De rol van de leerkracht in het bevorderen van begripsontwikkeling

M. A. Simon
Pennsylvania State University, USA

1 onderwijsvernieuwing door leerkrachten

Dit artikel is gebaseerd op onderzoekservaringen in de Verenigde Staten. Dit onderwijs is anders dan het Nederlandse realistisch reken-wiskundeonderwijs. Omdat ik probeer na te gaan hoe mijn onderzoeksopbrengst zich verhoudt tot het realistisch reken-wiskundeonderwijs, zal ik een poging doen de relatie tussen deze twee zichtbaar te maken.
Volgens mij is de vernieuwing van het reken-wiskundeonderwijs in Nederland een verandering geweest, die zich via de invoering van nieuwe methoden heeft voltrokken. De scholen en leerkrachten proberen op hun eigen manier vorm te geven aan het onderwijs dat in de leerlingenboekjes en handleidingen staat. De leergangen in deze methoden zijn zeker goed doordacht. We zien dit bijvoorbeeld in de internationale acceptatie van enkele belangrijke leergangen die hier in Nederland zijn ontwikkeld. De vernieuwingen leiden dus kennelijk tot de verwachte resultaten. Dat komt volgens mij door de mogelijkheden die het materiaal biedt om op verschillende nieuwe manieren rekenen-wiskunde te leren; door situaties te verkennen en de wiskunde werkelijk te onderzoeken. Verder richten de nieuwe methoden zich ook op het verwerven van een wiskundige attitude. Dit is nieuw. Echter, de genoemde vernieuwing staat of valt met de mogelijkheden van de leerkracht het nieuwe onderwijs te implementeren.

2 verschillende gezichtspunten

Ik veronderstel dat ontwikkelaars van reken-wiskundeonderwijs een andere kijk hebben op het onderwijzen en leren van rekenen-wiskunde dan leerkrachten in de klas, die daadwerkelijk met het ontwikkelde materiaal

aan de slag moeten. Het standpunt van de ontwikkelaars is gebaseerd op hun ervaringen als onderzoeker en ontwikkelaar en op ontwikkelingsonderzoek, waaraan de reflectie van de ontwikkelaar op het ontwikkelde materiaal ten grondslag ligt. Er is weinig reden om aan te nemen dat leerkrachten dezelfde achtergrond hebben. Het is dan ook de vraag hoe we leerkrachten kunnen laten begrijpen wat de principes zijn die verscholen liggen achter het nieuw geconstrueerde onderwijs. Namelijk, hoe curriculumontwikkelaars denken over het aanleren van bepaalde concepten. Met andere woorden, het materiaal representeert hun kennis. Leerkrachten kunnen wel andere opvattingen hebben en zij kunnen hun kennis wel op een heel andere manier geordend hebben. Daarbij komt, dat niet altijd duidelijk is wat de belangrijkste principes achter het ontwikkelde onderwijs zijn. Ik bedoel daarmee in het bijzonder dat het verschil in invalshoek tussen ontwikkelaar en leerkracht impliciet blijft, in de zin dat het niet zorgvuldig is weergegeven.

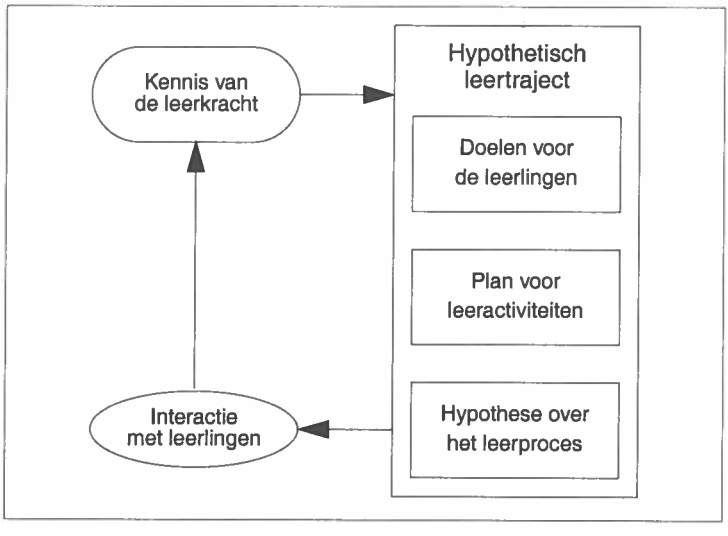
3 hypothetisch leertraject

Het onderzoek waarop dit artikel gebaseerd is richtte zich op ontwikkelingen en veranderingen van leerkrachten. Daarin is een poging ondernomen om specifieke manieren van het leren van rekenen-wiskunde beter te beschrijven. Dit onderzoek heeft dus een dubbele doelstelling: (a) een bijdrage leveren aan het beter begrijpen van leren en lesgeven en (b) doelen specificeren voor lerarenopleidingen. Wanneer we beter begrijpen hoe het leren van rekenen-wiskunde in zijn werk gaat, kunnen daaruit de contouren voortvloeien voor een betere lerarenopleiding.
In de genoemde onderzoeken karakteriseren we het onderwijzen als een proces van experimenteren; een serie pogingen om informatie te verzamelen, het onderwijs op grond van deze informatie aan te passen en vervolgens opnieuw uit te proberen. We werken vanuit de kennis van onze eigen leerlingen, van wat we zien en van wat ze begrijpen van rekenen-wiskunde. Op die manier ontwikkelen we een soort hypothetisch leertraject (Simon, 1995) dat bestaat uit drie delen:

- doelen voor de leerlingen, datgene dat we willen dat ze leren;
- een idee voor lesactiviteiten;
- een hypothese over hoe dat leerproces zal verlopen in de context van de activiteiten (fig. 1).

Iedereen die wel eens een reken-wiskundeles heeft verzorgd weet dat je de meest geweldige plannen kunt hebben, maar dat het niet altijd uitpakt zoals je had gepland, omdat je met leerlingen werkt. Onderwijsgevenden ko-

men er in de praktijk vaak achter dat het plan voor de les niet passend is voor de leerlingen.



figuur 1: cyclus van het onderwijzen van rekenen-wiskunde

Al doende leren leerkrachten veel over hoe leerlingen de beoogde kennis en vaardigheden leren en begrijpen. Leerkrachten leren dus veel van hun eigen onderwijs en kunnen, gewapend met deze kennis, een volgende poging beter laten verlopen. Zo'n volgende poging kan een paar minuten later plaatsvinden of tijdens de volgende les, maar hij is gebaseerd op de kennis die is opgedaan tijdens een vorige poging.

4 drie rollen voor de leerkracht

Ik onderscheid drie belangrijke rollen voor de onderwijsgevende bij het lesgeven. Als eerste moet de leerkracht met de leerlingen overeenkomen wat normen en waarden in de klas zijn. Omdat het hier gaat om sociale normen die de reken-wiskunde-inhoud betreffen, duid ik deze aan als sociaal-wiskundige normen en bedoel hiermee normen als 'wat is een wiskundige uitleg', 'wat is een wiskundige onderbouwing', enzovoort. Het expliciteren van dergelijke normen schept een wiskundig klimaat in de klas, dat reken-wiskundeonderwijs mogelijk maakt.
In zijn of haar tweede rol is de leerkracht de initiator van leeractiviteiten. Het gaat dan om wiskundige taken, die in het algemeen goed zijn beschreven in de realistische methoden die in Nederland op de markt zijn. En dit

vormt de aanleiding voor de derde rol van de leerkracht, namelijk het bevorderen van interactie en reflectie. De leerkracht entameert gesprekken tussen leerlingen in een klas die functioneert als een wiskundige gemeenschap. Hij of zij zorgt ervoor dat er wordt ingegaan op vragen van wiskundige validiteit en dat onderbouwingen naar voren worden gebracht.

5 leerparadox

Een andere basis voor ons werk wordt in de regel aangeduid als de leerparadox (Pascual-Leone, 1976), de noodzaak om te verklaren hoe een leerproces leidt tot 'een rijk systeem van kennis en noties' (Fodor, 1980, pag.149, geciteerd in Bereiter, 1985). Dit heet een paradox vanwege de volgende onderliggende redenering. Piaget (1970) introduceerde het idee van assimilatie. Dit kan beschouwd worden als een kernbegrip van het constructivisme en suggereert dat iemand de beschikking over een concept *X* moet hebben om ervaringen te benoemen in termen van concept *X*. Dat wil zeggen, dat onder het bombardement van senso-motorische signalen alleen signalen die al beschikbaar zijn in het mentale systeem kunnen worden ingepast in aanwezige structuren en operaties, zodat alleen die aanleiding kunnen zijn voor cognitieve reacties.
Dit roept daarmee de vraag op hoe we ooit iets nieuws kunnen leren. Wanneer wat we kunnen opnemen van buitenaf afhankelijk is van wat we al weten, dan lijkt het moeilijk verder te komen dan hetgeen we op een bepaald ogenblik weten. Daarmee dient de vraag zich aan hoe we een meer geavanceerde structuur ontwikkelen die meer informatie kan opnemen. En bij het ontwikkelen van een dergelijke structuur, moeten we nadrukkelijk rekening houden met deze paradox. Immers, als we dat niet doen leidt het onderwijs tot een pas op de plaats.

Ik begin met een voorbeeld waarbij het niet om het leren van wiskunde gaat. Het voorbeeld is een gedachte-experiment over het leren van een spelstrategie door kinderen. Ik gebruik dit voorbeeld omdat het eenvoudig te begrijpen is en op zo'n manier toe te passen is op het leren van rekenenwiskunde. Ik richt me verder op dit voorbeeld omdat het laat zien welke leerprocessen plaatsvinden wanneer er niet wordt onderwezen. Door op deze manier na te gaan hoe mensen leren op een natuurlijke manier, creëren we een manier om te begrijpen hoe leraren dit leren plaats kunnen laten vinden.
Neem nu eens twee kinderen in gedachten die zojuist hebben leren dammen. Ze leerden de regels en begrijpen hoe het spel gewonnen kan worden. Zij spelen het spel volgens de regels en stellen vast wie gewonnen heeft.

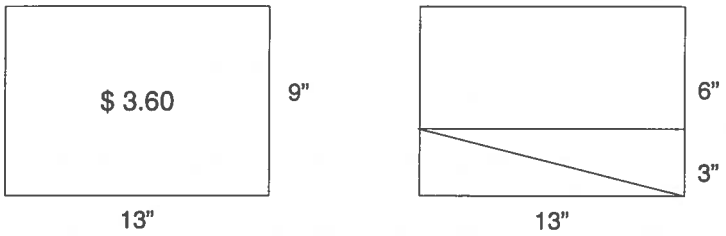
Echter, tot nu toe hebben de kinderen geen strategie ontwikkeld. Zij maken geen weloverwogen keuzen om de een of andere zet te doen. Als deze twee kinderen een aantal weken met elkaar dammen zonder hulp of aanwijzingen van ervaren spelers, zouden zij dan een strategie ontwikkelen? Ik neem aan dat u, met mij, denkt dat dit wel het geval is.
Hoe verhoudt dit voorbeeld zich nu tot de uitdaging die ik eerder stelde? De ontwikkeling van de kinderen van 'geen strategie' naar 'een ontwikkelde strategie' kan gezien worden als het ontwikkelen van nieuwe krachtige ideeën en vaardigheden. Daarom biedt de doordenking van dit voorbeeld een aangrijpingspunt om de leerparadox te doorbreken. Wij denken daarbij aan de volgende verklaring voor de ontwikkeling van de kinderen:

1 De kinderen hadden een doel (namelijk om het spel te winnen) en ze beschikten over een reeks activiteiten die dat doel dichterbij konden brengen (namelijk het verschuiven van stukken volgens de regels van het spel).
2 In hun eerste spelletjes (daar waar het gedachte-experiment begint) waren de kinderen in staat onderscheid te maken tussen zetten die het doel dichterbij brachten of juist niet (bijvoorbeeld het slaan van een steen van de tegenspeler wordt gezien als het dichterbij brengen van het doel en het verliezen van een steen als het van het doel verwijderd raken).
3 Wanneer het spel vaker gespeeld wordt, reflecteren de kinderen - al dan niet bewust - op hetgeen zij doen (het verschuiven van damstenen) en de gevolgen hiervan (slaan of verliezen van een stuk). Deze reflectie resulteert in het afleiden van een relatie tussen activiteit en het effect hiervan (de relatie tussen bepaalde zetten en het verschil in het aantal stenen). Zo ontstaat, in rudimentaire vorm, een nieuw idee en vaardigheid.

6 onderwijzen als natuurlijk proces

Maar dit voorbeeld gaat niet over het leren van rekenen-wiskunde. Het volgende voorbeeld doet dat wel. Het komt uit de Amerikaanse methode 'Mathematics in Context', die tot op zekere hoogte ontwikkeld is binnen de Nederlandse traditie van het realistisch reken-wiskundeonderwijs, en gaat over het leren van breuken. De leerlingen krijgen een plaatje te zien van een rechthoekige cake van 9 bij 13 inch. De cake is in drie stukken gesneden (fig.2). De vraag aan de leerlingen is vast te stellen wat ieder stuk kost, als een hele cake $ 3,60 kost.
Ik zal nu de eerder besproken ideeën toepassen op deze situatie om ver-

volgens te zien wat er kan gebeuren. Ik roep in dit kader graag ook het eerdergenoemde hypothetische leertraject in herinnering en probeer die in verbinding te brengen met mijn ideeën over de relatie tussen activiteit en het gevolg hiervan. Zo verkrijgen we een middel om beter onder woorden te brengen wat er gebeurt in het leertraject.



figuur 2: hele en verdeelde cake

Laten we daarbij beginnen bij welke reacties we zouden verwachten van kinderen die dit probleem oplossen. Die hebben bijvoorbeeld breukenvaardigheden nodig. De leerling moet bedenken dat de rechthoek verdeeld zou kunnen zijn in drie gelijke delen en dat de onderkant van de rechthoek in dat geval eenderde van de hele cake is. En vervolgens zouden leerlingen kunnen bedenken dat de diagonale lijn de onderste rechthoek halveert en dat zo elk van de driehoeken eenzesde deel is.

Men kan stellen dat dergelijke contexten kinderen de mogelijkheid geven om aan de slag te gaan. En dus beginnen ze de relatie te zien tussen de driehoeken, die verschijnen als helft van een rechthoek. En daarmee vinden we een manier om de ideeën, die we hebben over de relatie tussen de activiteit en het gevolg hiervan, te gebruiken bij het overdenken van het leerproces dat het kind doormaakt en de regelmaat die het waarschijnlijk zal herkennen als gevolg van de wiskundige activiteit; de relatie tussen de activiteit en het effect hiervan.

In het geval van het damspel is geleerd zonder dat er sprake was van formeel onderwijs, terwijl het tweede voorbeeld voortvloeit uit een in het onderwijs gestelde opdracht. Maar daarmee is overigens nog niets over het onderwijs gezegd. Om dit onderwijzen beter te begrijpen kunnen we het leren het best zien als een natuurlijk proces van de mens. Helaas zie ik, in elk geval waar ik vandaan kom, nog vaak dat wiskunde wordt gezien als iets wat je kinderen gewoon aanleert. Dit staat tegenover het idee dat lesgeven een natuurlijk proces is, waarin je de leerling begeleidt en aanmoedigt.

De manier waarop ik het onderwijzen bekijk, gaat uit van deze benadering van het leren die gebruik maakt van het natuurlijke karakter van het leerproces. Wanneer leerkrachten dit uitgangspunt tot het hunne maken, moeten zij bij het overdenken van hoe de leerlingen met de geconstrueerde

activiteiten omgaan, doelen stellen en reflecteren op de relatie tussen de activiteit en het effect ervan. Zij moeten ideeën ontwikkelen over het soort doelen die kinderen zich stellen, de activiteiten die ze daarbij kunnen gebruiken en hoe zij tegenover de gestelde taak staan. Dit alles hangt af van hoe de leerlingen de taak begrijpen. En waar we zeker van kunnen zijn is dat dit begrip van de leerlingen anders is dan dat van de leerkracht. In het creëren van onderwijs moet verder duidelijkheid bestaan over het leerdoel voor de kinderen.
De rol van de leerkracht is het interesseren van leerlingen voor een reeks activiteiten, die zij onafhankelijk van de leerkracht, na enige toelichting, kunnen uitvoeren (Brousseau, 1997, *situation adidactique*). De leerkracht anticipeert op hoe een reeks activiteiten kan leiden tot bijvoorbeeld het zoeken van regelmaat met als effect het maken van denksprongen.
Laten we eens kijken naar het gevolg van het op een dergelijke manier beschouwen van het onderwijzen. Merk daarbij overigens op dat hoewel we kijken naar de onderwijzende leerkracht, veel van hetgeen ik hier naar voren breng ook van toepassing is op onderwijsontwikkelaars. Het gaat om dezelfde principes van plannen van het onderwijs. Deze werk ik hier in vier stappen uit:

1 Vaststellen van de beginsituatie van de leerlingen
Centraal gegeven in mijn kijk op het onderwijzen van rekenen-wiskunde is Piaget's (1985) notie van assimilatie. Dat wil zeggen, dat wat iemand weet bepalend is voor wat hij of zij kan leren. Of, zoals Hoyles (1991) suggereert, '(onderwijsopdrachten) moeten van meet af aan passen bij vaardigheden en kennis van de leerlingen'. Ik formuleer dit liever iets anders. De leerkracht probeert te begrijpen wat leerlingen denken, om zo in te schatten hoe zij gestelde taken opvatten, welke doelen kunnen worden gesteld en welke serie activiteiten in gang kan worden gezet om de gestelde doelen te halen.
2 Een onderwijsdoel stellen
In aanvulling op het begrijpen van wat leerlingen weten, moet de leerkracht in staat zijn aan te geven welke stap er gezet moet worden. Dit is niet eenvoudig. Het is namelijk niet voldoende om aan te geven wat een leerling kan doen en welke wiskunde hij of zij kent. Om bestaande concepten werkelijk te veranderen, is het nodig te bepalen wat de aard van deze verandering is. Daarom moet de leerkracht zicht hebben op wat de leerling begrijpt op twee momenten, namelijk in de huidige situatie en in de beoogde situatie en het verschil tussen deze beide.
3 Een reeks activiteiten kiezen
Wanneer de leerkracht een bruikbare beschrijving heeft gevonden van de beoogde voortgang die hij of zij wil bewerkstelligen, kan deze een passende reeks activiteiten kiezen. Soms kan het daarbij nodig zijn de

leerlingen te helpen iets nieuws te leren, dat later kan worden toegepast (zoals het spelen van een nieuw spel). Dit is geen probleem, wanneer het nieuwe kan worden ingepast in bestaande concepten. Bij het vaststellen van een passende reeks activiteiten, moet de leerkracht zich afvragen of leerlingen inzicht hebben in het effect van hun activiteiten en hoe dit inzicht de weg baant voor een nieuw concept.

4 Een opdracht bedenken
Wanneer duidelijk is welke reeks activiteiten nodig is, kan er een opdracht bedacht worden. Deze opdracht is gebaseerd op geëxpliciteerde vermoedens van de leerkracht. Het leidt waarschijnlijk tot een situatie, waarbij de leerlingen zelf een doel voor ogen hebben en actief met de gestelde opdrachten aan de slag gaan. Als zodanig zie ik de stappen 2, 3 en 4 als uitwerking van het eerder aangegeven hypothetische leertraject.

Welk begrip willen we tot stand brengen? Het is een abstracte relatie tussen activiteit en effect. Welke activiteit en z'n effect leidt tot een concept? Delen van het hier beschreven onderzoek zijn gedaan door leergangontwikkelaars. En daarmee doet zich de vraag voor hoeveel leerkrachten moeten begrijpen van dit proces om in staat te zijn het materiaal passend te gebruiken en, indien nodig, aan te kunnen passen. Naar mijn mening maakt het niet uit hoe goed het materiaal is. Er bestaat geen materiaal dat geschikt is voor zowel de leerkracht als de leerling. Er is geen materiaal dat elk kind effectief het juiste leert wanneer de leerkracht de passende formule uitspreekt. Elke groep kinderen is verschillend en er zijn in iedere groep onderlinge verschillen. Wat nodig is, is het talent van de leerkracht om het onderwijs aan te passen aan zijn of haar groep en te reageren op de kinderen. Het is de vraag wat de leerkracht moet weten om dit alles adequaat aan te pakken. We zoeken activiteiten, die de leerlingen aankunnen. Dit is een van de pijlers van het realistisch reken-wiskundeonderwijs vanwege de 'bottum up' aanpak; het is gebaseerd op wat de leerlingen doen. We moeten vervolgens een context hebben en daarin voorziet in het algemeen de gebruikte methode. Leerkrachten moeten nu de stof begrijpen op een manier die aansluit bij het begrip van hun leerlingen. We weten allemaal dat dit vaak veel overleg vergt. Ik zou dit willen weergeven aan de hand van de u welbekende dubbeldekker-context voor het splitsen van getallen. Terwijl de term 'dubbeldekker' voor de leerkracht direct een rijke betekenis heeft, is voor de leerlingen nogal wat inbeeldingsvermogen nodig om het principe van de dubbeldekker te doorzien. Daar kan in het onderwijs bijvoorbeeld worden voorzien door leerlingen op en onder de tafel te laten zitten, om pas daarna verder te gaan met de feitelijke opdracht. De rol van de leerkracht is dan het bevorderen van reflectie op de relatie tus-

sen de activiteit en het effect. Anders gezegd: we willen leerlingen wijzen op patronen die zich voordoen in de relatie tussen activiteit en het effect. Dit kan spontaan gebeuren, maar als dit niet het geval is, is het de taak van de leerkracht de leerlingen hierop te wijzen.

Voor de leerkracht is dit een onderwijsexperiment, een proces dat telkens bijgesteld en herzien wordt. De leerkracht gaat daarbij uit van het hypothetische leertraject en observeert wat er in werkelijkheid gebeurt, hoe het onderwijs uitwerkt. Dit laatste vormt de aanleiding om het onderwijs te bij te sturen.

7 opleiden van leraren

De ideeën die ik hier naar voren breng over het onderwijzen en leren van rekenen-wiskunde zijn ook middelen voor lerarenopleidingen. De uitgesproken ideeën over het leren worden zo tot leerdoelen voor het opleidingsonderwijs. Dit is een uitgangspunt voor het opleiden van leraren en ik spreek hier met nadruk van '*een* uitgangspunt'. Het is niet het enige dat telt, maar het is volgens mij wel belangrijk. Zo kunnen we veel van wat we weten over het reken-wiskundeonderwijs transformeren naar het niveau van het opleiden van leraren. We moeten kennis en ervaring van leerkrachten heel serieus nemen. Dit betekent ook dat we onderwijssituaties moeten scheppen voor (aankomende) leerkrachten die hen kunnen helpen met het ontwikkelen van krachtige leeromgevingen voor het reken-wiskundeonderwijs. En dat verschilt hemelsbreed van het praten over onderwijs met een groepje leerkrachten.
Het is overigens ook niet mijn bedoeling om leerkrachten onze ideeën als recept voor te schotelen, want dan komen zij niet verder dan het nabootsen van onze wiskundige en didactische ideeën. Anders gezegd, begrip moet in alle gevallen 'bottum up' worden opgebouwd. We verwachten niet dat kinderen rekenen-wiskunde construeren zonder uitgedachte leergang, waarom zouden we dat dan wel verwachten van (aankomende) leerkrachten. Als we niet aangrijpen wat voor leerkrachten belangrijk is om te leren, als we niet nadenken over de principes achter de ontwikkeling van leerkrachten om daarmee een aantal goed doordachte ervaringen te ontwikkelen voor die leerkrachten, dan maken we onvoldoende gebruik van de invloed die we zouden kunnen hebben op het opleiden en scholen van leerkrachten.

Ik wil afsluiten met twee belangrijke constateringen die aan mijn beschouwing ten grondslag liggen.
De eerste daarvan is de observatie dat het de taak van de leerkracht is om

het reken-wiskundige handelen van leerlingen te begrijpen. Dit vindt niet plaats in isolatie. Dit proces vindt alleen plaats, wanneer de leerkracht een bepaald idee van onderwijzen heeft. Ze moet daarbij als het ware in de huid kruipen van de leerling. Ze proberen het wiskundig handelen te karakteriseren. Vaak hebben leerkrachten een ander idee van onderwijzen. In veel gevallen richten ze zich op de reproductie van de antwoorden die ze in gedachten hebben. In dat geval toont de leerkracht in mijn ogen geen belangstelling voor het kind. Wat nodig is, is het bekijken van de situatie door de ogen van kinderen en iedereen die wel eens kinderen geobserveerd heeft, weet dat dat alles behalve eenvoudig is.
De tweede constatering die ik hier nog eens wil benadrukken is, dat als we het begrip van leerlingen willen verhelderen en hen effectief rekenen-wiskunde willen laten leren, we ons moeten verdiepen in het didactisch repertoire van de leerkracht en deze een kans moeten geven op een breed perspectief. En dat is veelomvattend. Het gaat dan om: het begrijpen van methodische lijnen, doelen van het onderwijs, het samenwerken van leerlingen en het verhelpen van problemen in het leren van rekenen-wiskunde. Dat leren leerkrachten niet door ze slechts te informeren over onze ideeën over het leren door kinderen en ze te vragen dat van buiten te leren. Het leren van leerkrachten verloopt analoog aan dat van leerlingen. Daarom stel ik voor dat lerarenopleiders proberen ideeën van (aankomende) leerkrachten te begrijpen en dat ze daarmee doelen opstellen voor het leren van deze studenten. We moeten een reeks activiteiten ontwerpen waarmee ze een nieuw beeld krijgen over het leren van rekenen-wiskunde. We kunnen de relatie tussen activiteit en het effect ervan dan ook op dit niveau gebruiken. Het zijn de activiteiten die dienen als een basis voor hun leerproces.

literatuur

Bereiter, C. (1985). Toward a solution to the learning paradox. *Review of Educational Research, 55*, 201-226.

Brousseau, G. (1997). *Theory of didactical situations in mathematics*. Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.

Fodor, J. A. (1980). Fixation of belief and concept acquisition. In: M. Piatelli-Palmerini (ed.). *Language and learning: The debate between Jean Piaget and Noam Chomsky*. Cambridge, MA: Harvard University Press, 142-149.

Hoyles, C. (1991). Developing mathematical knowledge through microworlds. In: A.J. Bishop, S. Mellin-Olsen & J. van Dormolen (eds.). *Mathematical knowledge: Its growth through teaching*, Dordrecht, The Netherlands: Kluwer, 147-172.

Pascual-Leone, J. (1976). A view of cognition from a formalist's perspective. In: K.F. Riegel & J. A. Meacham (eds.). *The developing individual in a changing world: Vol. 1 Historical and cultural issues*. The Hague, The Netherlands: Mouton, 89-110.

Piaget, J. (1970). *Genetic Epistemology* (E.Duckworth, Trans.). New York: Columbia

University.
Piaget, J. (1985). *The equilibration of cognitive structures: the central problem of intellectual development.* (T. Brown and K.J. Thampy, Trans.) Chicago: University of Chicago Press.
Simon, M. A. (1995). Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. *Journal for Research in Mathematics Education, 26,* 114-145.