

SPELEN ROND HET EVENWICHT: EEN ALTERNATIEVE BASIS VOOR HET AANVANKELIJK REKENEN

J.Borghouts-van Erp

I inleiding

De traditionele basis voor het aanvankelijk rekenen is het model van de deel-geheel-relaties. Twee (of meer) delen vormen samen een geheel (fig.1).



fig.1

drie, erbij vier, samen zeven, gesymboliseerd als $3 + 4 = 7$.

Van een geheel kunnen we ook een deel afhalen; dan houden we het andere deel over (fig.2).

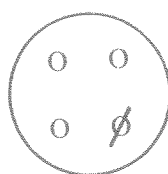


fig.2

vier, een eraf, drie over, gesymboliseerd als $4 - 1 = 3$.

In de formules wordt de operatie van links vertaald in het resultaat rechts.

We kunnen de deel-geheel-relaties ook in een schema samenvatten (fig.3):

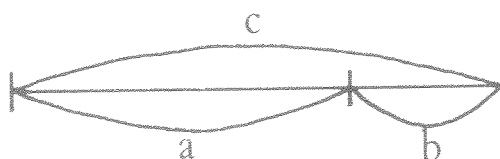


fig.3

Het is een algemeen model, eenvoudig, maar van toepassing op talloze situaties en daarom erg bruikbaar.

Het heeft evenwel een nadeel als we het gebruiken als basis voor het aanvankelijk rekenen en wel omdat het de betekenis van het is-gelijk-teken in de basissommen onvoldoende duidelijk maakt.

Dit is-gelijk-teken krijgt, zonder dat we ons dat voldoende realiseren, voor de kinderen een soort signaal-karakter: "nu komt de uitkomst". Dat valt niet op bij sommen van het type $a + b = \dots$ omdat daar inderdaad gevraagd wordt naar het resultaat van de operatie. Maar kiezen we een

moeilijker vorm, bijvoorbeeld $a + . = b$ of $. + a = b$, dan zien veel kinderen daar geen enkel probleem in en vinden de uitkomst langs dezelfde korte weg:

$. - 4 = 5$, "dus dat wordt 1"

$3 + . = 5$, "samen 8".

Zij gaan daarbij zorgvuldig te werk, omdat voor hen de gegeven cijfers en het operatie-teken richtinggevend zijn en (de plaats van) het is-gelijk-teken niet van betekenis is.

Deze operationele opvatting van het is-gelijk-teken is pover en zeer beperkt geldig, maar - wat veel erger is - zij blokkeert het inzicht in de essentiële kenmerken van de gelijkheidsrelatie. Meerdere onderzoekers hebben dit probleem gesignaleerd (van Eerde, Verhoef; de Corte, Verschaffel; Ginsburg, Kieran). Kieran meldt: "... the concept of equivalence is an elusive one not only for elementary school students but for high schoolers as well. That the equal sign is a "do something signal" is a thread which seems to run through the interpretation of equality sentences through elementary school, high school and even college."

Dat we dit probleem inderdaad niet licht op moeten vatten, blijkt ook uit de orthodidactiek, waar we veelvuldig een kloof aantreffen tussen de - vaak uitstekend begrepen - reële situaties en materiële handelingen enerzijds en de symbolische weergave daarvan anderzijds.

Voor we overgaan tot de bespreking van een alternatief model moet nog even opgemerkt worden dat het afschaffen van de zogenaamde puntsommen voor het gesignaleerde probleem uiteraard geen oplossing biedt. Dat zou alleen nog eens extra de operationele opvatting van het is-gelijk-teken versterken. Het is een geluk dat we dankzij die puntsommen al zo vroeg merken hoe weinig kinderen weten waar het is-gelijk-teken nu precies voor staat.

Het werken vanuit betekenisvolle contexten als mogelijke oplossing stellen we in de discussie aan de orde.

2 naar een nieuwe materiële basis

Gefnspireerd door Davydov kwam het idee bij ons op een nieuwe materiële basis te kiezen voor het beginnend rekenen, de balans, aantrekkelijk door de onmiddellijke aansluiting bij ervaringen met de wip. De daarbij passende materiële basishandelingen zijn "vergelijken", waarmee veel kinderen vertrouwd, maar waarop veel kinderen ook onvoldoende georiënteerd zijn, zoals blijkt uit de bekende Piaget-proeven.

Het programma "Vergelijken", waarvan we hieronder de grote lijnen weergeven, biedt ons inziens veel meer dan een goed inzicht in het is-gelijk-teken. We hebben met normaal begaafde, met LOM-kinderen, maar vooral ook met ML-kinderen ervaren, wat Feuerstein als volgt formuleert: "Comparative behavior is a sine qua non for the establishment of relationships and is thus one of the basic cognitive elements." (Feuerstein, 1979).

3 overzicht van het programma "Vergelijken"

Voor er over het vergelijken van aantallen gesproken wordt, vergelijken we dingen op allerlei kenmerken zoals lengte, hoogte, dikte, gewicht, inhoud, oppervlakte (grootte) e.d. waarbij we de tekens $=$, $>$ en $<$ gebruiken. Zo ontdekken we dat dingen bijvoorbeeld gelijk kunnen zijn qua hoogte, maar toch verschillend qua inhoud (fig.4):

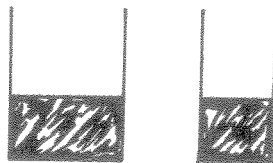


fig.4

Zo wordt het duidelijk dat we voor we gaan vergelijken eerst moeten weten op welk kenmerk we letten. Op deze manier voorkomen we dat we de hoogte van vloeistof verwarren met het volume

of - nadat "aantal" als kenmerk geïntroduceerd is - de lengte van een rij met het elementen waaruit deze is opgebouwd (fig.5).

o o o o o o o o o o o (A)
o o o o o o o o o o (B)

fig.5

Gelet op de lengte is de bovenste rij groter: $A > B$.
Gelet op aantal zijn de rijen gelijk: $A = B$.

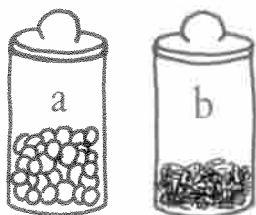


fig.6

Voor de flessen A en B, met glazen knikkers in A en pindanootjes in B geldt:

Gelet op gewicht is $A > B$

Gelet op aantal is $A < B$.

Dit soort oefeningen leert de kinderen analytisch kijken en geeft hen - als gevolg daarvan - een helder beeld van waar het bij "aantal" om gaat en - even belangrijk - waar het *niet* om gaat.

Als het vergelijken goed gaat op allerlei wisselende kenmerken, introduceren we een dynamisch element en komen de operaties aan de orde, die leiden tot de overgang van gelijk naar ongelijk en vice versa, opnieuw gelet op allerlei kenmerken (fig.7).

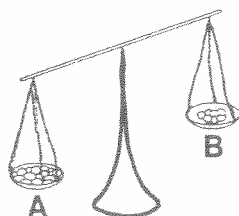


fig.7

Als A zwaarder is dan B, aan welke kant moet ik dan wat erwten afhalen om evenwicht te krijgen? Of waar moet ik erwten bij doen?

De operaties gaan niet via "trial and error", maar via nauwkeurig voorspellen, gevolgd door controle met behulp van het feitelijk uitvoeren.

Aan de hand van oefeningen in het precies bepalen van verschillen is de weg nu vrij naar (on)gelijk maken. Door het vergelijken op steeds wisselende kenmerken leren de kinderen stap voor stap dat de principes die gelden voor de balans *algemeen* zijn en van toepassing op alle specifieke gevallen van gelijkheid en ongelijkheid.

Deze twee streepjes _____

A en B kunnen we opvatten als een visueel model, waarop alle mogelijke overgangen van gelijk naar ongelijk en terug kunnen steunen:

- Ze staan model voor alle meetbare kenmerken, bijvoorbeeld A is duurder dan B, A gaat sneller dan B, enz.
- Ze helpen operaties te vinden die nodig zijn om te komen tot gelijkheid, tot grotere ongelijkheid of tot een ongelijkheid in tegenovergestelde zin.

— Ze kunnen dynamisch geïnterpreteerd worden: alle mogelijke waarden kunnen aan A en B toegekend worden.
En in dit algemene denkmodel passen de eerste sommen, opgevat als echte vergelijkingen (fig.8).

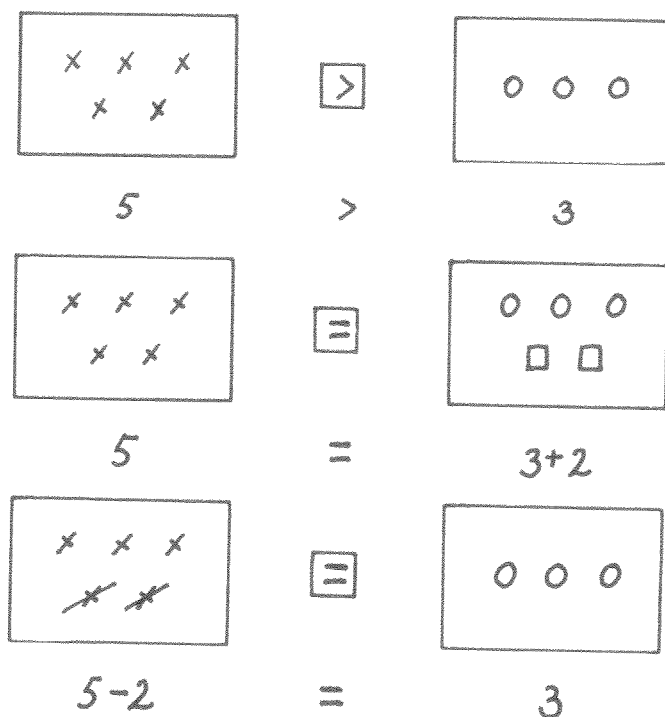


fig.8

Belangrijk in dit hele programma is de directe koppeling van alle vergelijkingshandelingen niet alleen aan het verwoorden ervan, maar vooral ook aan het vastleggen van de relaties (en operaties) in een formule. Juist dit symboliseren bevordert ons inziens het inzicht in de algemene geldigheid van de principes die het "spelen rond het evenwicht" beheersen.

4 discussie

We willen enkele - van de vele! - discussiepunten aan de orde stellen en onze visie daarop toelichten.

We kiezen voor de volgende drie punten:

1. Zijn er meerdere modellen nodig als basis voor het aanvankelijk rekenen?
2. Wat zijn de belangrijkste verschillen tussen het vergelijkingsmodel en het model van deel-geheel-relaties en wat zijn de implicaties daarvan voor de te kiezen volgorde?
3. Op welk moment in het "mathematiseren" van probleemgebieden moeten we de rekentaal en de notatie in formules introduceren?

5 zijn er meerdere modellen nodig als basis voor het aanvankelijk rekenen?

Deze vraag is gemakkelijk te beantwoorden: lang niet alle situaties passen in het vergelijkingsmodel, dus we hebben zo wie zo meerdere modellen nodig. Bijvoorbeeld het probleem "In een zwembad zwemmen zes meisjes en zeven jongens; hoeveel kinderen zwemmen er in totaal?" past niet in het vergelijkingsmodel, maar in het model van deel-geheel- relaties. In dit laatste model passen opvallend veel "redactiesommen" uit de rekenboeken en situaties uit het dagelijks leven. Dat is waarschijnlijk ook de reden waarom dit deel-geheel model

uitverkoren is tot - je mag wel zeggen - universeel basismodel voor het aanvankelijk rekenen. Resnick zegt er het volgende over: "The part-whole scheme has been shown to lie at the base of the ability to perform story problems, open-sentence problems, and addition and subtraction with regrouping."

Als derde model is algemeen gebruikelijk het model van de getallenlijn, waarop je heen en weer kunt springen en dat uitermate geschikt is voor allerlei gecombineerde eraf-erbij-situaties, met de autobus als bekend en geliefd actiecentrum. Op de getallenlijn kun je ook heen en weer springen vanaf een willekeurig punt, bijvoorbeeld te beginnen bij 163, en dan 2 verder, naar 165. Het verschil met de deel-geheel-relaties is ons inziens van praktische aard:

- bij het zojuist genoemde voorbeeld is het stuk van 0 tot en met 163 natuurlijk ook een deel, dat weliswaar niet expliciet maar impliciet wel degelijk een rol speelt;
- een probleem als "In een haven liggen A boten. 's Morgens varen er B boten weg. 's Middags komen er C boten bij. Hoeveel boten liggen er 's avonds in de haven?", is in een deel-geheel-schema voor te stellen (fig.9):

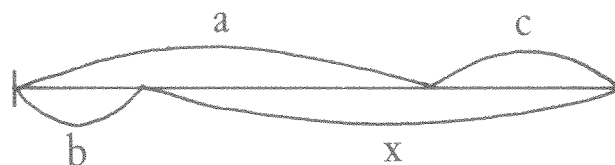


fig.9

Hoewel dit probleem in principe wel in zo'n deel-geheel-schema is onder te brengen, verbaast het ons niet dat veel kinderen daarbij in moeilijkheden raken (Wolters, 1978). Ook hier is de getallenlijn veel praktischer, doordat deze de vrijheid biedt het nulpunt (althans expliciet) los te laten en naar believen heen en weer te springen.

Geheel anders liggen de zaken bij de gebakjes uit het volgende probleem:

"Bakker Top verkocht 69 gebakjes. Bakker Molenbeek verkocht 15 gebakjes minder dan bakker Top. Hoeveel gebakjes verkochten beide bakkers samen? (Wolters, 1978).

Een lijnschets van de situatie leert ons al gauw dat hier een deel-geheel schema echt helemaal niet meer werkt als basis voor probleemverheldering (fig.10):

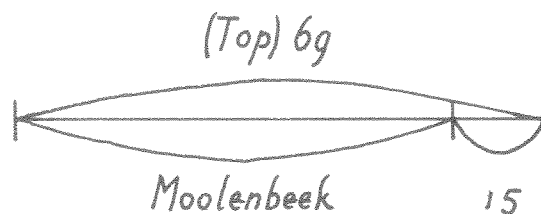


fig.10

Voor de oplossing moet het deel "Molenbeek" namelijk dubbel gebruikt worden.

Een situatie die ons inziens absoluut een vergelijkingsmodel vereist, waarin de twee *gehelen* (T en M) probleemloos tot een groot geheel samengevoegd kunnen worden: $T + M$ (fig.11).



fig.11

Tenzij we aannemen dat kinderen zonder vooroefening zo verkort kunnen denken dat ze een

(getallen)lijn in twee functies tegelijk benutten.

Wolters (1982) constateert dan ook bij nadere analyse van haar onderzoeksgegevens dat training met het deel-geheel schema interfereert met het oplossen van vergelijkingsopgaven en dat de - getrainde - experimentele groep op dit soort opgaven aanzienlijk minder vooruitgaat dan de controlegroep (lees: door de training relatief achteruit gaat).

We besluiten dit discussiepunt met een veel moeilijker vraag dan die waar we mee begonnen zijn: waarom kiest - voor zover ons bekend - niemand principieel voor een vergelijkingsmodel naast en los van het model van deel-geheel relaties en de getallenlijn? Natuurlijk, op aansporing van Mikulina wordt er inderdaad hier en daar een paar uur besteed aan het vergelijken, maar steeds om direct daarna over te gaan op deel-geheel relaties (De Corte, Verschaffel; Assink, Verloop).

Ons is in het geheel niet duidelijk hoe vergelijkingsvraagstukken ooit zonder een uitdrukkelijk aangeleerd vergelijkingsmodel kunnen worden opgelost. Noch hoe ooit het vergelijkingsmodel in het deel-geheel-model ingevoegd zou kunnen worden. We komen op dit punt terug naar aanleiding van de tweede vraag:

Wat zijn de belangrijkste verschillen tussen het vergelijkingsmodel en het model van deel-geheel-relaties en wat zijn de implicaties daarvan voor de te kiezen volgorde?

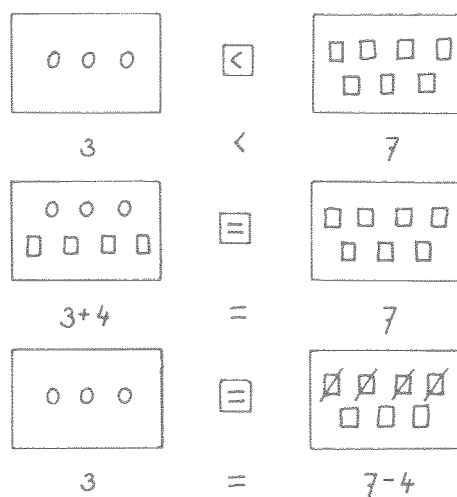


fig.12

Er zijn drie belangrijke verschillen:

1. In het vergelijkingsmodel hebben we voortdurend te maken met gelijkheids- en ongelijkheidsrelaties en de overgangen daartussen. Wat gelijk zijn is, wordt verhelderd door de confrontatie met het niet gelijk zijn. De symmetrie van de gelijkheidsrelatie krijgt betekenis door de asymmetrie van de ongelijkheidsrelatie.

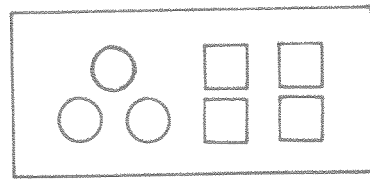
Bij deel-geheel relaties, toegepast in sommen, speelt de ongelijkheid (vrijwel) geen rol.

2. In het vergelijkingsmodel wordt de materiële handeling onmiddellijk en volledig gekoppeld aan de formule, terwijl deze koppeling in het deel-geheel model minder duidelijk is: bij het vergelijken zien de materiële handelingen en de formules er uit als aangegeven in fig.12. Beide kanten van de vergelijking worden gerepresenteerd.

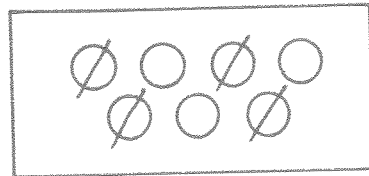
Deel-geheel relaties zien we in fig.13 uitgebeeld. Slechts een kant van de vergelijking wordt gerepresenteerd.

Zozeer zijn we geïndoctrineerd met deel-geheel relaties dat velen de tweezijdige representatie als "niet goed te praten" bestempelen (Gilissen, Klep; 1980). Alsof het niet de - door hen toch zo voorgestane - context is die bepaalt of we bij de som $3 + 5 = 8$ met 8 danwel met 16 voorwerpen te maken hebben. Niemand wijst toch ook de representatie van de vergelijking $7 < 8$ met behulp van 15 voorwerpen van de hand?

Het is wellicht de onzekerheid ten aanzien van dit punt die velen doet besluiten om na een



$$3+4=7$$



$$7-4=3$$

fig.13

oorspronkelijk aangebrachte scheiding:

- een pijl voor de "uitkomst": $3 + 2 \rightarrow 5$
- een "="-teken voor een vergelijking: $3 + 2 = 5$

zonder duidelijke afspraken over het hoe en waarom al snel weer over te gaan op de algemeen geldende notatie, waarbij het vergelijkingsteken nauwelijks nog, of in het geheel niet meer voor vergelijkingssituaties gebruikt wordt. En dan is het verhaal weer rond en zijn we terug bij de uitgangssituatie van Carolyn Kieran.

3. Het derde verschil tussen de modellen vergelijken en deel-geheel relaties betreft de moeilijkheidsgraad. Naar onze ervaring is het vergelijken van een geheel en zijn delen moeilijker dan het vergelijken van twee losstaande dingen en dat geldt nog sterker voor het noteren van deze vergelijkingen (fig.14).

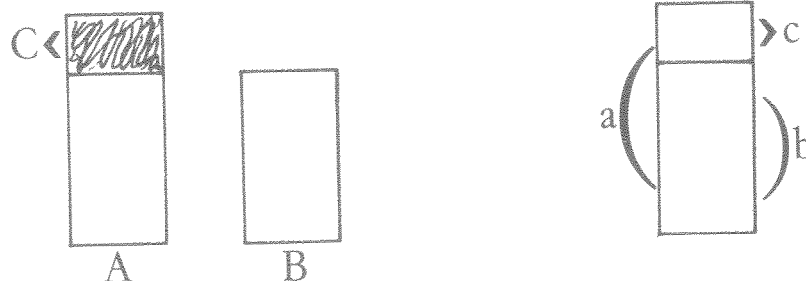


fig.14

Het ligt ook voor de hand dat het gemakkelijker is om (links) vast te stellen wat het verschil is tussen A en B en B te definiëren als gelijk aan A min dat verschil, in formule $B = A - C$, dan om (rechts) vast te stellen dat het deel b gelijk is aan het geheel min het andere deel, in formule $b = a - c$. Bij deze laatste vergelijking is er namelijk een extra probleem: de dubbele functie van b, enerzijds als deel op zich en anderzijds tegelijk (!) als deel van a.

De drie genoemde verschillen tussen beide modellen bepalen onze keuze voor de volgorde: als eerste het vergelijkingsmodel en pas daarna de deel-geheel relaties. Het zal inmiddels duidelijk zijn dat naar ons idee beide modellen naast elkaar moeten blijven bestaan. De getallenlijn kan naast deze twee modellen fungeren in situaties die eraf- en/of erbij-handelingen vragen zonder enige context of in een context waarin een oorspronkelijke hoeveelheid verandert door een uitgevoerde operatie zonder dat er van een - meer statische - deel-geheel relatie sprake is. Als voorbeeld: "Jan heeft 18 knikkers en verliest er 9." Deze "erbij-erf" opgaven worden veelal

aangeduid als "joining-separating problems".

We eindigen de discussie met het moeilijkste punt:

Op welk moment in het "mathematiseren" van probleemgebieden moeten we de rekentaal en de notatie in formules introduceren?

In het algemeen gesproken delen we het Wiskobas-ideaal van een late introductie van rekentaal en formules na een langdurig en breed opgezet verkennen en ordenen van probleemgebieden.

In ons orthodidactisch werk met kinderen die door LOM- en MLK-scholen als meest problematisch voor training worden geselecteerd, blijft van de verwerkelijking van dit ideaal in feite echter niets over. Deze kinderen kunnen niet creatief een probleemsituatie ordenen en zijn daarvoor aangewezen op door ons aangereikte structuren.

Laten we het Wiskobas-ideaal om vanuit vele contexten en in een late fase tot formalisering te komen, even voorstellen als in fig.15:

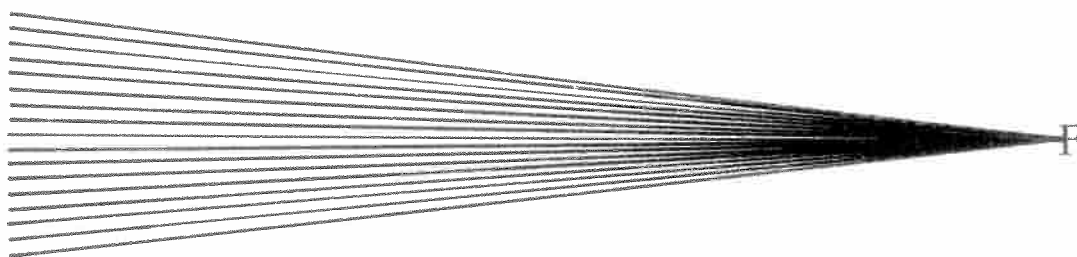


fig.15

En het traditionele met sommen beginnen en de toepassingen pas later introduceren, voorstellen als in fig.16.

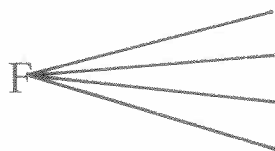


fig.16

Welnu, dan nemen wij - principieel - voor onze specifieke populatie een tussenpositie in, uitgebeeld in fig.17.

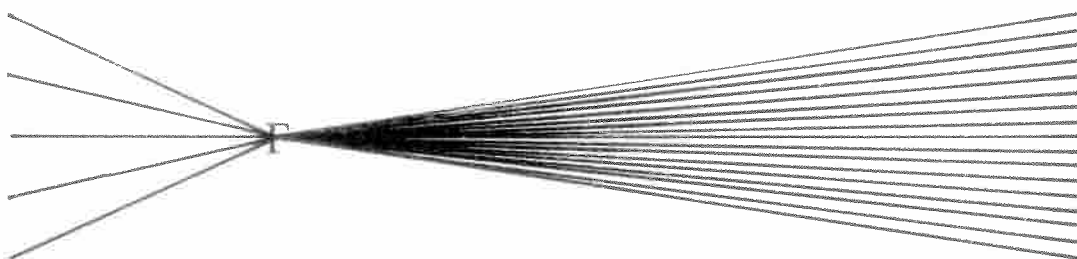


fig.17

We beogen daarmee het volgende:

- kinderen leren om orde te ontdekken in enkele eenvoudige, sterk voorgestructureerde (bijvoorbeeld vergelijkings-)situaties;
- de ordening, maar vooral het ordenend bezig zijn *zelf* bewust maken door de ordening hardop te verwoorden, te tekenen en uiteindelijk in abstracte symbolen weer te geven;
- pas vanuit de eerste positieve ervaringen het terrein verbreden en verlengen.

Na veel "trial and error" van onze kant is de keuze gevallen op de balans als een soort basismodel.

Het programma "Vergelijken" leidt niet alleen tot sommen, maar allereerst tot een analytische benadering van een probleem, tot anticiperen, dus ook leren voorstellen en tot de ervaring dat je wetmatigheden kunt begrijpen en actief hanteren.

Het programma leidt ook tot sommen. Gelukkig, want het is onze opdracht te bestuderen of rekenproblemen zijn op te lossen.

De *vergelijkingen* die we aan het vergelijken koppelen hebben naar onze mening een belangrijke functie. Zij zijn voor veel kinderen de eerste kennismaking met de eenvoud van een formule: er staat gewoon wat je zojuist gedaan hebt en wat je elk moment weer waar kunt maken.

literatuur

- Assink, E.M.H en H.Verloop: *Het aanleren van deel-geheel relaties in het aanvankelijke rekenonderwijs*. Pedagogische Studiën (54), pag.130-142, 1977.
- Borghouts - van Erp, J.W.M.: *Spelen rond het evenwicht* (vert. Playing at Balancing), Stichting Film en Wetenschap, Utrecht 1981 (video-productie).
- Borghouts - van Erp, J.W.M.: *Clarity about the meaning of equal-sign by Playing at Balancing* ; "Proceedings of the Sixth International Conference for the Psychology of Mathematics Education", Antwerp 18-23 July 1982, pag.214-217.
- Corte, E.de en L.Verschaffel: *Een exploratief onderwijsexperiment met aanvankelijke rekenopgaven bij zes- à achtjarige kinderen*, Pedagogische Studiën (57), nr 9, 1980.
- Davydov, V.V.: *De introductie van het begrip grootheid in de eerste klas van de basisschool*. In: Parreren, C.F. van en J.M.C.Nelissen: "Rekenen; teksten en analyses", Sovjet-psychologie 2, Wolters Noordhoff 1977.
- Eerde, D. van en L.Verhoef: *Kwantiwijzer* , SVO-project 0327, Psychologisch Laboratorium RU-Utrecht, Interimrapport III, 1979.
- Feuerstein, R.: *The dynamic assessment of retarded performers* , University Park Press, Baltimore 1979.
- Gilissen, L. en J.KLep: *De getallenlijn; tellen, meten, rekenen en denken*. Onderwijskundige Brochure Reeks 287, Zwijsen, Tilburg 1980.
- Ginsburg, H.: *Children's arithmetic: the learning process*, New York 1977.
- Kieran, C.: *The interpretation of the equal sign: symbol for an equivalence relation versus an operator symbol* ; "Proceedings of the Fourth International Conference for the Psychology of Mathematics Education", Berkeley California, August 16-17, 1980, pag.163-169.
- Mikulina, G.G.: *Psychologische mogelijkheden voor het oplossen van opgaven met lettergegevens* (1969). In: M.A.D.Wolters (ed.): "Vertalingenbundel Russische Psychologie", IPAW, Utrecht 1980.
- Resnick, L.B.: *The development of number representation in children*. The Fifth International Conference for the Psychology of Mathematics Education, Grenoble, juli 1981, pag.69-75.
- Wolters, M.A.D.: *Van rekenen naar algebra; een ontwikkelingspsychologische analyse* , proefschrift RU Utrecht, 1978.
- Wolters, M.A.D.: *De functie van deel-geheel schema's in het rekenonderwijs. Een terugblik*. Interne publicatie IPAW, RU Utrecht, 1982.