

RUIMTELIJKE ORIENTATIE IN "REKENEN EN WISKUNDE"

K.Gravemeijer

inleiding

Dit is een beschrijving van "ruimtelijke oriëntatie" in het programma "Rekenen en Wiskunde". De nadruk ligt hier op "meetkunde als wiskundige activiteit". Eerst moeten we echter wat zeggen over de context waarbinnen het programma ontwikkeld is. Het programma is ontwikkeld bij het project Onderwijs en Sociaal Milieu (OSM). Dit project richt zich op een verbetering van de onderwijskansen van kinderen uit zogenaamde 'kansarme milieus'. In die zin is het project vergelijkbaar met het GEON-project en het IPA.

Deze projecten zijn alle ontstaan in een tijd, waarin de problematiek van de anderstalige leerlingen nog niet speelde. De buitenlandse leerlingen maken daarom geen deel uit van de doelgroep. Het project OSM richt zich alleen op de problemen van de Nederlandse kinderen. Onderzocht wordt of de problematiek van deze kinderen opgelost kan worden door een aanpassing van het onderwijs via een bepaalde aanpak.

Uitgangspunten voor deze aanpak zijn:

- Een sterke structurering van de leerstof: d.w.z. het opdelen van de leerstof in kleine leerstapjes.
- Een sterke structurering van het onderwijs: d.w.z. proberen ervoor te zorgen dat deze leerstapjes ook geleerd worden. (Dit wordt bewerkstelligd door de leerkracht materiaal te bieden waarmee het onderwijsleerproces zo optimaal mogelijk kan verlopen: controlemiddelen te verschaffen en door het geven van suggesties voor remediëring voor het geval een leerstapje nog niet beheerst wordt.)
- Aansluiting bij de belevingswereld van kinderen.
- Aandacht voor het leren gebruiken van en voor het oplossen van problemen benodigde cognitieve strategieën.

Op basis van deze uitgangspunten worden onderwijsprogramma's ontwikkeld voor de kleuterschool en voor de lagere school op de gebieden: moedertaal, rekenen/wiskunde en sociale ontwikkeling. Daarnaast zijn er programma's ontwikkeld voor het aanpakken van probleemgedrag en voor het betrekken van de ouders bij het onderwijs.

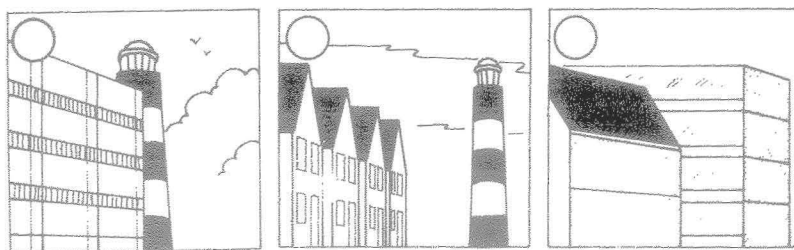
In "Rekenen en Wiskunde" klas 1 is vooral op basis van Wiskobasmateriaal gewerkt aan 'meetkunde als wiskundige activiteit'.

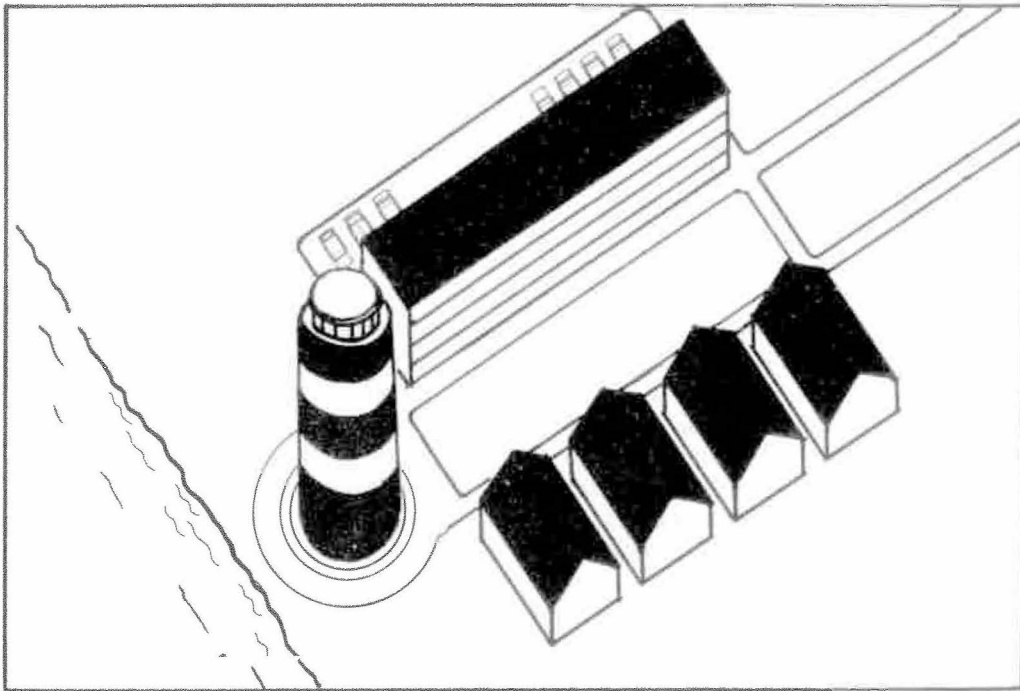
1 meetkunde als wiskundige activiteit in "Rekenen en Wiskunde" klas 1

Hoewel we bij "Rekenen en Wiskunde" klas 1 het aspect van 'meetkunde als wiskundige activiteit' uitgediept hebben, is natuurlijk ook aandacht besteed aan de ruimtelijke oriëntatie als zodanig. Daarbij is gezocht naar activiteiten die het leren oriënteren in de ruimte ondersteunen. Uitgegaan is van een globale analyse van het oplossen van ruimtelijke oriëntatieproblemen.

voorbeeld

Ik heb een maquette van een dorp en een aantal foto's.





Waar stond de fotograaf?

Dit probleem kan op verschillende manieren opgelost worden. Je kunt om de maquette heen lopen en onderzoeken wat je ziet vanuit de verschillende standpunten. Ook kun je je proberen in te denken wat je ziet als je op een andere plek staat. Dat gaat ongeveer zo: je vormt een mentaal beeld van de situatie en je neemt ten opzichte van dit beeld een ander standpunt in. Daarbij zijn in principe twee handelingen mogelijk:

- je draait in gedachten om het beeld heen, of
- je draait het beeld in gedachten.

Dan beschrijf je voor jezelf wat je ziet: 'De flats rechts en daarachter de vuurtoren ...'. En je vergelijkt dit met de foto's. Tenslotte kun je nog een blikwisseling toepassen: dan stond de fotograaf vanuit de vuurtoren gezien achter de flats.'

Met deze oplossingsprocessen in het achterhoofd is gezocht naar activiteiten die de leerlingen ervaringen verschaffen die zo'n oplossingsproces ondersteunen. Dit levert activiteiten als:

- het gebruik van reken/taalbegrippen voor het beschrijven van situaties;
- het draaien, verschuiven en spiegelen van figuren in het platte vlak;
- het werken met plattegronden (met gebruik van pictogrammen);
- fotograferen etc.

Zo fungeert het doel ruimtelijke oriëntatie als bron voor tal van activiteiten in het programma. Deze activiteiten werden aangegrepen om het idee van meetkunde als wiskundige activiteit gestalte te geven.

Om dit idee te verduidelijken zullen we eerst ingaan op het begrip wiskundige activiteit. Zoals bekend kunnen we aan de wiskunde twee aspecten onderscheiden: de inhoud van de wiskunde (wiskunde als systeem) en de werkwijze van de wiskunde (wiskunde als activiteit).

Wiskunde als activiteit wordt gekenmerkt door een z.g. wiskundige aanpak, een specifieke manier om problemen te benaderen. We zullen enkele kenmerken van zo'n wiskundige aanpak noemen. We noemen echter alleen die kenmerken die passen in de rest van ons betoog.

Bij een wiskundige aanpak kun je denken aan modelgebruik. Het gebruik van modellen als getallenlijn, rooster en grafieken. Kenmerk van wiskunde als activiteit is echter niet zozeer het *gebruik* van modellen alswel het *maken* van modellen. Dus activiteiten als schematiseren en formaliseren. Hier komt de specifieke aanpak naar voren: je selecteert de voor de wiskundige

vraagstelling relevante kenmerken en deze breng je onder in het model: je ziet af van 'bijzaken'. In een wiskundige aanpak komen ook andere zaken naar voren dan in een nieuwe situatie gebruik maken van een ontdekking die je in een eerdere situatie deed. Ontdekkingen als patronen, regelmatigigheden of regels. Het doen van deze ontdekkingen maakt natuurlijk ook deel uit van een wiskundige aanpak.

Hoe doe je nu zulke ontdekkingen?

Ons inziens met name via een trial and error strategie die gericht is op het vinden van regelmatigheden. Het opmerken van overeenkomsten en verschillen kan een belangrijk hulpmiddel zijn bij een dergelijke strategie die we zullen aanduiden met *gericht proberen*.

Waarom meetkunde?

Wanneer we wiskundige activiteiten nu typeren met de trefwoorden: schematiseren, formaliseren, modelgebruik, gericht proberen, gebruik van ontdekkingen, opmerken van overeenkomsten en verschillen, waarom kiezen we dan meetkunde als onderwerp voor deze wiskundige activiteit?

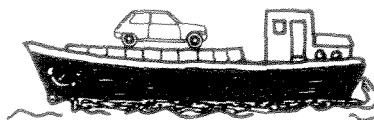
We hebben daarvoor drie argumenten:

1. Kinderen van zes à zeven jaar hebben al veel ervaring met meetkundige aspecten van de werkelijkheid en daar kun je bij aansluiten.
2. Je maakt gebruik van concreet (aanschouwelijk, tastbaar) materiaal dat veelal ook manipuleerbaar is.
3. Doordat het materiaal manipuleerbaar is, geeft het materiaal zelf een directe feedback.

Ad 1 kinderlijke ervaringen met meetkunde

Tallose activiteiten van kinderen kunnen geïnterpreteerd worden als ervaringen met meetkunde, zoals:

- *Verstopperje spelen.* Als je je verstoppt is het zaak ervoor te zorgen dat je niet gezien wordt. Dan moet je, mentaal, het standpunt innemen van degene die jou zoekt.
- *Het maken van puzzels.* Daar speelt het mentaal draaien van de puzzelstukjes een belangrijke rol. Maar ook andere zaken komen naar voren. Strategieën als het beginnen met de rand. Je gebruikt daarvoor alle puzzelstukjes met een *rechte* kant. Vaak is ook de afbeelding op de deksel van de doos kleiner dan de puzzel zelf. Kinderen hebben met dit 'vergroten' in het algemeen weinig moeite. Ze merken het nauwelijks op.
- *Grootte-verhoudingen.* Deze spelen ook een belangrijke rol in verhalen. Zeker als het gaat over kabouters of reuzen.
- *Het maken van een kijkdoos.* Ook bij het maken van een kijkdoos komen tal van meetkundige aspecten aan de orde. De figuren moeten zo geplaatst worden dat je ze allemaal kunt zien. Je 'moet' rekening houden met verhoudingen.
- *Meetkundige ontdekkingen bij het waarnemen zelf.* Bijvoorbeeld de ontdekking dat je een boom achter je duim kunt verstoppen.
- *Tot slot een ervaring met kinderlijke ervaring.* Alexli (zes jaar) zit achterin de auto en kijkt naar de vrachtboten op de rivier. We passeren een boot met een auto op het dek.



"Dat is pas een grote boot", zegt ze. "Als de auto zo groot is."



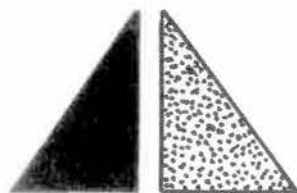
dan is de boot zo groot."



Ad 2 concreet/manipuleerbaar

Meetkundige problemen, zoals ze in de eerste klas aan de orde komen, kunnen meestal opgelost worden door met concreet materiaal te manipuleren. We geven daarvan een paar voorbeelden:

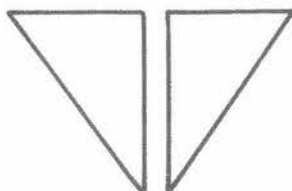
- De leerlingen hebben rode en groene driehoekige plakkertjes.



rood

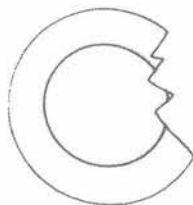
groen

De vraag waar het groene plakkertje in de onderstaande figuur hoort, kan al proberend opgelost worden.

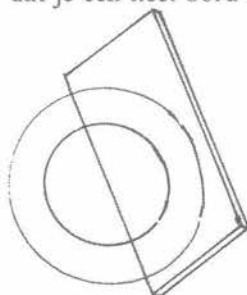


Het kind kan het plakkertje verschuiven tot het past.

- De leerlingen krijgen de opdracht om het kapotte bord weer heel te maken met behulp van een spiegeltje.



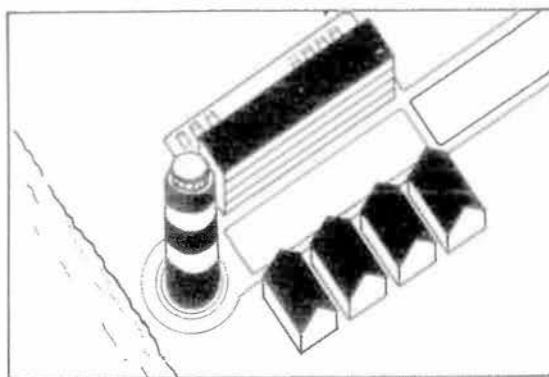
De spiegel moet zo geplaatst worden dat je een heel bord ziet:



Bij het zoeken naar de juiste stand van de spiegel heeft de leerling steeds steun van wat hij/zij in de spiegel ziet. Al schuivend kan de juiste oplossing gevonden worden.

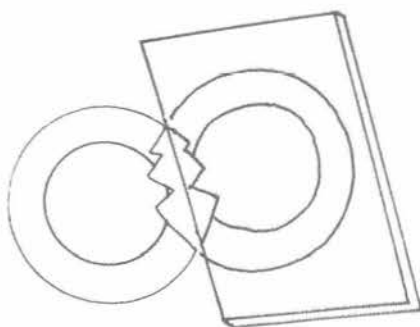
- Als gevraagd wordt foto's met een maquette te vergelijken om te bepalen welke foto vanuit

welk standpunt genomen is, kun je om de maquette heen lopen: je kunt de maquette ook ronddraaien.



Ad 3 directe feedback

In samenhang met het manipuleren duikt ook de feedback op. Het materiaal zelf geeft deze feedback. Het manipuleren en proberen geeft je niet alleen informatie of je de oplossing al hebt, maar over of je 'warm' of 'koud' bent. Het duidelijkst is dat misschien te zien bij het spiegelen.



Als de spiegel nog te ver van het midden staat, zie je een figuur die te groot is. Verschuif je nu de spiegel in de goede richting, dan wordt de figuur kleiner (en deze gaat steeds meer op het bord lijken). Verschuif je de spiegel in de andere richting, dan zie je dat het fout gaat. Schuif je de spiegel de goede kant uit, dan zie je vanzelf wanneer je goed zit: als je een *rond* bord krijgt.

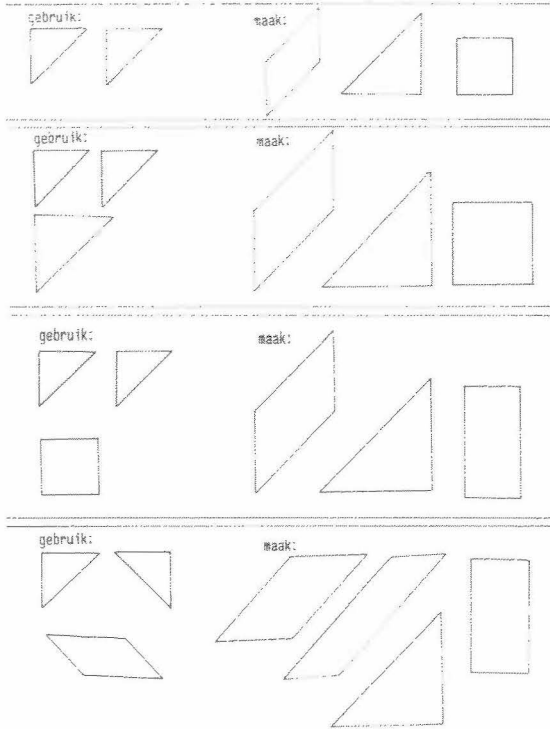
N.B. Dankzij dit soort ervaringen kunnen de leerlingen na verloop van tijd 'beredeneren' waar je de spiegel moet zetten voor het gewenste resultaat.

2 gericht proberen en gebruik maken van ontdekkingen

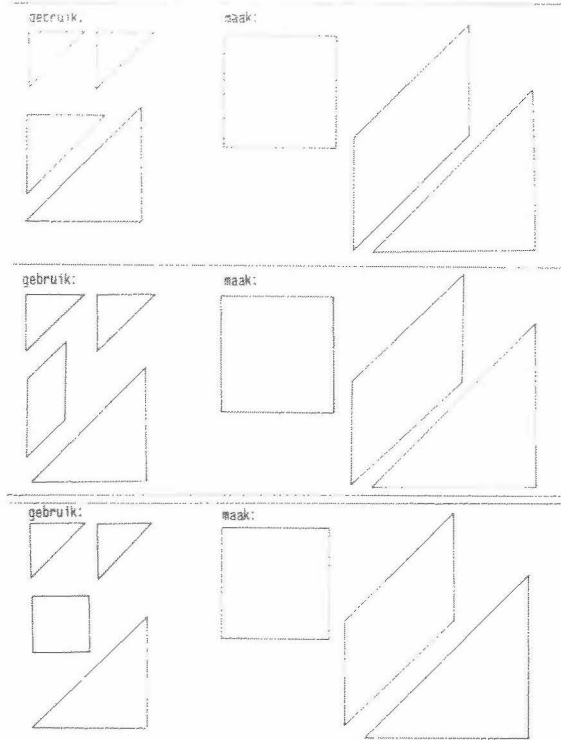
De eerder genoemde kenmerken van een wiskundige aanpak: opmerken van overeenkomsten en verschillen, het gebruik van ontdekkingen en gericht proberen, willen we verduidelijken aan de hand van een aantal tangramopdrachten voor de lezer.

De opdracht luidt steeds: "Geef in de te maken figuren rechts aan hoe deze samengesteld kunnen worden uit de figuren links."

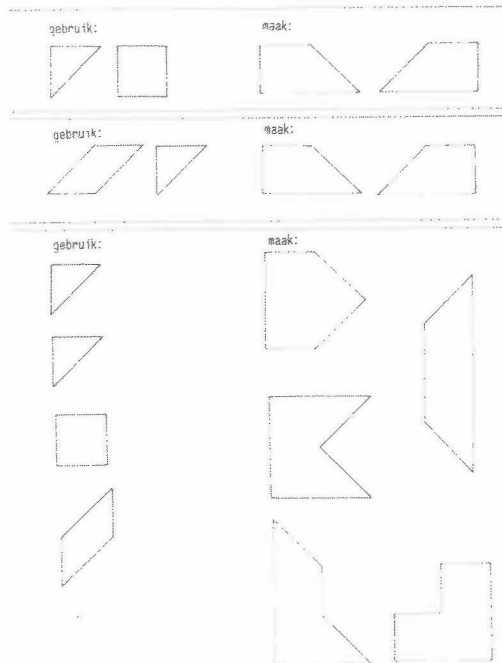
TANGRAM 1



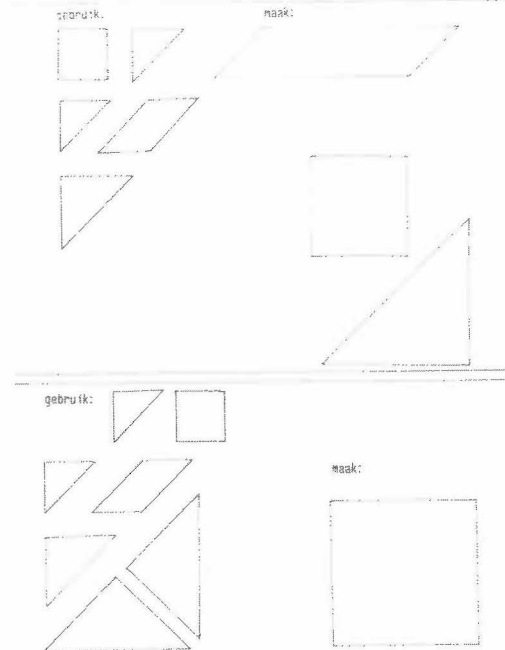
TANGRAM 2



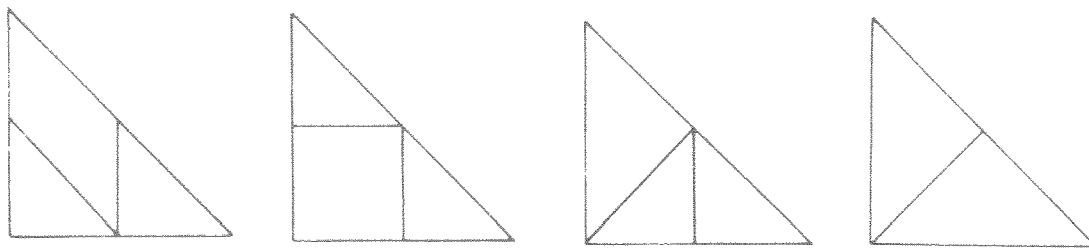
TANGRAM 3



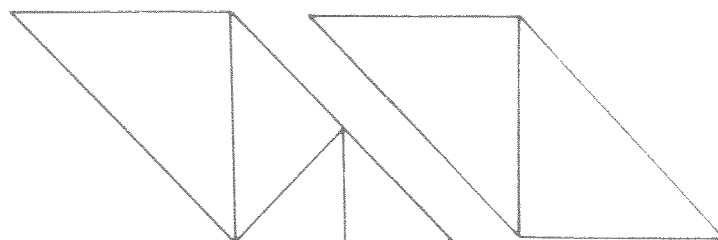
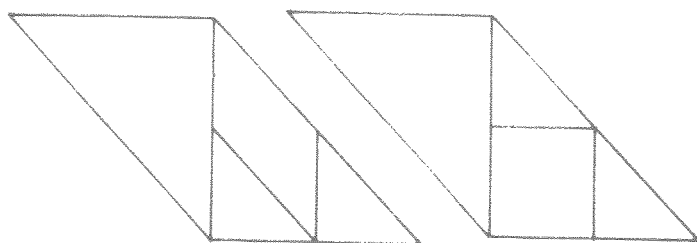
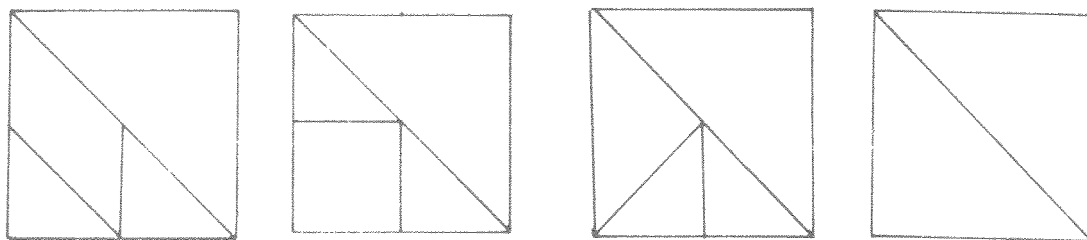
TANGRAM 4



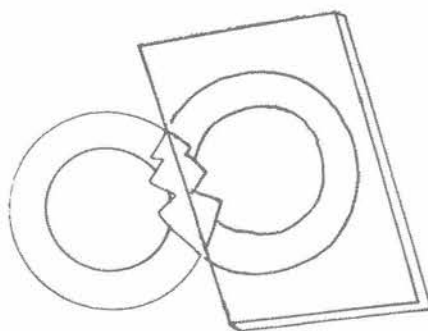
Bij het maken van de tangram-opgaven komt het gerichte proberen duidelijk naar voren. Handig is ook het gebruik maken van ontdekkingen. Je ontdekt bijvoorbeeld dat je een driehoek op verschillende manieren kunt samenstellen.



Die kennis kun je gebruiken bij het maken van figuren die je kunt zien als opgebouwd uit twee driehoeken.



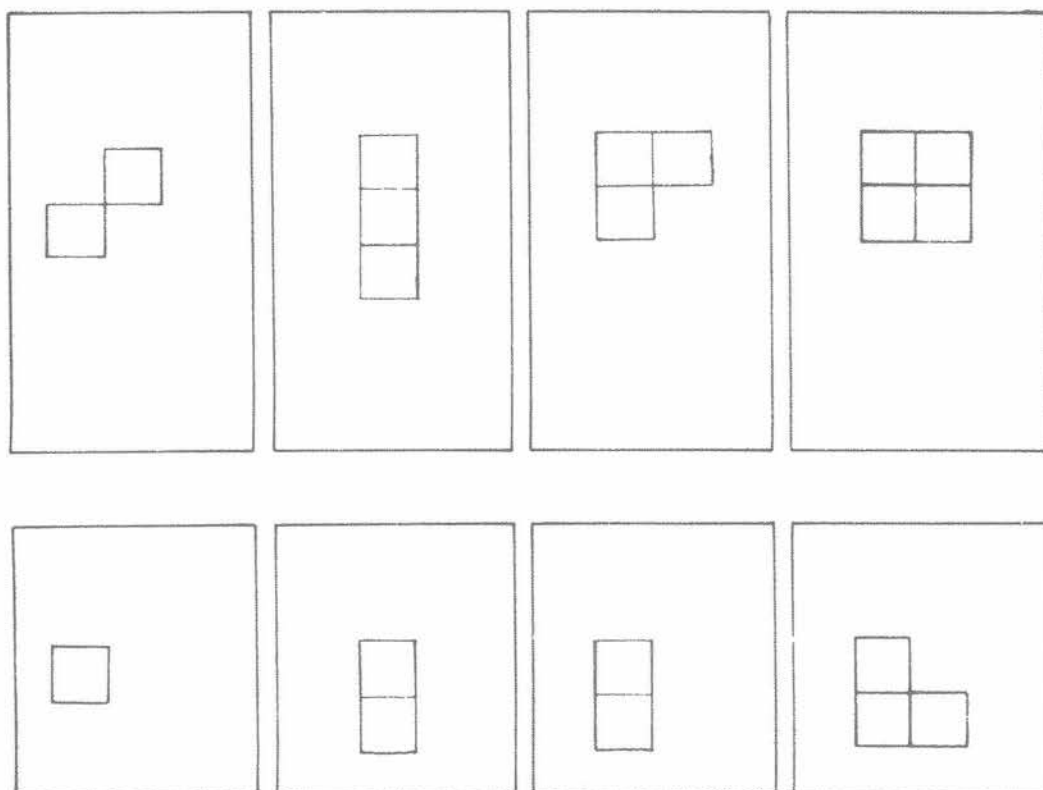
(Een uitgebreidere toelichting op deze pagina's vindt u in "Willem Bartjens". jrg 2 nr 1).
In het programma komt het gericht proberen in verschillende activiteiten aan bod. We lieten al zien hoe je een gebroken bord kunt 'repareren' met behulp van een spiegeltje.

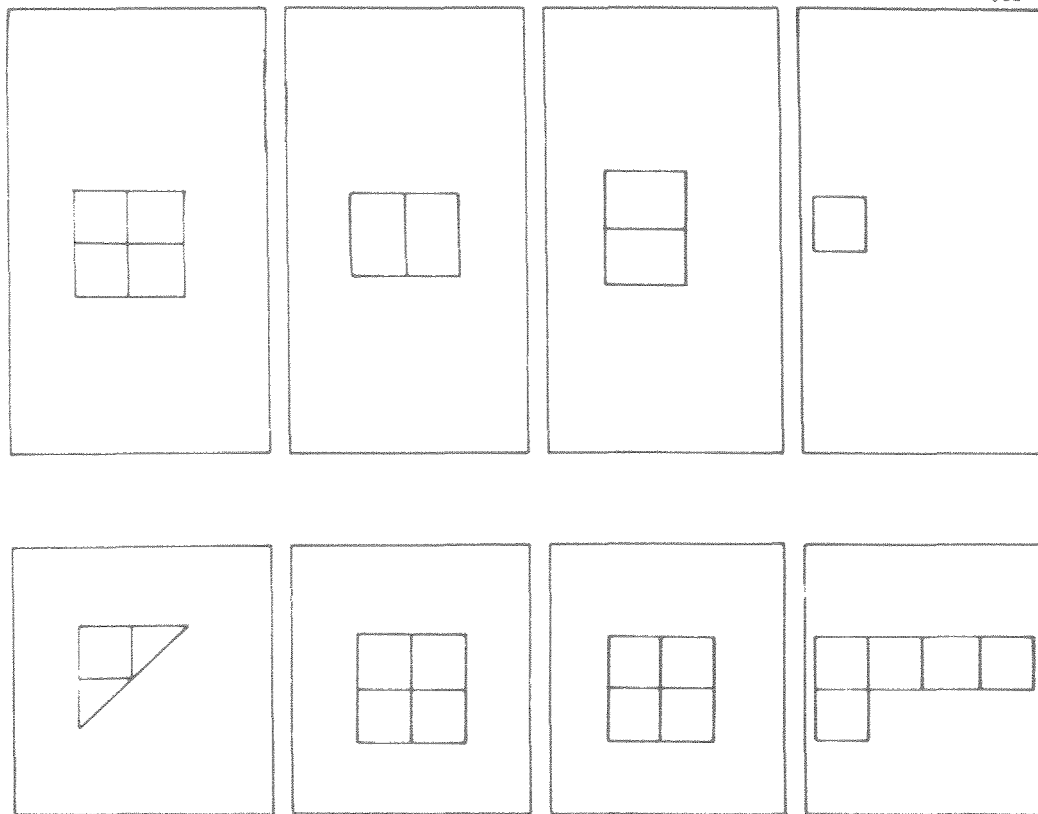


Daar sluiten verrijkingsactiviteiten op aan die mikken op het doen en het gebruiken van ontdekkingen (handleiding blok 3; 19e dag):

doceren

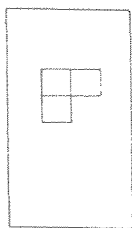
- De leerkracht licht de opdracht op werkblad 'V3.8a' toe. "Dit kennen jullie al, je moet weer een streep zetten op de plaats waar je je spiegeltje in het onderste vak moet zetten, om de tekening uit het bovenste vak te krijgen."
- De leerkracht controleert bij de eerste opdracht en loopt zonodig door de klas om te helpen.
- *De verrijkers maken werkblad 'V3.8a' en 'V3.8b'.*
- *De leerkracht gaat verder met de reteachers.*



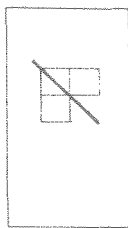


Ontdekt kan worden dat je moet zoeken naar de symmetrie-as van de te maken figuur, dat is de plaats waar de spiegel moet staan.

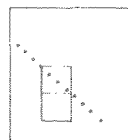
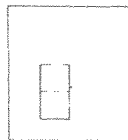
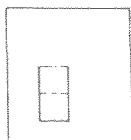
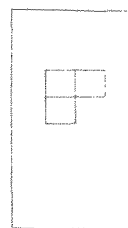
Bijvoorbeeld



symmetrie-as



oplossing



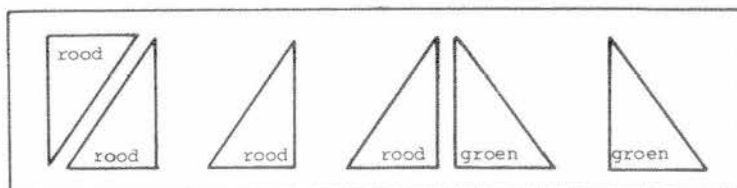
spiegel

Het is niet gezegd dat de kinderen deze strategie ook kunnen verwoorden als ze hem toepassen. Dat is hier ook best lastig. In andere gevallen is dat eenvoudiger en daar kan het verwoorden van ontdekkingen het oplossingsproces ondersteunen. Dit kan heel goed bij de volgende opgave (handleiding blok 3: 17e dag):

allen

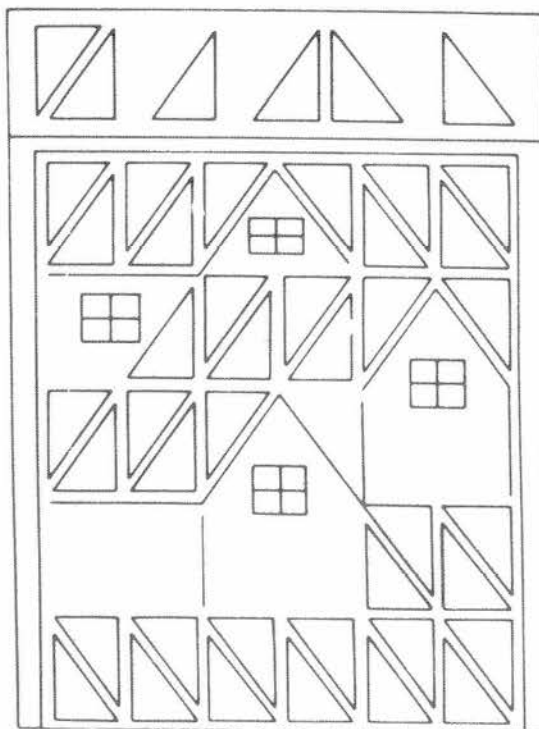
doceren/individueel

- De leerlingen leggen de rij driehoeken die bovenaan werkblad 'V3.3' staan, met gekleurde plakkertjes na. Daarna wordt de rij driehoeken op het werkblad overeenkomstig de rij plakkertjes gekleurd:



doceren

- De verrijkers kleuren het werkblad verder op dezelfde wijze. Ze kunnen de gekleurde plakkertjes steeds als steun gebruiken. Het gaat erom dat de driehoekjes rood of groen worden gekleurd op grond van hun vorm (overeenkomstig de plakkertjes).
- De leerkracht gaat verder met de reteachers.



Dit is een vervolg van de activiteit met de rode en groene plakkertjes, die we in het begin beschreven. Het leergangetje verloopt als volgt. Gestart wordt met een verhaal over de lichtjes van de boten op het water. Je ziet groene en rode lichtjes. Rechts zit een groen licht, links een rood.

(Merk op dat de begrippen links en rechts hier gekoppeld worden aan richting. Dit komt in het programma steeds terug.)

rood

groen



Aan de lichtjes kun je nu zien of een boot naar je toekomt of juist van je wegvaart.

rood

groen

groen

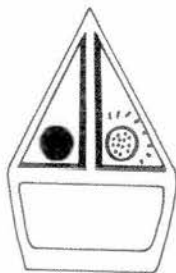
groen

rood

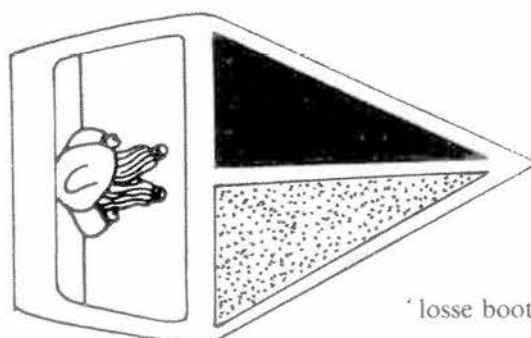


vaart van je weg vaart naar rechts komt naar je toe

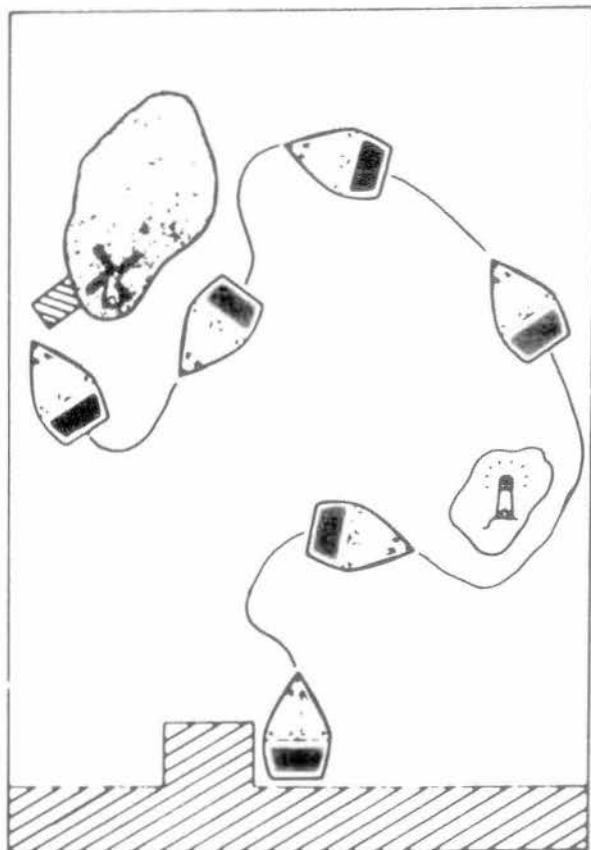
De lichten op een boot worden voorgesteld met plakkertjes.



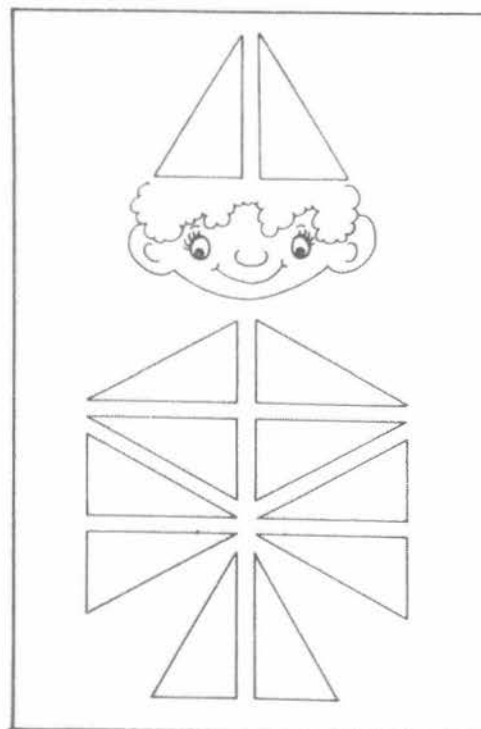
De leerlingen beschikken nu over een losse boot (een los werkblad) die ze mogen gebruiken bij het oplossen van de opgaven.



'losse boot'



werkblad 3.10b boottocht



werkblad 3.12 mannetje

In beide gevallen worden de driehoeken rood en groen gekleurd, in overeenstemming met de vorm. Vergelijkbare opgaven worden ook met plakkertjes uitgevoerd. Centraal staat steeds het discrimineren tussen  en , en het mentaal draaien. In het laatste type opgaven kunnen al ontdekkingen gedaan worden.

"Twee driehoeken die samen een rechthoek vormen, hebben dezelfde kleur."



rood



groen

"Twee driehoeken die samen een (grotere) driehoek vormen hebben verschillende kleuren."

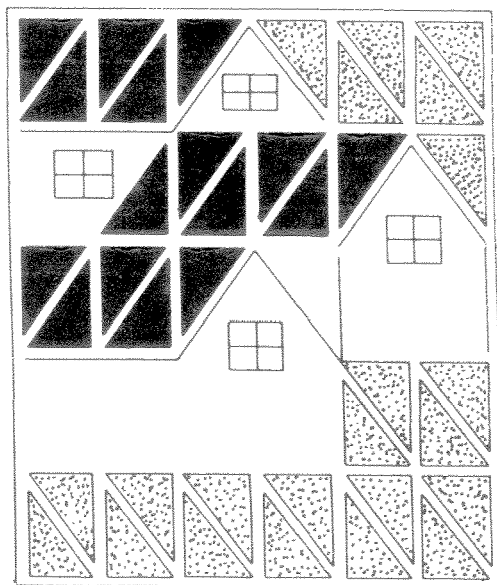


rood/groen



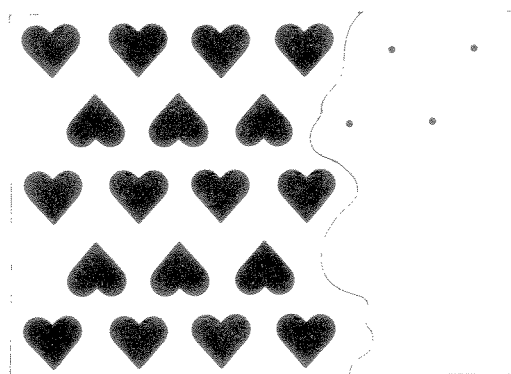
groen/rood

Deze ontdekkingen kunnen in het hiervoor gepresenteerde werkblad V.3.3 gebruikt worden.

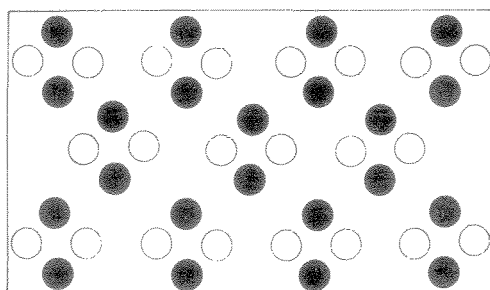


Het is ook goed mogelijk dat de kinderen eerst bij het inkleuren van dit werkblad de regelmaat ontdekken.

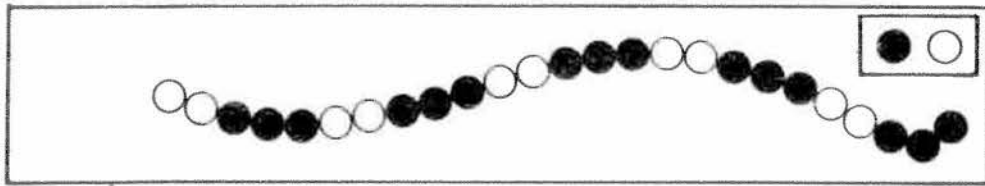
Het ontdekken en gebruiken van patronen krijgt ook in andere programma-activiteiten aandacht.



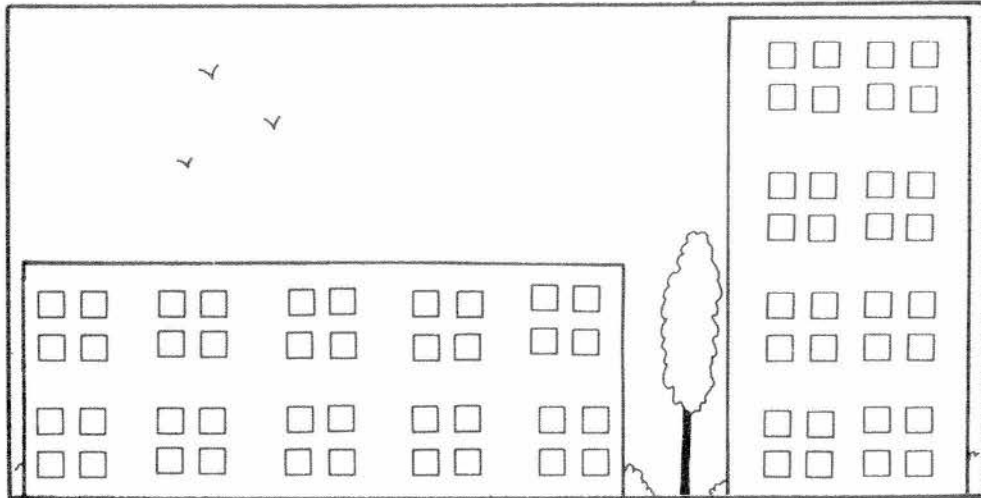
Maak het patroon af.



Meer zwarte of meer witte?



Meer zwarte of meer witte kralen?

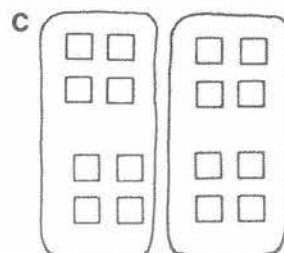
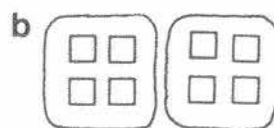


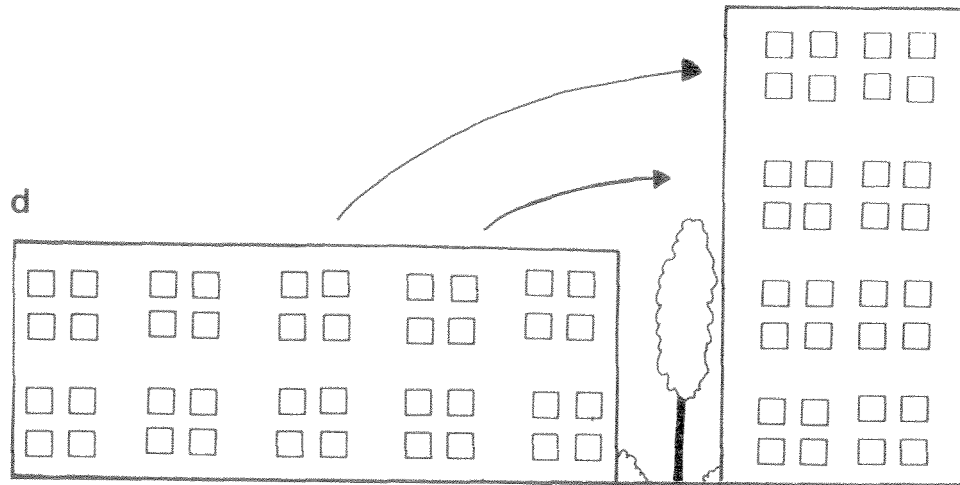
Welke flat heeft de meeste ramen?

Aardig is hier de ruimte voor verschillende oplossingsniveaus:

- het tellen van de kleine raampjes;
- het tellen van groepjes van vier raampjes;
- het tellen van groepjes van acht raampjes;
- mentaal draaien.

a 1 □ □ 2
3 □ □ 4





3 visualiseren

Het belang van visualiseren kan onderkend worden bij het oplossen van opgaven als:

1. Een treinreiziger valt halverwege zijn reis in slaap.
Als hij wakker wordt, moet hij nog de helft van de afstand reizen die hij tijdens zijn slaap gereisd heeft.
Welk deel van de reis heeft hij geslapen?
2. Alle conferentiegangers gingen naar de film of naar het theater, vele gingen zelfs naar allebei. 89% ging naar het theater, 78% ging naar de film.
Welk percentage ging zowel naar de film als naar het theater?
3. Hoe laat is het als de tijd die sinds twaalf uur vanmiddag voorbij is een derde deel is van de tijd die nog rest tot middernacht?

(Ontleend aan Krutetskii)

Bij het oplossen van probleem 1 kan gebruik gemaakt worden van een tijdlijn, waar een reis op uitgebeeld wordt.

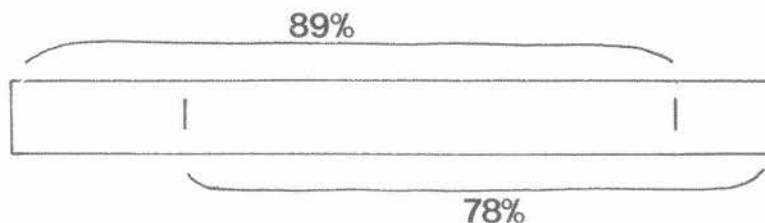


($a = 1/2b$; $a + b = 1/2$ totale reis $\rightarrow a = 1/6$; $b = 2/6 = 1/3$ deel van de reis).

■■■■

Bij de tweede opgave kunnen de filmbezoekers en de theaterbezoekers op een strook geplaatst worden. Iedereen gaat ergens heen, dus: de *niet*- theaterbezoekers zijn automatisch

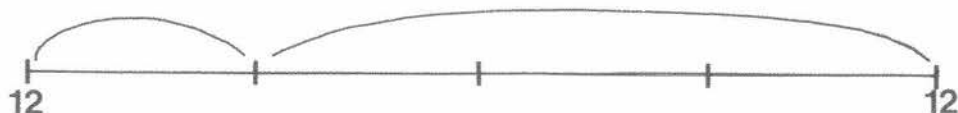
filmbezoekers en de *niet*- filmbezoekers zijn automatisch theaterbezoekers.



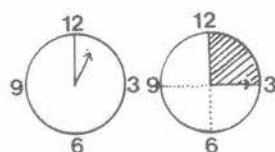
Gemakkelijk valt nu de overlap te bepalen.

($89\% - 22\% = 67\%$ of $78\% - 11\% = 67\%$).

Ook de laatste opgave kan weer op een tijdlijn afgebeeld worden.



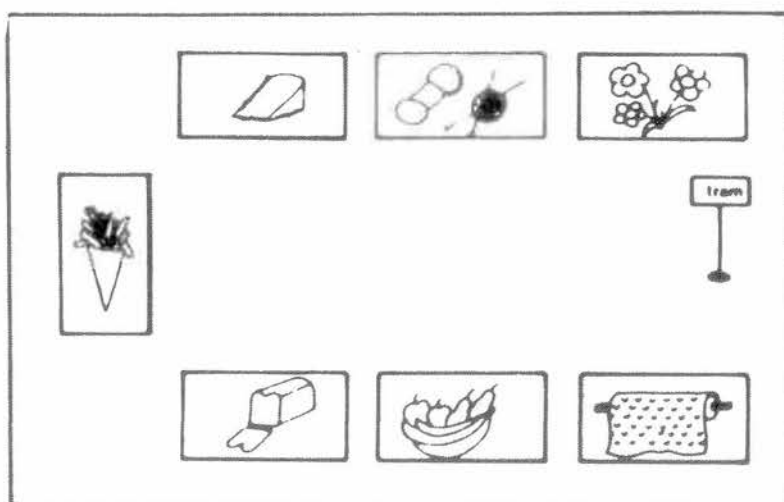
Hier kan echter ook het klokje gebruikt worden.

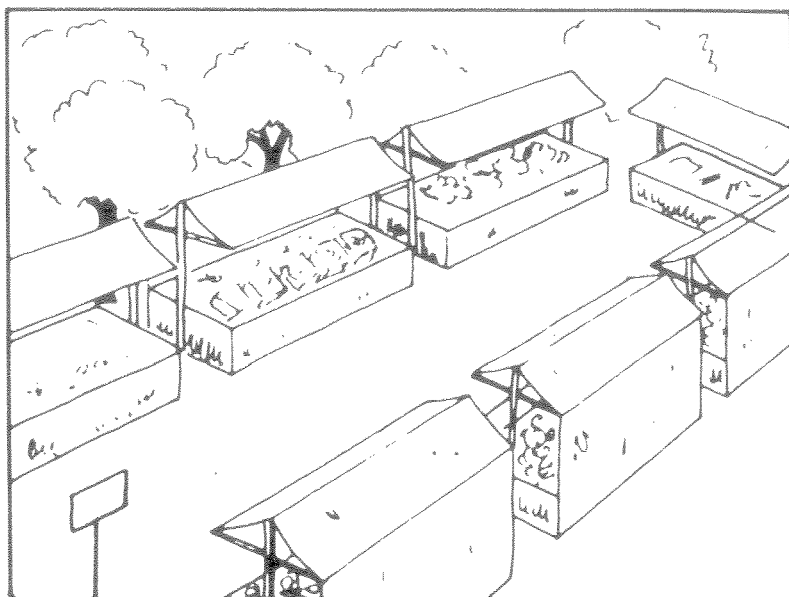


De kleine wijzer wordt gedraaid tot de verhouding 1 : 3 bereikt is.

Dit visualiseren vinden we ook weer terug in het eerste klas-programma. In een bepaalde les worden door de leerlingen zelf pictogrammen ontworpen om verschillende kraampjes van marktkooplui (kinderen) aan te duiden.

Deze afbeeldingen worden in een volgende les als pictogrammen gebruikt om aan te geven hoe de marktkooplui in de vorige les stonden. Later wordt een plattegrond met pictogrammen gebruikt om de verschillende kraampjes op een in vogelvlucht getekende markt te lokaliseren.





Bij de activiteiten rond 'Koningsland' worden er pictogrammen gebruikt om routes te beschrijven (handleiding blok 6: 9e dag).

2. Bustochtjes

Het koppelen van een busroute aan een beschrijving met pictogrammen.
doceren

- De leerkracht vertelt: De koning laat voor de bezoekers van het eiland twee bussen rijden.

Die twee bussen rijden niet dezelfde routes.

Om te laten zien langs welke plaatsen een bus komt, laat de koning aan de buitenkant van de bus plaatjes plakken van de plaatsen waar zo'n bus langs komt.

- leergesprek

De route van lijn 1 wordt gezamenlijk op de kaart ingetekend van werkblad 6.9b 'Busroutes'.

- individueel

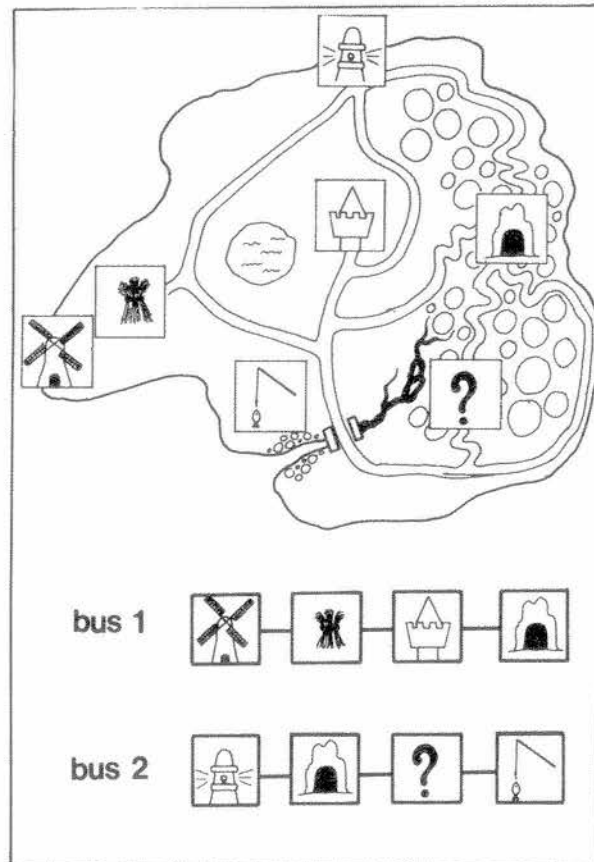
De route van lijn 2 wordt individueel (met een andere kleur als lijn 1) ingetekend.

- leergesprek

Nabespreking van de getekende route aan de hand van de kaart van Koningsland.

Besprek daarbij ook:

- Welke bus moet ik nemen als ik bij de grot van de reus ben en ik wil naar de molen, het viswater, etc.?
- Hoe moet ik van de vuurtoren naar de koning? (overstappen!!)

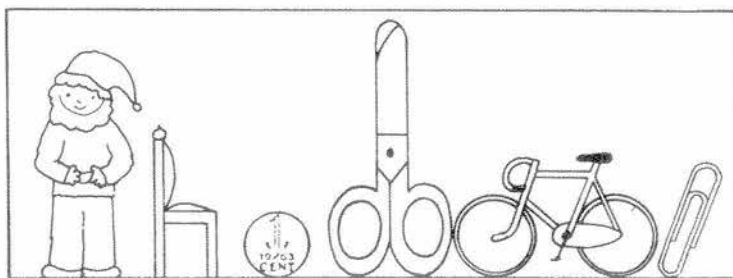


In de eerste klas worden ook de stroken gebruikt als hulpmiddel om (lengte-)verhoudingen mee voor te stellen. Als introductie wordt gebruik gemaakt van het liedje 'In een groot kabouterbos'. Daarin komt het verhoudingsaspect duidelijk naar voren:

"Onder hele hoge bomen,
in een groot kabouterbos,
staat een heel klein aardig huisje
zo maar midden op het mos.
Ik zou daar graag in willen wonen,
maar ik ben daarvoor te groot,
't is gemaakt voor de kabouters,
met hun mutsje, jasje, rood."

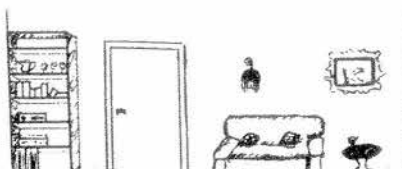


Als vervolg hierop moeten de leerlingen onderscheid maken tussen kabouter- en mensenzaken.

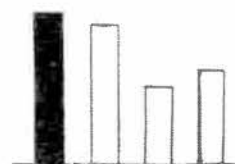


De strook wordt wat later geïntroduceerd in de context van het tekenen 'op schaal' (verhoudingsgetrouw).

"Als de deur zo groot is ...

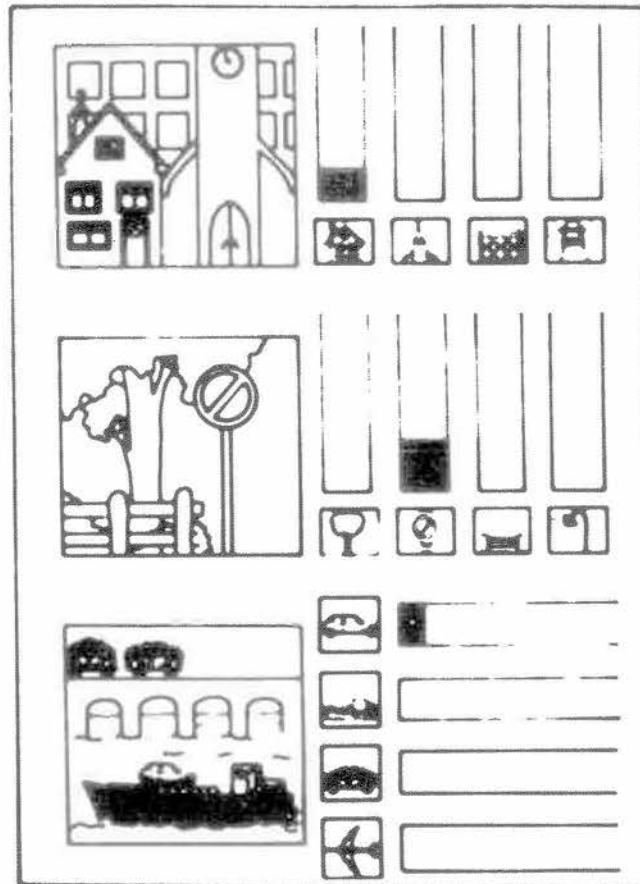


hoe groot is dan je vader, hoe groot ben je zelf etc.?"

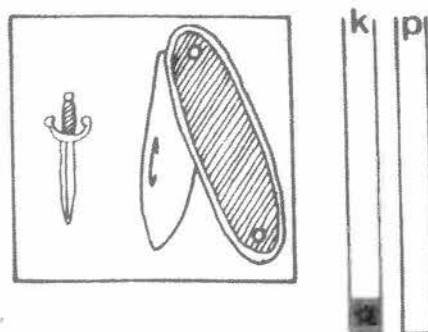


"Pappa is bijna
even
groot als de deur.
Ik kom tot de helft van de deur.
Mijn broer is
groter
dan ik."

Het weergeven van verhoudingen met stroken wordt ook geoefend op een werkblad. Daar komt ook de ervaring van Alexli aan bod.

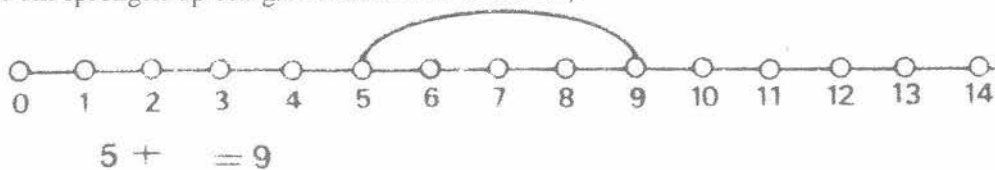


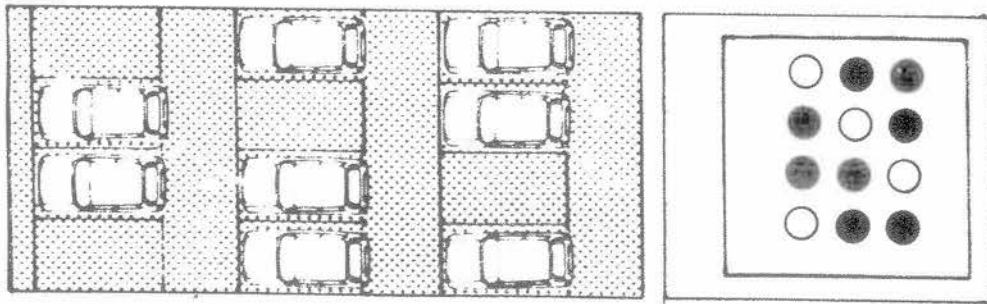
Het betreft hier steeds kwalitatieve verhoudingen. Daarnaast komt ook het kwantitatieve verhoudingsaspect nog even aan bod.



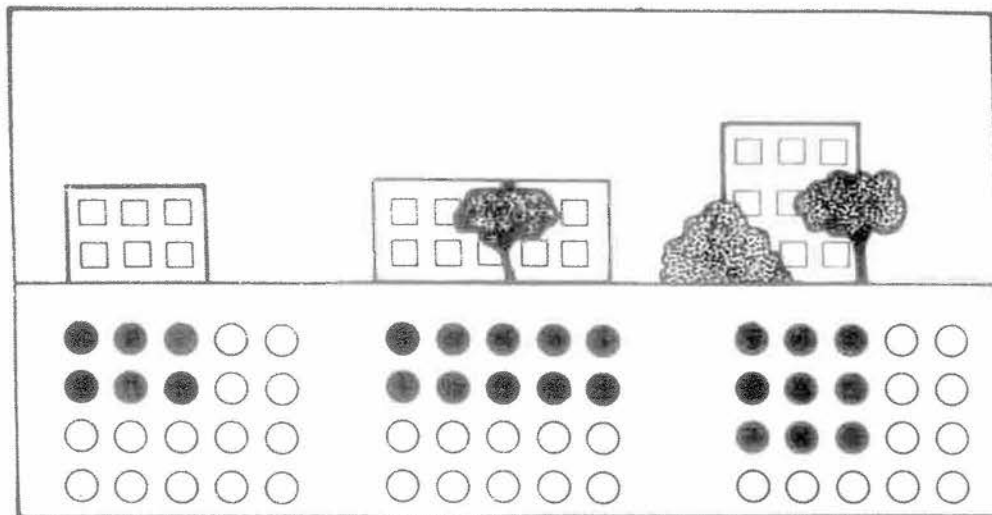
Het zakmes van Pietje (p) is drie keer zo groot als het zwaard van de kabouterkoning (k).

Andere vormen van visualiseren in het programma zijn: het gebruik van de getallenlijn (als middel om sprongen op een ganzenbord voor te stellen).





parkeerplaats



ramen

Tenslotte zijn ook de verschillende modellen en plaatjes die gebruikt worden, op te vatten als visualiseringen.

