In gesprek over breuken/verhoudingen

K.P.E. Gravemeijer & R. Keijzer
Freudenthal Instituut, Universiteit Utrecht

1 inleiding

Het TAL-project heeft leerlijnen en tussendoelen opgeleverd voor gehele getallen en meten & meetkunde voor de onderbouw van het primair onderwijs en gehele getallen voor de midden- en bovenbouw (Treffers, Van den Heuvel-Panhuizen & Buys, 1999; Van den Heuvel-Panhuizen, Buys & Treffers, 2001; Van den Heuvel-Panhuizen & Buys, 2004). Voor het resterende gedeelte van het curriculum rekenen-wiskunde van het primair onderwijs lijkt, gezien de weerbarstigheid van de onderwerpen die aan bod komen, een andere beschrijving van doorgaande leerlijnen en tussendoelen meer adequaat. Immers, we weten dat zich aan het eind van de basisschool problemen voordoen, zowel op het gebied van breuken/verhoudingen als op het gebied van meten/meetkunde. Hierdoor vertoont ook de doorgaande lijn van primair onderwijs naar voortgezet onderwijs, die op het papier van de schoolboeken keurig in orde is, gebreken die zich met name in het VMBO doen gelden.

'Breuken/verhoudingen' gebruiken we hier als aanduiding voor het leerstofgebied dat naast de pure breuken en verhoudingen ook kommagetallen en procenten omvat. Dit leerstofgebied is een probleemgebied voor veel leerlingen, en uit de PPON-resultaten blijkt dat zwakke rekenaars hier zelfs ernstige problemen hebben. Het blijkt dat de 'percentiel 25 leerling' geen enkel onderdeel van de schaal optellen en aftrekken van breuken goed beheerst. Een volgende schaal laat zien dat een opgave waarin wordt gevraagd naar de helft van een $\frac{1}{2}$ liter door de 'percentiel 25 leerling' matig wordt beheerst, maar dat de helft van een $\frac{3}{4}$ liter te hoog is gegrepen. De percentiel 25 leerling heeft bovendien nog maar weinig begrip van procenten. Deze leerling begrijpt dat 50 procent de helft is, maar met de andere percentages kan hij of zij nog niet goed overweg.
Bovendien valt op dat ook de gemiddelde leerling niet flexibel met deze stof omgaat. Zo blijkt dat de gemiddelde leerling niet uit de voeten kan met een opgave als 4 : 0,25 = ... , die neerkomt op: 'Hoeveel kwarten gaan er in vier?' De gemiddelde leerling weet wel dat 0,25 = $\frac{1}{4}$, maar hij zet deze kennis blijkbaar niet in bij 4 : 0,25 = ... Ook de kennis dat $\frac{1}{2}$ overeenkomt

met 50 procent wordt niet flexibel ingezet. Een opgave met de vraag hoeveel procent 397 van de 809 is, beheerst de gemiddelde leerling matig; een opgave waarin wordt gevraagd 50 procent om te zetten in ‘1 op de ...’ is voor de gemiddelde leerling te moeilijk (Janssen, Van der Schoot, Hemker & Verhelst, 1999).

Vanaf augustus 2003 richt het TAL-project van het Freudenthal Instituut, waarin wordt samengewerkt met een parallelproject bij de SLO, zich in opdracht van de overheid op de genoemde wat problematische bovenbouwonderwerpen. De notie dat het onderwijs hier de afgelopen jaren onvoldoende heeft opgeleverd vormt een leidraad voor de werkzaamheden. We zoeken naar een manier om in samenspraak met het veld te werken aan een doordenking van het onderwijs in dit leerstofgebied.

In dit artikel gaan we onder meer in op manieren waarop we het veld betrekken bij de discussie over de genoemde bovenbouwonderwerpen. We concentreren ons echter vooral op het formuleren van kernideeën. Deze kernideeën zijn gevangen in kernactiviteiten, waarin de kern van het onderwijs rond breuken en/of verhoudingen is vervat. Deze activiteiten zijn verder zo ontworpen dat ze voor leraren de bedoelde kern zichtbaar maken.

een voorbeeld

Wanneer leerlingen de kale som 4 : 0,25 krijgen voorgelegd weten ze daar vaak geen raad mee. Dat ligt anders bij deelsommen als 48 : 6. Dan gaan ze na of 48 in de tafel van 6 voorkomt. Dat is het geval, want 6 × 8 = 48. En dus is 48 : 6 = 8.

Wanneer de getallen iets groter worden gemaakt kiezen leerlingen in het algemeen een andere aanpak. Een som als 146 : 21 wordt dan uitgerekend via herhaald aftrekken of optellen. De leerlingen gaan als het ware na hoe vaak 21 in 146 past. En deze laatste aanpak zou ook soelaas bieden bij 4 : 0,25, maar er zijn maar heel weinig leerlingen die deze aanpak van herhaald aftrekken of herhaald optellen (durven) toe te passen bij 4 : 0,25.

We herkennen hierin een belangrijk knelpunt. Leerlingen kunnen of durven aanpakken die zij leerden bij het rekenen met gehele getallen niet toe te passen bij het rekenen met breuken, kommagetallen of procenten. We hebben ook wel een idee waarom dat niet gebeurt:

– de breuken of kommagetallen hebben niet voldoende betekenis;
– de betekenis van de bewerkingen (+, –, : en ×) is niet voldoende om dit te extrapoleren naar breuken, kommagetallen en procenten.

2 leraren betrekken

Dergelijke vragen rond aanpakken van leerlingen bij een opgave als 4 : 0,25 vormen aanleidingen om met leerkrachten van gedachten te wisselen. Maar we brengen daarbij niet alleen onze verbazing naar voren. We bevragen de leerkrachten vooral ook op hun ideeën over het onderwijs in breuken, procenten, kommagetallen en verhoudingen en kiezen dit mede als uitgangspunt voor de ontwikkeling van enkele kernlessen. In deze kernlessen laten we zien wat wij belangrijk vinden bij genoemde leerstofonderdelen; we laten zien wat volgens ons de kern is van het onderwijs. Maar ook voorzien de kernlessen in oplossingen voor knelpunten die door de leerkrachten worden ervaren. En op deze manier functioneren deze kernlessen ook als katalysator voor discussies over kernelementen van een leerlijn.

De discussie over het onderwijs wordt aanvankelijk gevoerd in enkele pilotscholen. We kiezen er echter al snel voor om de discussie te verbreden via publicatie van lessuggesties en lesverslagen op het Rekenweb.[1] en door de gevormde ideeën neer te leggen in tijdschriftartikelen (Keijzer, 2003; Van Galen, 2004; Keijzer, Van Galen & Oosterwaal, 2004; Keijzer, Van Galen & Gravemeijer, 2004) en presentaties tijdens conferenties. Op deze manier verbreedt zich ook het veld waar we ons op richten. We kijken zo niet louter naar leraren basisonderwijs, maar betrekken ook opleiders en begeleiders bij de ideeënvorming.

Om een discussie in gang te kunnen zetten moeten we aansluiten bij wat er in het veld leeft. We moeten, zo gezegd, binnen de zone van naaste ontwikkeling van de betrokken leerkrachten starten. Omgekeerd moeten we ervoor zorgen dat de leerlijnen in het veld gaan leven. We moeten de zone van naaste ontwikkeling niet als een statisch gegeven beschouwen. Daarom kiezen de twee poten van het TAL-project, die van het Freudenthal Instituut en die van de SLO, twee ietwat verschillende elkaar aanvullende invalshoeken bij het in kaart brengen van mogelijkheden om leerkrachten te ondersteunen bij het verbeteren van hun onderwijs. De SLO start in de bestaande praktijk en gaat daarbij bijvoorbeeld na hoe het gebruik van methoden geoptimaliseerd zou kunnen worden. Het TAL-project bij het Freudenthal Instituut kiest een startpunt in het gezamenlijk met leerkrachten ontwikkelen van kernideeën die bedoeld zijn om de kern te tonen van het beoogde onderwijs. Hiervoor wordt onder meer van gedachten gewisseld met een groep leerkrachten van een aantal pilotscholen in Leiderdorp.

De twee invalshoeken vullen elkaar aan. Zoals aangegeven richten we ons in dit artikel evenwel alleen op de invalshoek van het formuleren van kernideeën. We geven aan om welke kernen het gaat en hoe die in kernactiviteiten kunnen worden uitgewerkt.

3 niet nieuw, maar anders

Het zoeken naar kernactiviteiten impliceert dat wat we hier naar voren brengen niet helemaal nieuw is. Zo komt een van de kernlessen rond een bakker die banketstaven verdeeld uit 'De Breukenbode' (Bokhove, Buys, Keijzer, Lek, Noteboom & Treffers, 1996). Deze les, waarop we later in dit artikel terugkomen, en andere lessen gebruiken we voor de door ons gekozen andere invalshoek, bijvoorbeeld bij het expliciteren van een uitgangspunt rond differentiatie, wat we kort kunnen typeren als: we vinden het belangrijker dat zoveel mogelijk leerlingen zoveel mogelijk 'begrijpen', dan dat zoveel mogelijk leerlingen zoveel mogelijk 'kunnen'.
Deze omslag van 'kunnen' naar 'begrijpen' vraagt dat leerlingen leren om goed te kijken naar de context en geeft daarom aanleiding tot het makkelijk overschrijden van de grenzen tussen de onderwerpen breuken, verhoudingen, procenten en kommagetallen. Deze samenhang is bijvoorbeeld aan de orde bij het onderzoeken van de relatie tussen breuken en kommagetallen, zoals bij het meten met een meetlat naar voren komt. Het kijken naar de meetlat leert dat $\frac{1}{4}$ meter een stuk van 25 centimeter is. De analogie tussen gehele getallen en kommagetallen leert dat dit ook genoteerd kan worden als 0,25 m. Later wordt deze gelijkwaardigheid gecontroleerd door na te gaan wat $\frac{1}{4}$ deel van 100 centimeter is en nog later wordt deze getalrelatie, $\frac{1}{4}$ = 0,25, ingezet bij het rekenen. Bij het verwerven van deze getalrelaties beperken we ons overigens niet tot breuken, kommagetallen en procenten. Ook voor dit gebied relevante relaties tussen gehele getallen komen aan de orde en worden vervolgens in verband gebracht met relaties tussen breuken. Aldus ontstaat een netwerk van gelijkwaardige beschrijvingen (fig.1).

0,25

1 op de vier $\frac{1}{4}$ 1 : 4 = 0,25

25%

figuur 1

Naast aandacht voor het begrijpen door de leerlingen en samenhang van de verschillende onderdelen, zijn er nog enkele andere kernelementen, die de ruggengraat vormen van een zich ontwikkelende visie op het onderwijs in breuken/verhoudingen. Deze elementen werken we in het volgende uit:

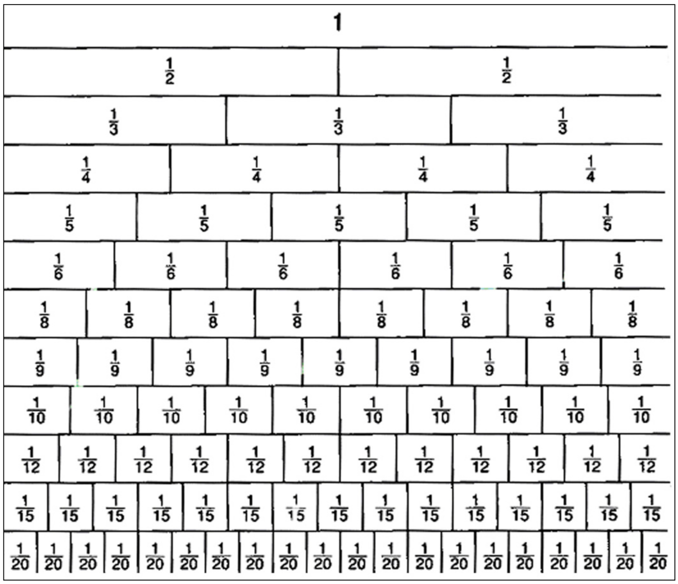
– het beredeneren van relaties tussen breuken;
– het bouwen aan een gefundeerd inzicht in kommagetallen;
– het leren zien van procenten als relatieve getallen;
– het leren beschouwen van breuken als relatieve getallen;
– de verhoudingstabel als te ontwikkelen schematische weergave;
– het werken aan getalgevoeligheid en kennis van basale getalrelaties.

Een kernelement dat we naar voren laten komen in de beschrijving van de andere kernelementen, maar daarom niet minder van belang is, is de rol die de strook heeft als centraal model. De strook leent zich goed als meetinstrument bij het leren van breuken en kommagetallen. Het maakt het redeneren mogelijk bij breuken en procenten en biedt verder aanknopingspunten voor het verwerven van basale getalrelaties.

4 relaties tussen breuken beredeneren

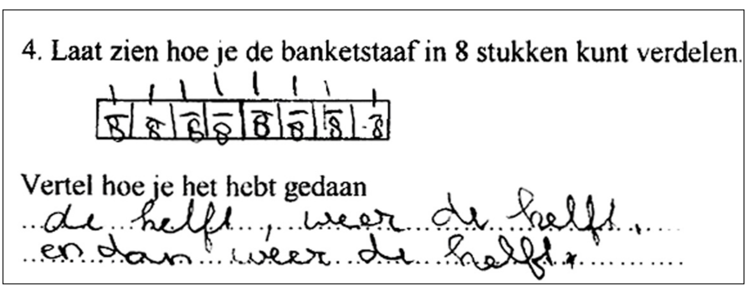
Zowel breuken als kommagetallen kunnen we laten voortkomen uit meetsituaties. De behoefte om precies te meten creëert de noodzaak van maatverfijning, en dat is zowel een bron voor het genereren van breuken - wanneer we de maat vrij kiezen – als een bron voor kommagetallen - wanneer we systematisch door tien delen. Dit herhaald delen door tien is weer verwant aan het herhaald halveren, zoals de Egyptenaren dat deden en wat kinderen ook vaak spontaan doen; een samenhang die mogelijk in het onderwijs kan worden uitgebuit. Nog belangrijker is echter de samenhang tussen gewone breuken en tiendelige breuken zoals die in het meten met verschillende maten naar voren komt. Wanneer je bijvoorbeeld het meten met halven en met tienden vergelijkt, zie je dat een half gelijk is aan vijf tiende. En dat kun je ook beredeneren.

‘Redeneren’ proberen we steeds voorop te stellen, dit betekent dat we de opgaven voor leerlingen ook anders willen inrichten. We lichten dit toe aan de hand van een voorbeeld. Het gelijknamig maken van breuken wordt vaak ondersteund door het werken met breukenstroken in wat wel ‘de breukenkast’ wordt genoemd (fig.2). Een bezwaar van deze breukenkast is echter dat je de verbanden zo kunt zien. De opdracht om te beredeneren dat $\frac{1}{2} = \frac{3}{6}$ wordt algauw tamelijk geforceerd en is vooral een afleesopdracht. We kiezen daarom voor een omkering; we vragen de leerlingen om zelf breukenstroken te maken. We gebruikten daarvoor de eerdergenoemde les over een bakker die banketstaven maakt en deze op verzoek van de klant voorsnijdt. Het idee hierachter is dat leerlingen moeten gaan nadenken over hoe je dat handig doet. Zo kun je een banketstaaf in zessen delen, door te bedenken dat je zesden krijgt door halven in drieën te delen of door eerst in drieën te delen en de stukjes van eenderde te halveren. In de les wordt dan een overgang gemaakt van het uitvoeren met stroken naar anticiperen en beredeneren. Bijvoorbeeld: ‘Beschrijf hoe je een banketstaaf in twaalven zou verdelen.’



figuur 2: de breukenkast

We gaven eerder aan dat wij voor de ontwikkeling van ideeën in gesprek zijn gegaan met enkele leerkrachten in Leiderdorp. Deze leraren hebben met deze les geëxperimenteerd. Het bleek een les vol ontdekkingen.



figuur 3

De leerkrachten observeren welke ontdekkingen de leerlingen doen door over het vouwen van strookjes te praten. Die doorzien nu dat $\frac{1}{8}$ kleiner is dan $\frac{1}{4}$ en ontdekken dat $\frac{8}{8}$ een hele staaf is (fig.3). De leerlingen ontdekken

ook dat je bij $\frac{1}{15}$ eerst in drieën en daarna in vijven of andersom moet delen. Ze zien dat dit iets te maken heeft met tafels.
Dit neemt niet weg dat enkele leerkrachten ontevreden zijn met deze opbrengst van het vouwen. De aandacht gaat uit naar het precies vouwen en daardoor raken de relaties met de context uit beeld. Een van de leraren stelt daarom voor het vouwen van stroken eruit te halen. Ze kondigt aan de leerlingen in de les de banketstaven te zullen laten knippen. Het blijkt dat ook op die manier de bedoelde redeneringen naar voren komen.
Het inzicht dat bij $\frac{1}{15}$ eerst in drieën en daarna in vijven kunt delen vormt de basis voor de redenering dat $\frac{1}{5} = \frac{3}{15}$, omdat $\frac{1}{15}$ drie keer zo klein is als $\frac{1}{5}$. In het verlengde hiervan ligt het type redeneringen over gelijknamig maken waar het ons om te doen is. De discussie met leraren leert dat de activiteit rond het opdelen van banketstaven dit ook tot gespreksonderwerp met leraren maakt.

5 gefundeerd kommagetalleninzicht

Om leerlingen de structuur van kommagetallen te laten achterhalen ontwikkelden we de lessenserie ‘Een tiende van een tiende’ (Van Galen, 2004). Uitgangspunt van deze lessenserie is het idee dat je metingen kunt verfijnen via herhaald ‘decimeren’.[2] In eerste instantie worden de meetresultaten genoteerd met ‘gewone tiendelige breuken’. Met notaties als, ‘2 stroken + $\frac{7}{10}$ strook’, en ‘$\frac{95}{100}$ strook’. Het voordeel van deze notatie is dat de ‘tienden’, ‘honderdsten’, ‘duizendsten’ expliciet worden genoteerd. Bij kommagetallen gaat dit indirect, via de positie van de cijfers. In de praktijk vormt dit vaak een struikelblok, een aantal leerlingen denkt bijvoorbeeld dat 0,19 meer is dan 0,9 omdat 19 meer is dan 9. Wanneer ze gewone-tiendelige-breukentaal gebruiken wordt het $\frac{9}{10}$ versus $\frac{19}{100}$ en wordt snel helder dat $\frac{9}{10}$ aanmerkelijk groter is.
De leerkracht begint de eerste les met: ‘Hoe zou men vroeger land opgemeten hebben?’ De leerlingen worden teruggeplaatst in de tijd dat er nog geen metriek stelsel was. De leerkracht suggereert dat de leerlingen alleen de meter als maat hebben en vraagt hen hoe het meten dan gaat. De leerlingen stellen voor stukken ijzerdraad van een meter te gebruiken, in de klas meten ze met stukjes touw van een meter. De tafels blijken bijna twee keer een touwtje te zijn; 1 touwtje plus $\frac{4}{5}$ touwtje. Een van de leerlingen introduceert de omschrijving ‘$1\frac{4}{5}$ touwlengte’. De lerares vraagt haar hoe je met zo’n touwtje preciezer kunt meten. De leerlingen komen met suggesties als, in vieren, in zessen, in vijven, in achten, in tienden of in twaalfden. En er wordt gediscussieerd over de handigheid of onhandigheid van de verschillende opties. Zo kan handig in achten worden gedeeld door herhaald

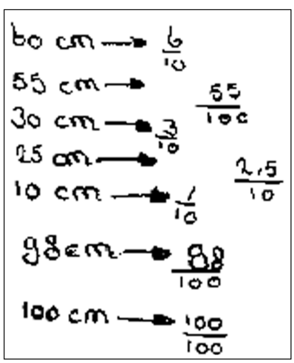
halveren en biedt in twaalfden delen tal van mogelijkheden voor verdere onderverdelingen. Ten slotte vertelt de lerares dat er in het verleden is gekozen voor een onderverdeling in tien stukjes.

Dan gaan de leerlingen aan het meten met stroken waar al een onderverdeling in tien stukjes op staat. Zo wordt een ansichtkaart opgemeten, die blijkt $\frac{1}{3}$ strook. Weer roept dit een discussie op rond de kwestie van de fijnere onderverdeling aan de orde. En weer wordt de discussie afgesloten met de vaststelling dat in het verleden ook hier voor een onderverdeling in tienden is gekozen.

Daarna wordt de verbinding met meters en centimeters gelegd: de grote strook is 1 meter, kleine strook 10 centimeter. In de klas wordt besproken hoe een dergelijk klein strookje verder onderverdeeld kan worden. Ook hier moet in tienen worden gedeeld en de leerlingen zien snel dat een tiende van het kleine strookje $\frac{1}{100}$ meter is.

Dan gaan de leerlingen aan de slag met strookjes van 60, 55, 30 en 25 centimeter. Deze lengtes moeten worden uitgedrukt in ‘strooklengtes’ of ‘touwlengtes’. Veel kinderen weten de strookjes van 60 en 30 centimeter te benoemen in termen van hele stroken of in termen van tienden. Het uitdrukken van de andere lengtes in strooklengtes vereist wat meer creativiteit. Tisse formuleert bij 25 centimeter: $\frac{2}{10}$ en $\frac{1}{2}$ tiende. Andere kinderen maken hier gebruik van de breuk $\frac{1}{20}$ als de helft van $\frac{1}{10}$. Ruben kiest nog een andere notatie. Volgens hem noteer je deze strooklengte als $2,\frac{5}{10}$.

Mathijs is een van de leerlingen die de overstap naar honderdsten direct maakt en bij de strook van 25 centimeter uitkomt op $\frac{25}{100}$ van een strook. Hij licht daarbij toe hoe tien stukjes van een honderdste passen in $\frac{1}{10}$ strook. De voorbeelden (fig.4) laten zien dat de uitbreiding van tienden naar honderdsten voor een aantal leerlingen niet zo vanzelfsprekend is als wij in het gangbare reken-wiskundeonderwijs wel eens veronderstellen.



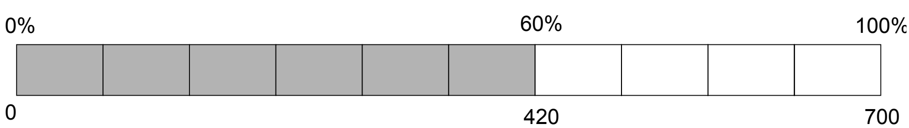
figuur 4

Bij het leren van kommagetallen sluiten we aan bij het idee dat leerlingen bij het leren een ontwikkeling doormaken die vergelijkbaar is met hoe een concept zich in de historie heeft ontwikkeld (Freudenthal, 1983; Freudenthal, 1991; Keijzer, Van Galen & Oosterwaal, 2004). Dit principe willen we ook toepassen op het leren van procenten, maar starten daar niet bij. Een krantenbericht maakt helder dat het bij procenten om relatieve getallen gaat.

6 procenten als relatieve getallen

Het krantenbericht meldt dat vrouwen die in de overgang 'de pil' blijven slikken om overgangsklachten te voorkomen 60 procent meer kans hebben op borstkanker. Het lijkt erop dat niemand zich realiseert dat het hier om een relatief getal gaat. Nergens in het artikel, noch in de discussie die daarna in de krant wordt gevoerd, komt aan de orde waar die 60 procent naar verwijst. Er wordt eigenlijk net gedaan of 60 procent een absoluut getal is. Dat is niet zo, want bij 60 procent gaat het altijd om 60 procent van iets. En het maakt nogal wat uit wat dat iets is. Wanneer bijvoorbeeld de kans op borstkanker 1 op 1.000.000 is dan wordt deze kans 1,6 op 1.000.000, dat wil zeggen ongeveer 1 op 700.000. Als onze informatie klopt is de kans op borstkanker 11 op de 100; dan is de situatie ernstiger. Dan leidt het pilgebruik tot een situatie waarbij de kans ongeveer 17 op de 100 wordt. Toch leidt het verschil tussen 11 op de honderd en 17 op de honderd minder dramatisch dan de als absoluut getal geïnterpreteerde 60 procent suggereert.

Procenten hebben een aantal kenmerken die we in het onderwijs willen uitbuiten. Procenten geven vaak een deel van een geheel aan. Deze deel-geheel-relatie maakt het mogelijk om percentages weer te geven op een strook, deze weergave maakt wederom helder dat het bij procenten om relatieve getallen gaat. Verder ondersteunt het gebruik van een strook het handige rekenen met procenten.
Dit wordt bijvoorbeeld zichtbaar bij het bepalen van 60 procent van de leerlingen van een school. Dat kunnen we pas als we weten hoeveel leerlingen er op de school zitten.

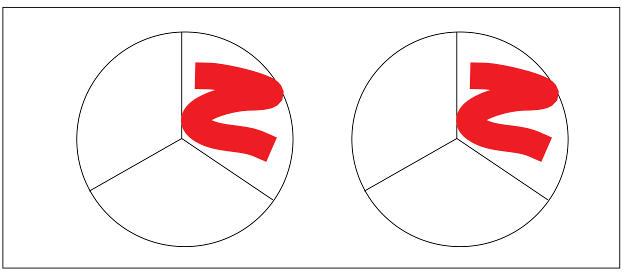


figuur 5

Met andere woorden, we worden geconfronteerd met het relatieve karakter van procenten. Wanneer we weten dat er zevenhonderd leerlingen op de school zitten, kan de situatie als volgt in beeld worden gebracht (fig.5).
Maar natuurlijk kan er voor een andere indeling gekozen worden en is het vooral van belang dat de leerlingen de situatie en de gekozen aanpakken begrijpen. We willen daarbij graag dat de leerlingen twee aspecten tegelijkertijd in ogenschouw nemen: 60 procent als deel-geheel relatie of breuk én de verhouding tussen 420 en 700.

7 breuken als relatieve getallen

Evenals procenten zijn breuken ook relatieve getallen. Dat wil weer zeggen dat een breuk als $\frac{2}{3}$ niets zegt als niet duidelijk is waarvan de $\frac{2}{3}$ genomen wordt. Dat dit voor leerlingen werkelijk een probleem kan zijn, laat het volgende voorbeeld zien. Leerlingen werken aan de volgende opgave (fig.6).

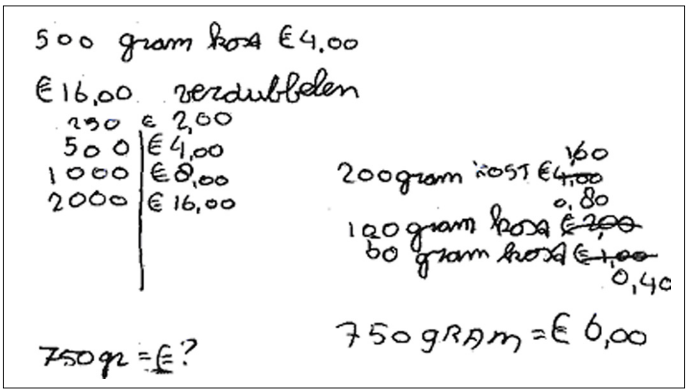


figuur 6: drie kinderen verdelen twee pizza's

Wanneer er gevraagd wordt naar 'de breuk die hierbij hoort', twijfelen veel leerlingen tussen 'tweederde' en 'tweezesde'. Dit is op zich niet zo erg, maar het probleem is dat het de leerlingen aan middelen ontbreekt om deze twee interpretaties met elkaar te verweven. Dat dit een probleem is komt wellicht voort uit het eenzijdig associëren van een breuk met het uitvoeren van een procedure: 'zoveel partjes maken en daar zoveel van nemen'. En twee van de zes partjes leidt dan naar $\frac{2}{6}$.
Wanneer leerlingen het relatieve karakter van breuken herkennen, dan realiseren ze zich dat het gaat om een deel van iets. In het bovenstaande voorbeeld gaat het om $\frac{2}{6}$ van het totaal, of om $\frac{2}{3}$ pizza. 'Pizza' of 'totaal' is dan een maat waarin je uitdrukt hoeveel iemand iets krijgt. Wanneer je breuken vereenzelvigt met een procedure kan de hierboven geschetste verwarring ontstaan. Wanneer je je evenwel realiseert dat het om relatieve getallen gaat kunnen deze problemen voorkomen worden.

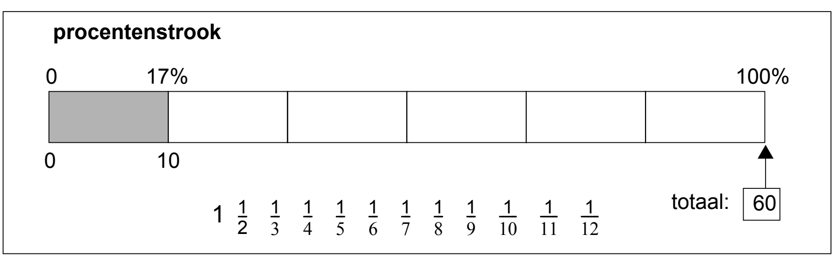
8 verhoudingstabel en andere modellen

We merken dat leerlingen soms heel creatieve manieren bedenken om verhoudingsproblemen op te lossen. Wanneer leerlingen werken aan verhoudingssituaties uit de methode zien we dat ze vaak verhoudingstabellen invullen als die voor hen klaarstaan. Dit leert ze echter niet spontaan voor de verhoudingstabel te kiezen. Wanneer de tabel er niet meer staat kiezen vrijwel alle leerlingen voor een andere manier om hun oplossing te schematiseren. We merken verder dat de gekozen schematisering vooral afhangt van de context waarin gerekend wordt. Die maakt bijvoorbeeld of de getallen naast of juist onder elkaar genoteerd worden en of er bijvoorbeeld nog een strook of cirkel getekend wordt. We kiezen er daarom voor de verhoudingstabel te laten ontstaan door met de leerlingen te overdenken hoe oplossingen handig kunnen worden genoteerd (fig.7).



figuur 7

Naast de verhoudingstabel, als middel om berekeningen overzichtelijk op te schrijven, zien we vooral de strook en de getallenlijn als belangrijke modellen. De strook sluit goed aan bij (meet)contexten waarbij de breuk als operator dient, zoals bij het bepalen van $\frac{2}{5}$ van tien kilometer.



figuur 8

Ook maakt het relatieve karakter van procenten dat hier om een operator gaat en daarom ligt een model dat goed indeelbaar is ook hier voor de hand. Verder biedt de strook goede mogelijkheden om breuken en procenten met elkaar in verband te brengen. Daarbij lokt de strook uit tot globaal rekenen; $\frac{1}{6}$ deel is zo op het oog ergens tussen 15 en 20 procent (fig.8). Daarom wordt de strook, naast de verhoudingstabel, gebruikt bij het rekenen met procenten.

9 werken aan getalgevoeligheid en kennis van basale getalrelaties

Het leren omgaan met breuken, verhoudingen, kommagetallen en procenten bouwt voort op het (leren) rekenen met gehele getallen. Het verkennen van getalrelaties begint dan ook bij het onderhouden van eerder verkende relaties tussen gehele getallen. Dergelijk onderhoud kan plaatsvinden in de vorm van korte hoofdrekenlesjes, waarin kale getallen of eenvoudige contexten centraal staan. Het verbreden van tafelkennis, door tafelproducten en andere vermenigvuldigsommen uit elkaar af te leiden, vormt een mogelijke invulling van het onderhouden en uitbreiden van het relatienetwerk. Dat kan bijvoorbeeld gebeuren met een ster rond de som ‘$4 \times 25 = 100$’ of ‘$4 \times 6 = 24$’. In dit laatste geval kunnen via verbindingslijntjes vergelijkbare producten gehangen, als $40 \times 6 = 240$ en $4 \times 60 = 240$, maar ook $2 \times 6 = 12$, $8 \times 6 = 48$ en $5 \times 6 = 30$. Bij ‘4×25’ passen op deze manier bijvoorbeeld ‘$8 \times 25 = 200$’ en ‘$8 \times 12\frac{1}{2} = 100$’.
Uiteraard is er dus - zoals aangegeven - bijvoorbeeld met het oog op het rekenen met procenten - in de genoemde hoofdrekenlesjes aandacht voor het rekenen met het getal 100. Dit speelt bijvoorbeeld ook een rol bij het bespreken van de volgende eenvoudige context:

> 100 Videobanden gestapeld in een doos.
> Hoe kun je de videobanden goed inpakken?

De verkende relaties worden op een bepaald moment gemakkelijk uitgebreid naar kommagetallen en/of breuken. In een context van meetlatjes kunnen relaties als $4 \times 25 = 100$ onderzocht worden. De overstap van centimeters naar meters maakt de getalrelatie $4 \times 0{,}25 = 1$ en denken in termen van breuken $4 \times \frac{1}{4} = 1$. Kinderen kunnen nu uitgedaagd worden uit te rekenen wat 4×75 of $4 \times 0{,}75$ of $4 \times \frac{3}{4}$ is. Het verkennen van getalrelaties richt zich op het zien en onderzoeken van regelmaat en leidt aldus tot het onderzoeken van relaties tussen kommagetallen en breuken. Meer algemeen zorgt het zoeken naar getalrelaties tot het flexibeler omgaan met breuken, verhoudingen, procenten en kommagetallen.

In een toets gingen we na hoe het met de kennis van deze eenvoudige getalrelaties was gesteld. De leerlingen beheersen veel van de sommen die wij als voorwaardelijk zien voor het werken met breuken, procenten, verhoudingen en kommagetallen. We stelden wel vast dat bij moeilijkere contextopgaven, waarbij het toepassen van getalrelaties vraagt om het doorzien van de situatie, de leerlingen meer moeilijkheden gaf. We denken daarom dat het kunnen gebruiken van getalrelaties in eenvoudige opgaven onvoldoende garantie biedt om deze kennis ook in meer complexe situaties toe te passen. Daarvoor is het nodig dat leerlingen inzicht in verschillende toepassingen krijgen. Bij breuken, procenten, verhoudingen en kommagetallen betekent dit dat het leren rekenen aangrijpt in het verkennen en uitbreiden van, aan contexten gekoppelde, getalrelaties.

10 discussie met het veld

We gaven reeds aan dat we het onderwijs in breuken, procenten, kommagetallen en verhoudingen samen met het veld wilden verbeteren, door met leerkrachten in gesprek te gaan. We lieten in het voorafgaande al enkele voorbeelden zien van observaties en reacties van leerkrachten. Zo gaven we reeds een voorbeeld van de opbrengst onze gesprekken met de leerkrachten in Leiderdorp. Een activiteit rond het opdelen van banketstaven bracht het overdenken van het construeren van gelijkwaardige breuken naar voren. Dit was een van de kernen die we onder de aandacht wilden brengen.

Een andere discussie met de leraren uit Leiderdorp richt zich op het vergelijken van breuken. De methode zet bij het vergelijken van bijvoorbeeld de breuken $\frac{1}{2}$ en $\frac{2}{5}$ het meten in. De leerlingen krijgen de opdracht te zoeken naar een lengte (hier bijvoorbeeld 10 kilometer kilometer) waarvan de helft en $\frac{2}{5}$ kan worden genomen. Via het vergelijken van de resultaten van het ‘deel nemen’ (respectievelijk vijf en vier kilometer) wordt duidelijk dat $\frac{1}{2}$ groter is.

Ons lijkt dit nogal omslachtig en weinig inzichtelijk. Wanneer je bedenkt hoe $\frac{2}{5}$ en $\frac{1}{2}$ er op een strook uitziet zie je immers direct welke groter is. Bij $\frac{2}{5}$ krijg je twee stukjes aan de ene kant en drie aan de andere; bij $\frac{1}{2}$ valt de verdeling precies in het midden. De leraren onderkennen de kwaliteit van de laatstgenoemde oplossing, maar merken ook dat deze oplossingsmethode niet algemeen bruikbaar is. Dat is het voordeel van de manier van de methode, die geeft de leerlingen houvast. De leraren geven aan dat ze wel ruimte willen maken voor de inzichtelijk aanpak, maar dat ze de procedure in de rekenmethode niet los willen laten.

11 tot slot

Wat we hier laten zien is geen radicale vernieuwing van de didactiek van de breuken, procenten, kommagetallen en verhoudingen. We proberen door specifieke kernen aan te wijzen leerkrachten te ondersteunen bij de vormgeving van hun onderwijs. We willen ons tot enkele kernen beperken, om het onderwijs op die manier voor leerkrachten overzichtelijk te maken.We denken dat het essentieel is dat deze kernpunten onderwerp van discussie worden. Die proberen we op gang te krijgen door artikelen als deze en presentaties tijdens studiedagen en conferenties. Daarnaast proberen we het veld te bereiken via het Rekenweb. We hopen dat dit soort publicaties en activiteiten aanleiding vormen om te reageren op onze voorstellen en de werkwijze die we volgen om het veld te bereiken. En natuurlijk vragen we niet alleen leraren basisonderwijs om een reactie. De inbreng van opleiders, begeleiders, ontwikkelaars en onderzoekers is onmisbaar in dit proces.[3]

noot

1 www.rekenweb.nl/tal
2 Het herhaald delen door 10 noemen we wel ‘herhaald decimeren’, hoewel dat taalkundig niet helemaal correct is. Decimeren verwijst immers naar het terugbrengen naar een tiende deel en niet naar de activiteit van het in tienen delen. Aan de andere kant kun je daar tegen inbrengen dat het resultaat van het decimeren een nieuwe maat is die nu juist een tiende deel van de vorige is.
3 U kunt u reacties kwijt via: talbovenbouw@fi.uu.nl

literatuur

Bokhove, J., K. Buys, R. Keijzer, A. Lek, A. Noteboom & A. Treffers (1996). De Breukenbode. Een leergang voor de basisschool (werkbladen en handleiding). Enschede/Utrecht: SLO / FI / Cito.
Freudenthal, H. (1983). The implicit philosophy of mathematics: History and education. Proceedings of the International Congress of Mathematicians. Warsaw, 1695-1709.
Freudenthal, H. (1991). Revisiting Mathematics Education, China lectures. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
Galen, F. van (2004). In de voetsporen van Simon Stevin. Willem Bartjens, 23(5), 16-19.
Heuvel-Panhuizen, M. van den, K. Buys & A. Treffers (red.) (2001). Kinderen leren rekenen. Tussendoelen annex leerlijnen. Groningen: Wolters Noordhoff.
Heuvel-Panhuizen, M. van den & K. Buys (red.) (2004) Jonge kinderen leren meten en meetkunde. Tussendoelen annex leerlijnen. Groningen: Wolters Noordhoff.
Janssen, J., F. van der Schoot, B. Hemker & N. Verhelst (1999). Balans van het reken-wiskundeonderwijs in de basisschool 3. Arnhem: Cito.
Keijzer, R. (2003). Panama Praktijktip nummer 93. Lekker eten. Tijdschrift voor na-

scholing en onderzoek van het reken-wiskundeonderwijs, 22(2), 49-51.

Keijzer, R. (2004). Rekenen in de bovenbouw – leerkrachten gezocht. Jeugd in School en Wereld, 88(9), 18-21.

Keijzer, R., F. van Galen & L. Oosterwaal (2004). Reinvention revisited – learning and teaching decimals as example. Paper presented at ICME10, Copenhagen, Denmark.

Keijzer, R., F. van Galen & K. Gravemeijer (2004). Kiezen voor de kern. Volgens Bartjens… 24(1), 14-16.

Treffers, A., M. van den Heuvel-Panhuizen & K. Buys (red.) (1999). Jonge kinderen leren rekenen. Tussendoelen annex leerlijnen. Groningen: Wolters Noordhoff.