halveert om een nieuwe maat te krijgen waar je verfijnd mee kunt meten. Dit lijkt mij nu een geschikte ingang om meer kinderen op het spoor van het oneindige te krijgen: het houdt nooit op, je kunt steeds een maat maken die de helft van de vorige is. En met de moderne 'google-techniek' zouden kinderen ook letterlijk oneindig verfijnd kunnen



Jean-Marie Kraemer

'meten'. Het mooie van deze ingang is het raakvlak met het fysische, dat in het stokbroodverhaal zo storend werkt: je eigen lichaam heeft een begin- en eindpunt. Het houdt echt op! De vraag is dan niet zozeer hoe lang je *bent*, maar hoe precies je je lengte wilt meten. Heb je aan kwarten, achttien en zestienden genoeg, of moet je nog verder gaan?

literatuur

- Fosnot, C.T. & M. Dolk (2001). *Young mathematicians at work: constructing number sense, addition and subtraction*. Portsmouth, NH: Heinemann.
- Kraemer, J.M. (2000). Een kilometer stokbrood. *Willem Bartjens*, 19(5), 4-7.
- Simon, M. (2001). De rol van de leerkracht in het bevorderen van begripsontwikkeling. In: R. Keijzer & W. Uittenbogaard (eds.). *Uit de lengte of uit de breedte - de kwaliteit van het meetonderwijs*. Utrecht: Freudenthal Instituut.
- TAL-team (2006). *Breuken, procenten, kommagetallen en verhoudingen. Tussendoelelen Annex Leerlijnen*. Groningen: Wolters-Noordhoff.
- Wood, T. (1998). *Creating classroom interactions for mathematical reasoning: beyond natural teaching*. In: P. Abrantes, J. Porfirion & M. Baia. *The interactions in the mathematical classroom. Proceedings of the CIEAEM 49*. Setubal: ESE.

