



4 H.F.'s laatste

A. Treffers

Flsme, Universiteit Utrecht

Het gouden moment, dat uit het volgende fragment naar voren komt, is niet alleen voor mij, maar voor velen uit de Panamakring een 18-karaats herinnering.

... Tegen zijn gewoonte in had Freudenthal zich dit jaar nog niet voor de landdagen van Panama aangemeld. Niet omdat hij het einde voelde naderen - hij was de laatste tijd juist erg goed - maar omdat hij het gewoon wat te druk had.

Te druk met zijn nieuwe boek 'Revisiting Mathematics Education' dat hij een maand geleden voltooide. Te druk met zijn voorgenomen bezoek aan Granada waar hij z'n zesde eredoctoraat in ontvangst zou nemen. Te druk met zijn reisje naar Lückenwalde, zijn geboorteplaats, waar hij op 18 oktober tot ereburger benoemd zou worden - 18 oktober, horrible dictu, de dag waarop hij naar de begraafplaats in Utrecht werd gebracht.

Het laatste briefje van Freudenthal aan de medewerkers van de vakgroep bevat enkele vragen bij een artikel uit de NRC van 7-7-'90 over een Pool, Zygmunt, die beweert dat hij 220 uur per week werkt.¹

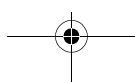
Polen bekend als harde werkers

Ieder jaar komen tienduizenden Polen naar Nederland om enkele maanden te werken in de bloembollenteelt. Zygmunt is al voor de vierde keer in Nederland. Hij heeft in bollenvelden en in kassen gewerkt. Nu werkt hij op de transportafdeling van een bedrijf op de bloemenveiling.

'Ik laad vrachtwagens in, dat is zwaar werk. Gemiddeld werk ik 220 uur per week. Dat is goed want zo verdien je', aldus Zygmunt.

figuur 1

Toen we dit knipsel in september als centraal probleem uitkozen, konden we niet bevroeden welk een bijzondere betekenis het zou krijgen: Freudenthals laatste concrete bijdrage aan de Panama-najaarsconferentie. En nog wel op de omslag van het practicumboekje. Stelt u zich zijn gemoedstoestand en wisselende gezichtsuitdrukkingen voor bij de volgende antwoorden op de vraag of dat wel kan, 220 uur per week werken.



Dat gaat nooit, want 7×24 is 168 uur per week.

Nee. Een dag heeft 24 uur dan doe ik $25 \times 7 = 175 - 7 = 168$ uur per week.

Nee, want 10 werkdagen is al 240 uur, dus 220 werkuren zou dan 9 dagen plus 4 uur zijn.

Nee, want mijn moeder werkt al 180 uur in de week. Als hij harder zou werken dan is ie de hele dag bezig, dat is wel een beetje veel.

Ja, omdat je vrachtwagens kan laden en bollenvelden kan op laten groeien.

In het practicum die middag kwam naar voren dat het overgrote deel van de kinderen tot het juiste antwoord komt door uit te gaan van dag en nacht werken. Alleen blijken de berekeningswijzen zeer divers te zijn.

Herhaald optellen

24, 48, 72, 96, 120, 144, 168.

Dat kan niet, want een week heeft maar 168 uur.

1 dag	24 uur
2 dagen	48 uur
4 dagen	96 uur
8 dagen	192 uur
	<u>24 uur</u>
	168

Splitsend vermenigvuldigen

$$\begin{array}{rcl} 7 \times 20 & = & 140 \\ 7 \times 4 & = & 28 \\ & & 168 \end{array}$$

Dat gaat nooit, want $7 \times 24 = 168$ uur per week!

$$7 \times 24 = 140 + 28 = 168$$

Dus dat kan niet, omdat een week maar 168 uur heeft!

Cijferend vermenigvuldigen

$$\begin{array}{r} 2 \\ 24 \text{ uur per dag} \\ \underline{7 \times \text{dagen}} \\ 168 \text{ uur} \end{array}$$

Handig vermenigvuldigen

$$7 \times 24 = 7 \times 25 - 1 = 175 - 1 = 174 \text{ uur.}$$

Kan niet. Een dag heeft 24 uur. Dan doe ik $25 \times 7 = 175$ uur $- 7 = 168$ uur per week.

Er zijn ook kinderen die 220 uur even voor waar aannemen en vervolgens het aantal dagen per week berekenen. Na de berekening concluderen ze dat de uitkomst niet correct kan zijn, dus dat die 220 uur niet kan kloppen, ook al zou Zygmunt dag en nacht werken.

A. Treffers

Schattend rekenen

Nee, want 10 werkdagen is 240 uur.

Dus 220 werkuren zou dan ruim 9 dagen plus 4 uur zijn.

Een week heeft maar 7 dagen.

Globale berekeningen op grond van schattend rekenen komen in groep 6 (7) bijna niet voor. Kinderen van deze leeftijd zijn gewend om precies te rekenen.

Wat betekenen de gepresenteerde uitkomsten voor het onderwijs?

Allereerst is duidelijk dat door de verscheidenheid aan redeneringen en berekeningen de kinderen veel van elkaar kunnen leren.

Wat het redeneren betreft kun je uitgaan van 24 uur per dag werken maar ook 220 uur als startpunt nemen om van daaruit tot een onmogelijke uitkomst te komen. In het laatste geval kan de leraar nog een nieuwe oplossing aandragen, namelijk 220 door 7 delen zodat je op een etmaal van meer dan 30 uur ($7 \times 30 = 210$) uitkomt.

Maar de meeste aandacht zal toch naar de verschillende berekeningen van 7×24 uitgaan, om te beginnen naar de betrekkelijk omslachtige aanpak van het herhaalde optellen. Met name de leerling die via verdubbelen sommeert, zou gelegenheid moeten krijgen om zijn handige optelmethode toe te lichten. De methoden van splitsend en cijferend vermenigvuldigen bieden vervolgens de leraar de mogelijkheid om nog eens te laten zien dat het cijferalgoritme van het vermenigvuldigen in feite een verkorte procedure van het splitsende vermenigvuldigen is. In het volgende voorbeeld wordt de '2' uit 28 even onthouden en bij de '14' van 140 geteld: een verregaande verkorting van splitsend hoofdrekenen. Het handig uitrekenen van 7×24 via 7×25 vraagt om nadere uitleg. We weten reeds dat $7 \times 25 - 1 = 174$ de verkeerde uitkomst oplevert.

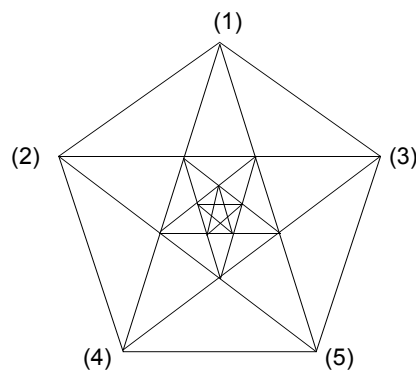
	2
24	24
<u>7</u> ×	<u>7</u> ×
28	168
<u>140</u>	
168	

Hoe kunnen we de juiste aanpak inzichtelijk maken? Dat zou kunnen met een rechthoek opgebouwd uit 7 onder elkaar gelegde stroken en een stapel van 7 dozen, beide 'gevuld' met 25 'eenheden', waarvan er één per strook of doos, dus in totaal 7 'eenheden' weggehaald moeten worden - kortom $175 - 7 = 168$. Wat vinden de leerlingen van de oplossing dat zelfs als een etmaal 30 uur zou bevatten en Zygmunt dag en nacht werkt, dat hij dan

nog niet aan die 220 uur zou toekomen, dus dat je met $7 \times 30 = 210$ kunt volstaan? Is het nodig om hier precies te rekenen? De conclusie zal luiden: soms kan met schattend rekenen worden volstaan en in zo'n geval is dat ook verreweg de handigste manier. Is die Zygmunt nu zo dom of heeft hij zich domweg versproken? Kennelijk heeft Zygmunt zich vergist en bedoelde hij 220 uur per maand. Want dat betekent dat hij ongeveer 55 uur per week werkt, oftewel 11 uur per dag in een vijfdaagse werkweek en dat is inderdaad hard werken.

De Zygmuntles kan model staan voor het realistische reken-wiskundeonderwijs dat op vijf pijlers berust, te weten:

- 1 Kinderen hebben een belangrijke inbreng: ze leveren een cruciale bijdrage aan het onderwijs dat een 'open' karakter heeft.
- 2 Deze productieve bijdrage kan alleen gehonoreerd worden als de gepresenteerde problemen betekenisvol en motiverend zijn.
- 3 Het onderwijs biedt de kinderen passende middelen (materialen, modellen en methoden) om hen verder en hoger op te helpen, dus om de afstand tussen hun actuele handelen en het beoogde vakkundige opereren te helpen overbruggen.
- 4 Het reken-wiskundeonderwijs mikt op breed toepasbare kundigheden, wat betekent dat verwante leergangen met elkaar vervlochten dienen te worden.



figuur 2

- 5 Een en ander is alleen te realiseren indien de leerlingen in een interactieve, klassikale onderwijssetting worden geplaatst, waarin naast zelfstandig werken ook gelegenheid is voor uitleg en uitwisseling van ideeën tussen de leraar en de leerlingen, en tussen de leerlingen onderling. Freudenthal was zeer ingenomen met het kader van deze vijf principes en de verbindingen ertussen die met een pentagram kan worden uitgebeeld (fig.2).



A. Treffers

Deze krimpende reeks van 'geneste' vijfhoeken, die het samenhangende geheel van de onderwijsprincipes verbeeldt, kan zowel op grote, middelgrote en kleinere onderwijsblokken worden betrokken: op leerboeken, leergangen, lessenseries, lessen en lesonderdelen. En het is uiteraard ook van toepassing op 'H.F's laatste'.

Noot

- 1 Het genoemde practicum waarvan het Zygmuntprobleem deel uitmaakt, is samengesteld door de toenmalige projectgroep 'Speerpunt Rekenen'. De onderzoeksgegevens over de Zygmuntopgave zijn verzameld door Anneke Noteboom.

