21 Oplossingswijzen van kinderen

Joop Bokhove

Vijfentwintig jaar Panama. Een tijd met vele hoogtepunten. Een periode waarin jaarlijks vele bij het rekenonderwijs betrokkenen bijeenkwamen op de Panama-conferenties. De meeste van die conferenties heb ik bijgewoond, eerst als medewerker van het Cito, daarna als medewerker van het Freudenthal Instituut en nu als auteur van een rekenmethode.
Van al die jaren zijn met name de presentaties van de eerste PPON peilingen me als direct betrokkene bijgebleven. In 1987 vond de eerste peiling naar het niveau van rekenonderwijs in de basisschool plaats. Intensieve contacten met rekeninhoudelijke experts gingen daar aan vooraf. Contacten die niet eenmalig waren, maar leidden tot een goede samenwerking en samenhang tussen verschillende instituten.

Bij de peilingen werd natuurlijk, in overeenstemming met de opdracht van het ministerie, vooral gekeken naar leerlingresultaten. We ontwikkelden daarvoor een groot aantal toetsen. Maar naast die toetsen onderzochten we ook bij een aantal opgaven hoe leerlingen die oplosten. Met name dat onderdeel heeft mij altijd na aan het hart gelegen. Niet alleen onderzoeken of kinderen een fout of goed antwoord geven, maar ook proberen een beeld te krijgen van de manier waarop ze werken. Het idee daarachter: het is mooi te weten wàt kinderen wel en niet kunnen, maar om aan verbetering te werken is dat niet voldoende. Dan is meer inzicht in werkwijzen, oplossingsmanieren van die kinderen nodig.

En zo kon het gebeuren dat we (van het Cito) in 1991 niet alleen een overzicht gaven van de resultaten op de toetsen, maar eveneens konden laten zien op welke wijze kinderen een aantal opgaven oplosten. Op de conferentie vertelden we er iets over. In aansluiting daarop publiceerden Jan Janssen en ik een aantal artikelen in Willem Bartjens. Terugkijkend op die presentatie en aansluitende publicaties wil ik nog eens naar enkele van die opgaven kijken.

Voorbeelden uit de peilingen van 1987 en 1992

1743 – 997 =

De opgave werd in 1987 gemaakt door 124 leerlingen van verschillende scholen. De resultaten zijn dan ook representatief.

Wij waren vooral benieuwd of leerlingen gebruik zouden maken van het feit dat 997 bijna 1000 is. De resultaten (fig.1):

	totaal	goed	fout
1. cijferen uit het hoofd	50	38	12
2. rijgen, eerst 900 er af, dan 90 en tot slot 7	12	8	4
3. aanvullen tot 1743	5	4	1
4. 1000 aftrekken en compenseren door er 3 bij te tellen	24	23	1
5. 1000 aftrekken en dan nog 3 er af	4	0	4
6. aftrekking vervangen door 1746 - 1000	9	9	0
7. 997 – 743 = 254; 1000 – 254 = 746	5	0	5
8. geen oplossing	5	0	5
9. anders	10	5	5

figuur 1

Commentaar

– Veel leerlingen cijferden ook al mochten ze niet op papier rekenen (40 procent).
– 28 Leerlingen trokken 1000 af en compenseerden (oplossing 4 en 5). Alleen de richting van het compenseren leverde soms problemen op.
– 9 Leerlingen vervingen de aftrekking door 1746 – 1000. Dat leverde in alle gevallen een goed antwoord op.

1203 – 1195 =

Deze opgave komt uit de peiling 1992 en is gemaakt door 122 leerlingen, weer van veel verschillende scholen. Wij waren vooral geïnteresseerd of leerlingen gebruik zouden maken van het kleine verschil. Dat zou kunnen door het antwoord te vinden in één oogopslag, of met 1200 als tussenstation, of door middel van doortellen. Inmiddels was op veel scholen de aandacht voor het rijgen toegenomen. Wat zouden daarvan de gevolgen zijn (fig.2)?

		totaal	goed	fout
1. cijferen	31%	38	28	10
2. aanvullen	24%	29	25	4
3. compenseren	19%	23	18	5
4. vervangen 1208-1200	1%	1	1	0
5. rijgen	13%	16	14	2
6. splitsen	10%	12	3	9
7. anders	4%	5	1	4

figuur 2

Commentaar

Weer een groot aantal leerlingen dat cijfert (cijferen in het hoofd). Maar nu de getallen zo dicht bij elkaar liggen is er toch een groot aantal leerlingen dat gebruik maakt van het kleine verschil door te compenseren. Om te kunnen vergelijken is ‘vervangen’ er bij gezet. Die werkwijze ligt gegeven het kleine verschil niet zo voor de hand en de kinderen zien dat.

Kijken we preciezer naar wat er achter die oplossingen schuil gaat dan zien we een grote verscheidenheid. Heel mooi is dat te zien bij kinderen die een rijgstrategie hanteren (fig.3).

één keer	1203 – 1000 – 100 – 90 – 5	standaard oplossing
drie keer	1203 – 1100 – 90 – 5	kleine variatie op de standaard procedure
twee keer	1203 – 1000 – 100 – 3 – 92	95 aftrekken in twee stappen van 3 en 92
één keer	1203 – 1100 – 3 – 92	bijna gelijk aan de vorige
vier keer	1203 – 1100 – 95	95 wordt niet gesplitst, de afstand 103 - 95 wordt ineens overbrugd
twee keer	1203 – 1000 – 100 – 95	bijna gelijk aan de vorige
één keer	1203 – 1000 – 195	bij 203 - 195 ziet de leerling meteen het verschil
één keer	1200 – 1100 + 3 – 5 – 90	
één keer	1200 – 1100 – 95 + 3	

figuur 3

Zeven van de zestien kinderen beginnen te rijgen, maar zien als de sommen kleiner worden het resterende verschil ineens.

- De meest voorkomende splitsing (6 van de 12) was 1200 – 1100 = 100 en 95 – 3 = 92 en 100 + 92 = 192.
- Twee leerlingen splitsen zo dat er twee aftrekkingen kwamen. 1000 – 1000 en dan 203 – 195. 203 – 195 werd daarna in één keer uitgerekend. Achteraf is er wat voor te zeggen die oplossing onder te brengen bij de zeven rijgers die na verloop ineens het verschil zagen.
- Twee leerlingen rekenden uit: 1200 – 1100 = 100 en 103 – 95 = 8. Ook bij deze twee oplossingen is er overeenkomst met de groep van zeven rijgers.

Kijken we naar de variaties bij het compenseren dan vinden we de volgende onderverdeling (fig.4).
Bij het aanvullen zagen kinderen soms ineens het verschil, soms werd er aangevuld via de 1200.
In de balans van de peiling 1992 zijn alleen de samenvattingen gepubli-

ceerd. Bij uitvoerige bestudering van de gegeven antwoorden blijkt steeds weer hoeveel informatie verloren gaat, informatie die er toe doet.

veertien keer	1203 – 1200 + 5	even iets te veel aftrekken en dat weer compenseren
vier keer	1200 – 1195 + 3	de drie eerst buiten beschouwing laten en aan het eind toevoegen
één keer	1200 – 1100 - 95 + 3	als hiervoor met een extra tussenstap
één keer	1200 – 1100 + 3 - 5 - 90	
drie keer		niet na te vertellen

figuur 4