
Van Fröbel tot Freudenthal

- realistische meetkunde voor de basisschool -

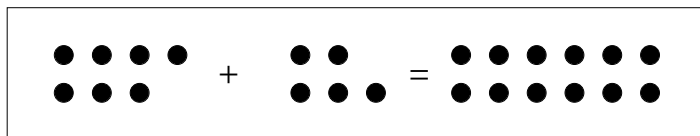
E. de Moor

Freudenthal Instituut, Universiteit Utrecht

1 rekenen en wiskunde

Sinds het begin van de jaren tachtig van de twintigste eeuw wordt er van rekenen-wiskunde als vak voor de basisschool gesproken, terwijl dit zo'n twintig jaar terug rekenen heette en zoals het in het gewone spraakgebruik nog vaak genoemd wordt. Dit komt ook in de kerndoelen naar voren en in de titel van een enkele methode, zoals 'Rekenen en Wiskunde'. De meeste methoden - denk aan 'De wereld in getallen' en 'Rekenrijk' - verwijzen met hun titels toch vooral naar het getal- en rekenaspect van de wiskunde. Nu is rekenen ook volwaardige wiskunde, maar het is slechts één facet van dit prachtige vak.

Ik vat wiskunde op in de klassieke, reeds van Plato stammende, omschrijving namelijk als de wetenschap van Getal en Ruimte. Er bestaan tegenwoordig wel andere definities, zoals de Leer van Structuren. Maar die betreffen vergaande abstracte opvattingen, die niets meer van de historisch-genetische ontwikkeling van het vak weerspiegelen en die van geen betekenis zijn voor de ontwikkeling van het allereerste onderwijs in de wiskunde. Het rekenonderwijs is traditioneel altijd ontwikkeld en onderwezen volgens een natuurlijke, informele methode, die begint met het gewone tellen. We gebruiken daarbij geen definities, axioma's of stellingen, maar leiden alles af uit de natuurlijke structuren van de getallen en het positiesysteem.



figuur 1: oneven + oneven = even

Van oorsprong werden eigenschappen van getallen en hun operaties ove-

rigens visueel weergegeven. Even getallen kun je zien als rechthoekige stippenpatronen, oneven als zulke patronen plus één. Hiermee kunnen we op natuurlijke wijze de rekenkundige stelling bewijzen dat een oneven getal plus een oneven getal een even getal oplevert (fig.1). Uiteraard heeft ook de rekenkunde een formeel wiskundige onderbouwing gekregen, maar die is pas zo'n dikke honderd jaar terug ontstaan.

Gelukkig heeft de traditie van de historische ontwikkeling van de inhoud van het vak rekenen ook de ontwikkeling van de didactiek en methodiek voor het onderwijs beïnvloed. Niemand zal het in zijn hoofd halen om in het rekenonderwijs met de axioma's van Peano te beginnen. Hoe sterk deze traditie is, blijkt wel uit het feit dat men de rekenkunde en de voortzetting daarvan in de algebra ook voor het voortgezet onderwijs nooit als een formeel systeem heeft toegepast. Dat was en blijft stof voor de academische studie.

2 historische ontwikkeling van de meetkunde

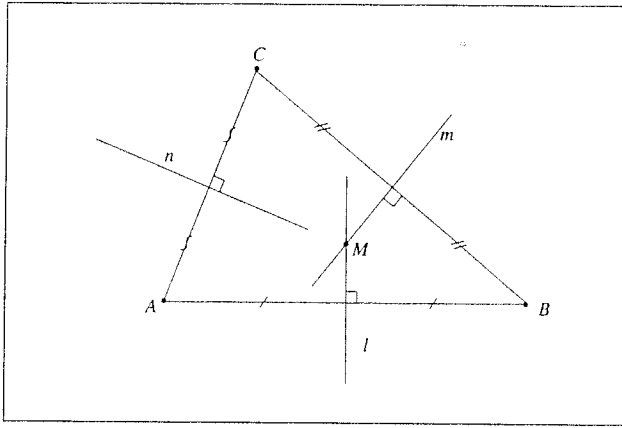
Ook in de meetkunde heeft de historische ontwikkeling die van het onderwijs beïnvloed, maar in tegenstelling tot die van het rekenen heeft deze traditie de onderwijskundige ontwikkeling sterk gefrustreerd. Meetkunde is namelijk de discipline die als eerste een wetenschappelijke fundering kreeg. Sterker nog, meetkunde heeft sinds Euclides' Elementen zo'n 2300 jaar geleden, het aureool gekregen van het vak waaraan je kunt leren redeneren. Euclides maakte van meetkunde het vak van definities, axioma's en vooral van stellingen, die strikt logisch, lineair uit elkaar afgeleid kunnen worden.

Deze euclidische meetkunde, zoals dit vak nog altijd wordt genoemd, had in feite al heel snel de historisch-genetische ontwikkeling van concreet naar abstract, van intuïtief naar formeel doorgemaakt. Dit komt onder meer, omdat het in dit vak om een tamelijk eenvoudige structuur gaat, die visueel ondersteund kan worden. Dat men daar later op terug is moeten komen, laat ik nu buiten beschouwing.

3 voorbeeld van logisch-deductief redeneren

Ik geef nu een voorbeeld uit deze euclidische meetkunde: de drie middelloodlijnen van een driehoek gaan door één punt (fig.2). Allen, die vóór 1968 naar de middelbare school gingen, zullen zich deze mooie stelling nog wel

herinneren. Het was een van de sluitstukken van het eerste jaar meetkundeonderwijs, ook op de toenmalige MULO.

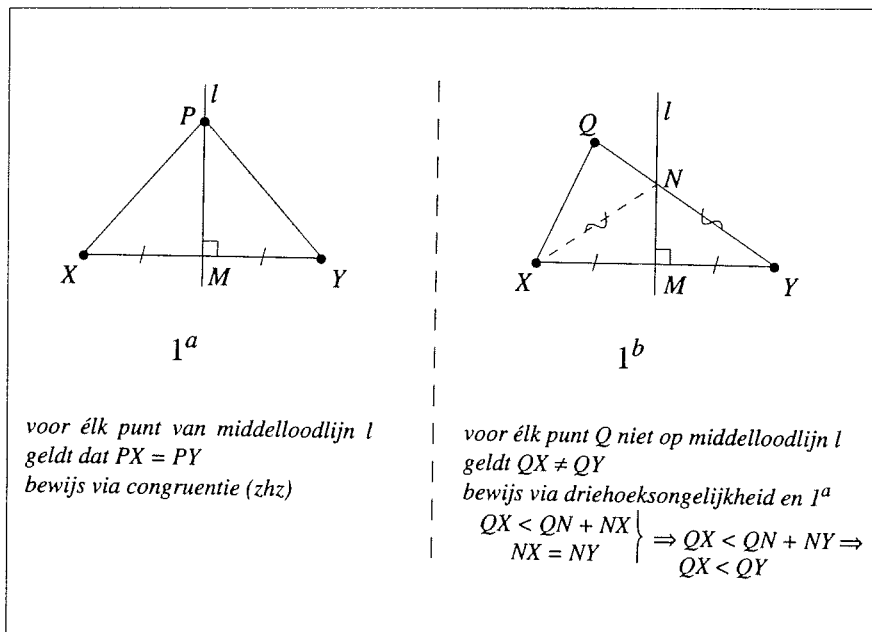


figuur 2: de middelloodlijnen van een driehoek gaan door één punt

Voor een gelijkzijdige of een gelijkbenige driehoek is de stelling evident op grond van symmetrie-eigenschappen van die figuren, maar het gaat erom dat dit ook voor een willekeurige driehoek wordt aangetoond, dus ook als die stomphoekig is. Dit gaat dan terug op de eigenschap van de middelloodlijn van een lijnstuk, die zegt dat deze lijn de unieke verzameling van alle punten is, die gelijke afstanden hebben tot de uiteinden van dat lijnstuk.

We zien dat hier allerlei begrippen gebruikt worden, die eerder nauwkeurig gedefinieerd moeten worden. Het bewijs van die eigenschap werd geleverd door middel van congruentie van driehoeken, waarop tijdenlang geoefend was aan het begin van het eerste leerjaar. En dan moest dat bewijs zowel 'heen' als 'terug'. Heen: ieder punt van de middelloodlijn heeft de bedoelde eigenschap en terug: als een punt die eigenschap heeft dan ligt het ook op die lijn. Anders gezegd, ieder punt erbuiten heeft die eigenschap niet (fig.3). Om dol van te worden voor sommige kinderen, want dat zag je toch allemaal zo.

Maar nu komt het konijn! We gaan terug naar figuur 2. De middelloodlijnen l en m snijden elkaar in M . Omdat M op l ligt, geldt $MA = MB$. En omdat M op m ligt, geldt ook $MB = MC$. Dus vanwege de transitieve eigenschap voor grootheden geldt $MA = MC$. En derhalve moet M op de lijn n liggen, waarbij we gebruik gemaakt hebben van de terug-eigenschap van de middelloodlijn n .



figuur 3: 'heen- en terug'-bewijs van de middelloodlijnstelling

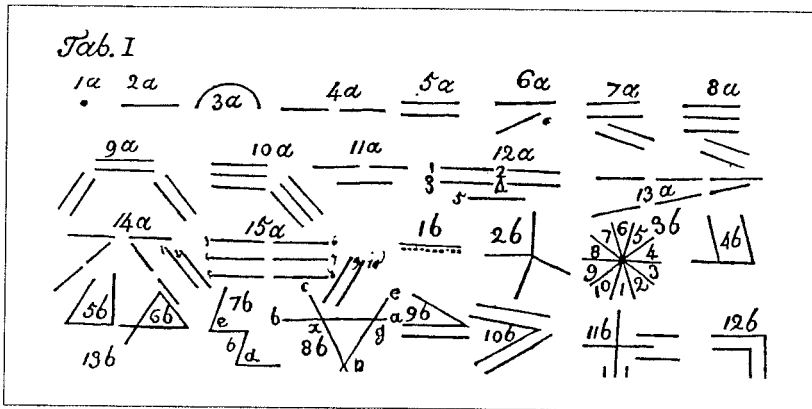
4 vormende waarde

Volgens enkele spaarse kwantitatieve gegevens uit de jaren vijftig kon hooguit eenderde van de dertienjarige leerlingen van HBS en Gymnasium een dergelijk bewijs aan. Toch geloofde men toen sterk dat dit soort oefeningen een positieve transfer zou hebben op het logisch denken. Niet alleen binnen de wiskunde, maar ook binnen andere disciplines, zelfs in algemene zin. Dit is wat men de vormende waarde van de wiskunde noemt. De leerlingen vroegen ook toen al naar het nut van deze meetkundige oefeningen, en dit gold vooral voor degenen, die er moeite mee hadden. De bekende antwoorden van de leraar waren dat de leerlingen dit later wel zouden begrijpen als ze de toepassingen zouden zien. Maar daar werden meestal toepassingen binnen de wiskunde mee bedoeld, zoals een beetje landmeetkunde achteraf, iets dat best ook zonder deze wetenschappelijke fundering aan de orde gesteld kon worden. Voor de leraren, die het argument van het leren redeneren aanhingen, stond het middel van psychologische intimidatie ter beschikking. Dan liet de leraar door middel van lastige sommen zien wat het belang is van een perfecte beheersing van de lo-

gica van het systeem, waarbij de boodschap was dat je zonder logisch redeneren nergens zou zijn in de maatschappij.

5 vormleer: pogingen tot informele meetkunde

Zoals gezegd gaat wiskunde over getal en ruimte. Maar waarom dan wel rekenen (getal) van jongs af aan onderwezen en geen meetkunde (ruimte)? Kennelijk is dit meer dan tweeduizend jaar een geaccepteerde zaak geweest. Maar vanaf het einde van de achttiende eeuw, de tijd der Verlichting, ging men hier anders over denken. In het voetspoor van Rousseau heeft Pestalozzi als een van de eersten het principe van de aanschouwelijkheid in het onderwijs op een praktische wijze tot een uitgangsprincipe gemaakt. Hij ging ervan uit dat de inhoud van alle onderwijs gebaseerd diende te worden op Woord, Getal én Vorm. In verband met het vormbegrip bedacht hij een soort meetkunde voor de lagere school, waarin een intuïtieve verkenning van de ruimte diende plaats te vinden. Zijn leerling Joseph Schmid schreef hier drie pillen van leerboeken bij. Het moest een anti-euclidisch boek zijn, zo staat in de inleiding. En dat klopt ook wel, maar de objecten waarover deze 'meetkunde' gaat, zijn dezelfde punten, lijnen en figuren als bij Euclides. Hiermee werd een soort hersengymnastiek opgebouwd, die eigenlijk niets met meetkunde te maken heeft.



figuur 4: figuren uit het vormleerboek van Schmid (1809)

Het zijn voornamelijk opsommingen van alle mogelijke configuraties van de ligging van punten en lijnen onderling, iets wat we tegenwoordig combinatoriek zouden noemen (fig.4). Echter, juist de methode tot het systematisch zoeken ontbrak. Hierdoor onttaardde het onderwijs veelal in uit

het hoofd geleerde gezangen, die de kinderen in koor moesten opdreunen. Pestalozzi en zijn school kregen wereldwijde faam, waardoor ook deze vormleer in Nederland een plaats kreeg. Voorafgaand aan de genoemde oefeningen moesten op de bewaarschool of door de moeders al oefeningen in het aanschouwen gedaan worden. In figuur 5 staat een oefening over ‘den Cubus’ uit een handleiding, die op instigatie van de Friese inspecteur Visser in 1817, is uitgebracht. Het doel was om zo een aantal ruimtelijke ordeningsbegrippen aan te leren. Nu kunnen we hier natuurlijk een beetje om lachen, maar in die tijd was het een enorme vooruitgang dat men ging nadenken over een methode hoe de kinderen de ruimte zouden kunnen leren verkennen.

Dit is de regter voor bovenliggende hoek.
 Dit is de linker voor bovenliggende hoek.
 Dit is de regter achter bovenliggende hoek.
 Dit is de linker achter bovenliggende hoek.
 Dit is de regter voor onderliggende hoek.
 Dit is de onder achter linkerzijstaande hoek.

figuur 5: enkele namen van de 24 hoeken van een kubus

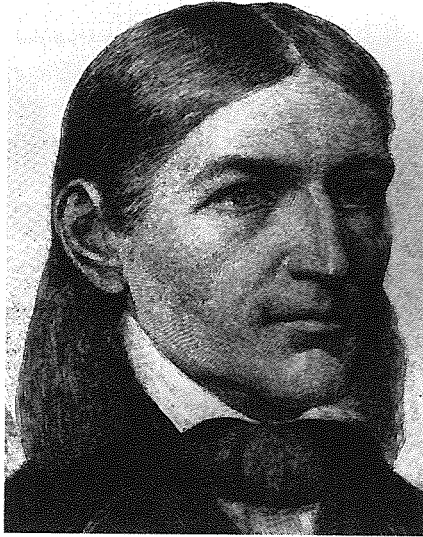
Hoe het ook zij, vanaf het begin van de negentiende eeuw, hebben de grote pedagogen en schoolmeesters in West-Europa het belang van meetkunde als onderwijsvak voor de jongste kinderen, zowel voor de bewaarschool (later kleuterschool) als de lagere school ingezien. Herbart liet zijn licht over deze kwestie schijnen. Diesterweg heeft de Pestalozziaanse vormleer in praktische zin verbeterd. Echter niet zo dat men eindelijk loskwam van de euclidische ordening van de stof. En in feite bleef het aanmodderen met het vak meetkunde op de basisschool. Zo sterk zelfs, dat het in Nederland aan het eind van de negentiende eeuw officieel geschrapt werd ten faveure van het tekenen.

6 Fröbel, uitvinder van het speelleermateriaal

Is de innovatie van de meetkunde in de negentiende eeuw mislukt, in het kleuteronderwijs beleven we in het tweede deel van die eeuw een geweldige sprong voorwaarts, wanneer Friedrich Fröbel in zijn Kindergarten begint met een sterk meetkundig getint programma.

Fröbel moet beschouwd worden als de uitvinder van de meetkundige speelleermaterialen, die hij ‘Gaben’ noemde. Zijn blokkendozen en zijn mozaïeken of variaties daarop, worden nog altijd gebruikt. Het papiervouwen, het verknippen van figuren, het maken van ruimtelijke constructies

met stokjes, het tekenen op roosterpapier en zo meer. Al deze activiteiten, die we vandaag de dag als normale zaken met de kinderen ondernemen, zijn door Fröbel en zijn navolgers voor het eerst ontworpen, maar vooral gesystematiseerd, zij het dat dit laatste soms iets te ver en te star is doorgevoerd (fig.7).

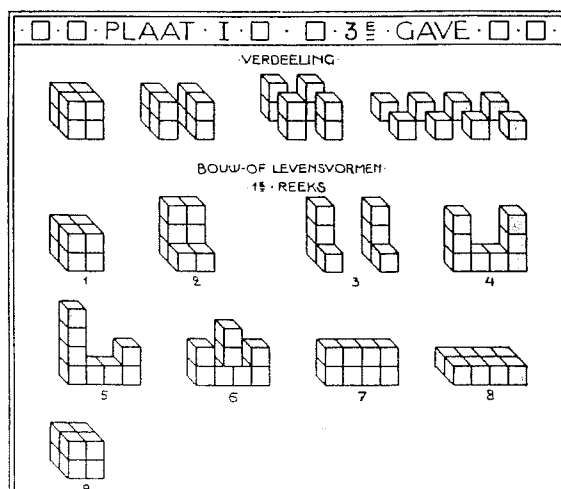


figuur 6: Friedrich Fröbel (1782-1852)

Ik beschouw Fröbel als de pedagoog, die als eerste een meetkundeprogramma heeft ontworpen, waaraan een realistische visie ten grondslag ligt. Vanuit het kind en zijn omringende ruimte, op grond van het vrije en gebonden spel, moesten de eerste begrippen en relaties op intuïtieve wijze verworven worden.

Fröbel was één van de eerste pedagogen, die een fenomenologische aanpak voorstond. Hij brak met de synthetische opbouw, maar begon analytische in de ruimte (bol en kubus), daarna in het platte vlak om ten slotte weer terug te keren naar de ruimte. In feite was hij met zijn opvattingen over het leren en onderwijzen de grote ontwikkelingspsychologen als Piaget en Bruner ver vooruit. Bij hem treffen we al de bekende trits 'concreet-schematisch-abstract' aan, die op een of andere wijze in alle leertheorieën terugkomt. Dit staat niet alleen in zijn geschriften beschreven, maar is ook geconcretiseerd in de Fröbel-materialen en hun onderwijskundige ordening. Wanneer een begrip voor het eerst aan de orde was geweest, dan moest dit later volgens een spiraalsgewijze aanpak op een hoger plan getild worden. In zijn beroemdste werk 'Die Menschenerziehung', beschrijft hij deze opvattingen over wiskunde en over meetkunde in het bijzonder. Ook

vinden we daar hoe de Vormleer voor de Volkschool, dus voor de kinderen ouder dan zes jaar, er volgens Fröbel zou moeten uitzien. Maar hiervoor is helaas nooit een programma ontworpen.



figuur 7: een oefening met de derde gave (Wierds van Coehoorn, 1914)

De invloed van Fröbel op het Nederlandse kleuteronderwijs is vooral in de eerste helft van twintigste eeuw enorm geweest. Dit onder meer onder invloed van de opleider, ontwikkelaar en Fröbel-adept Wybrandus Haanstra. Helaas heeft men in die tijd nooit gezien wat voor mogelijkheden er lagen om voortbouwend op het Fröbel-programma ook zo iets voor de lagere school te ontwikkelen. Op een beetje meetkundig rekenen na (oppervlakte en zo meer) werd in het lager onderwijs in die tijd helemaal geen meetkunde gegeven. Het was rekenen en nog eens rekenen en dat heeft zo bijna de gehele twintigste eeuw voortgeduurd.

7 meetkunde na de lagere school

Intussen verhieven zich vanaf het begin van de twintigste eeuw stemmen in het voortgezet onderwijs om het aanvankelijk meetkundeonderwijs, nog steeds werkend in de euclidische traditie, didactisch anders aan te pakken. Hierbij werd aangesloten bij de onderzoeken uit de denkpsychologische school, waaruit bleek dat de kinderen op twaalfjarige leeftijd nog niet aan een abstracte aanpak toe zijn. Maar ook vooraanstaande wiskundigen, zoals de beroemde F. Klein, spraken zich uit voor een meer intuïtieve of informele aanpak van de meetkunde in het voortgezet onderwijs.

In ons land heeft zich vooral T. Ehrenfest-Afanassjewa enorm ingezet op dit gebied. Haar idee was dat aan een meer systematische cursus in het voortgezet onderwijs een zogenaamde propedeuse vooraf moest gaan. Zij schreef daar in het Duits zelfs een boekje voor, dat in 1931 verscheen en dat van historische betekenis is geworden. Deze *Übungensammlung* bevat een kleine tweehonderd ideeën, geordend naar negentien onderwerpen, zoals afstanden, lijn als lichtstraal, symmetrie, schaduw, perspectief en zo meer. Het hoofddoel van deze propedeutische cursus, die ook op de lagere school gegeven kon worden, was het ontwikkelen van het ruimtelijk voorstellingsvermogen. De begrippen werden zoveel mogelijk ontleend aan objecten en verschijnselen uit de realiteit. Empirische activiteiten kwamen ook voor, maar ze dienden betekenis te hebben voor de ontwikkeling van het denken. In figuur 8 staan enkele vertaalde opgaven uit dit beroemde boekje.

53. Welke richting moet een vliegtuig in Berlijn nemen om via de kortste weg in Moskou te komen? Maak gebruik van een globe en een touwtje. Is de boog van een parallelcirkel op de bol de kortste afstand?

69. Waarom loopt de maan met je mee? Als je in een rijdende trein zit, waarom schieten de dingen die dichterbij zijn dan sneller voorbij dan die, welke verder weg zijn? Maak een schematische tekening.

figuur 8: vraagstukken uit de 'Übungensammlung' (1931)

Deze vraagstukkenverzameling heeft toen nauwelijks aandacht gekregen. Wel maakte Freudenthal de later bekende didacticus P. van Hiele hier al in 1931 op attent. In 1951 noemde Freudenthal dit boekje het 'beste dat hij tot dan toe op mathematisch-didactisch gebied ooit gezien had'. Op een niet gepubliceerde uitwerking van Van Albada na, vlak na de oorlog van 1940-1945, kreeg dit werk van mevrouw Ehrenfest geen vervolg.

8 Wiskobas-meetkunde

Maar aan het begin van de jaren zeventig bleek onder meer de *Übungensammlung* een bron van inspiratie te zijn voor de meetkunde van het Wiskobas-project en voor de kijkmeetkundige ontwikkelingen voor het voortgezet onderwijs. Ook Freudenthal heeft meetkunde vanaf toen als een belangrijk element voor de basisschool verdedigd. Het oorspronkelijke Wiskobas-voorstel voor een nieuw programma voor de basisschool uit 1975 was sterk meetkundig gekleurd met prachtige projecten als 'Water-

land' van Van den Brink, 'Schip Ahoy' van Ter Heege en de 'Vierkubers' van Wijdeveld.

Eindelijk kwam met het verschijnen van de huidige realistische reken-wiskundemethoden in de jaren tachtig de meetkunde na bijna negentig jaar afwezigheid weer terug in het basisonderwijs. Onder realistische meetkunde voor het basisonderwijs wordt, kort gezegd, 'het begrijpen van de ruimte' verstaan. In de realistische meetkunde wordt wel uitgegaan van de euclidische ruimte en haar verschijnselen, maar het onderwijs voltrekt zich niet volgens de logisch-deductieve aanpak van Euclides. De meetkunde wordt als het ware op historisch-genetische wijze opnieuw opgebouwd.

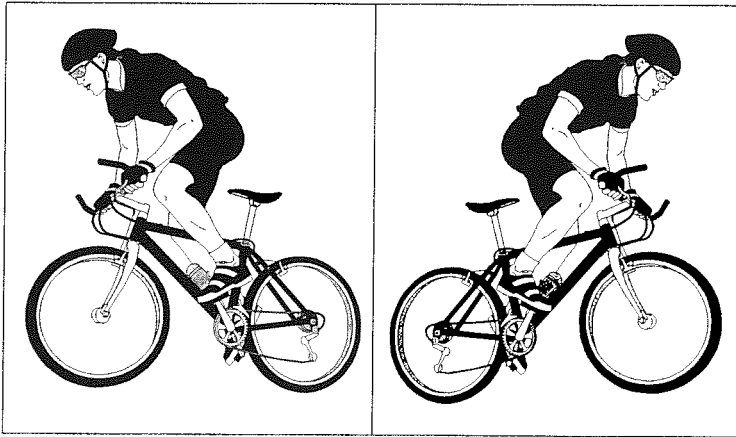
Goffree heeft in 1975 de realistische meetkunde kernachtig beschreven met de begrippen kijken, doen, denken, zien. Eerst komt het louter aanschouwelijke niveau van het kijken, daarna het doen, dat met concreet handelen omschreven kan worden. In menige onderwijsaanpak blijft het vaak bij dit kijken en doen, maar in de realistische opvatting wordt er juist op aangestuurd om door te stoten naar de twee volgende niveaus: die van het denken en die van het zien. Het denken staat voor het begrijpen en kunnen verklaren van het probleem in kwestie: het mentale handelen. Ten slotte kan via het zien het inzicht tussen verschillende verschijnselen op weer een hoger niveau gebracht worden, een pregnante overeenkomst met de bekende niveaus van Van Hiele uit de jaren vijftig.

9 meetkunde in de 'Proeve ...'

In de 'Proeve van een nationaal programma ...' zijn doelen voor meetkunde geformuleerd waarbij vijf aspecten worden onderscheiden: 'oriënteren en lokaliseren', 'viseren en projecteren', 'ruimtelijk redeneren', 'transformeren' en 'construeren en meten'. Realistisch hoeft niet altijd te betekenen dat de opgaven in alle gevallen aan de concrete realiteit zijn gelieerd. Ook meer formele, puzzelachtige opgaven als 'hoe vinden we het middelpunt van een cirkel?' of 'wat is de kortste afstand van twee punten op een koer?' kunnen uitdagende activiteiten voor de kinderen zijn. Daarbij gaat het dan vooral om antwoord te vinden op het waarom van de opgave of het verschijnsel. Meetkunde in deze zin is dan ook vooral een mentale activiteit.

Onlangs zag ik beelden van een wielertijdrit op de weg. Twee elkaar achtervolgende renners werden elk gefilmd vanaf de motoren, die hen volgden. Hun beelden werden tegelijk afgebeeld op een zogenaamd splitscreen. Zoals men ziet in figuur 9, lijkt het alsof ze ieder een andere kant oprijden.

Hoe kan dat? Het interessante van dit soort problemen is dat ze voor volwassenen vaak net zo lastig zijn als voor de kinderen. Het is derhalve moeilijk om een niveau voor zo'n realistisch meetkunde vraagstuk aan te geven.



figuur 9: deze fietsers rijden dezelfde kant op. Hoe kan dat?

10 ruimtelijk denken, een aparte hersenfunctie

Nu uit hersenonderzoek steeds duidelijker wordt dat het ruimtelijke denken zich in een ander deel van de hersens afspeelt dan het formeel-logische denken, is het ook begrijpelijk dat de realistische meetkunde een totaal ander appèl doet op het denken dan de oude euclidische meetkunde. Bij dit laatste ging het met name om formeel-logisch redeneren - bij rekenen is dit in feite ook zo - maar in het fietsersvraagstuk uit figuur 9 gaat het duidelijk om ruimtelijk denken: het zich in gedachten kunnen verplaatsen, het vormen van een beeld, daarmee weer manipuleren, eventueel een schematische voorstelling maken, kortom het vereist fantasie en voorstellingsvermogen.

Men spreekt tegenwoordig in navolging van de psycholoog H. Gardner dan ook over meervoudige intelligentie. Gardner onderscheidt tenminste zes faculteiten van de intelligentie: voor taal, logisch-mathematische activiteiten, het ruimtelijke denken, muziek, lichamelijk-kinesthetische functies en persoonlijke intelligentie (zelfinzicht en sociale interactie).

11 **zwakke correlatie rekenen-meetkunde**

In 1995 en volgende jaren is door het Cito (Janssen & Kraemer) en het Freudenthal Instituut (De Moor & Menne) het zogenaamde Pimbo-project uitgevoerd (Project Innovatie Meetkunde Basisonderwijs). Een onderdeel betrof een proeftoets meetkunde, die afgenomen werd bij bijna duizend leerlingen van groep 8 van de basisschool. Van deze leerlingen waren ook de scores bekend van de prestaties op de eindtoets rekenen van het Cito. Dit maakte het mogelijk de zogenoemde partiële correlatie tussen meetkunde en rekenen te berekenen. Deze nu bleek zwak te zijn, hetgeen de stelling bevestigt dat er bij rekenen en meetkunde verschillende hersenfuncties ingeschakeld worden.

Terugkomend op de opvatting dat wiskunde de wetenschap van getal en ruimte is, is het dus ook alleszins aanvaardbaar dat we - wanneer wij bij de kinderen al deze faculteiten zo goed mogelijk willen ontwikkelen, en wel van jongs af aan - voor de wiskunde ons niet dienen te bepalen tot het aspect van het getal alleen.

12 **huidige situatie op de basisschool**

Thans is meetkunde ook een domein van het reken-wiskundeprogramma van de basisschool, zij het dat het bij het vaststellen van de kerndoelen in 1989 nog bijna geschrapt was. Maar hoe wordt er in de praktijk tegen meetkunde als nieuw vak aangekeken?

Uit de gegevens van een enquête onder de leraren van groep 8, die een onderdeel van het Pimbo-onderzoek uit 1995 waren, is gebleken dat vrijwel alle leraren het belang van meetkunde erkennen. Ook werd aangegeven dat men gemiddeld zo'n 70 procent van het aanbod uit de methoden daadwerkelijk uitvoerde. De schoolbegeleiders trokken dit gegeven overigens sterk in twijfel. In het algemeen bestaat het vermoeden dat meetkunde nog altijd als een stiefkindje wordt beschouwd. Dit lijkt wel bevestigd te worden als we naar het aandeel van meetkunde in het PPON-onderzoek van 1997 kijken. Hier wordt meetkunde opgevat als een subdomein van meten. Er wordt gesproken van acht onderwerpen: lengte, oppervlakte, inhoud, gewicht, toepassingen, meetkunde, tijd en geld. Bij de overige onderwerpen komen ook wel meetkundige aspecten aan de orde, maar het lijkt me voor de status van meetkunde als serieus vak op de basisschool bepaald niet bevorderlijk.

Wat brengen de kinderen aan het einde van de basisschool nu eigenlijk te-

recht van meetkunde? We hebben hiervoor de beschikking over de PPON-gegevens van 1992 en 1997, maar bovendien over die van het Pimbo-project van 1995. Dit laatste onderzoek bevatte een proeftoets meetkunde, die niet alleen meerkeuzevragen bevatte, maar ook open opgaven, waarbij de kinderen zelf moesten construeren, tekenen en rekenen. In de Pimbo-toets was uitgegaan van de vijf aspecten van meetkunde, waaronder meten en construeren. Dus zaten in de Pimbo-toets ook opgaven over oppervlakte en inhoud, die in het PPON-onderzoek als aparte subdomeinen worden opgevat. Het is vanwege de verschillende methodologische opzetten van Pimbo en PPON niet mogelijk om statistisch verantwoorde vergelijkingen uit te voeren. Toch veroorloof ik me enkele opmerkingen hierover te maken.

1

Welk bakje kun je van deze bouwplaat maken?

A

B

C

D

bakje _____

2 Kim, Thea en Bert zien in de verte een ballon achter het bos de lucht in gaan.

Vul in:

Zo ziet _____ de ballon

Zo ziet _____ de ballon

Zo ziet _____ de ballon

3

Pieter heeft een zijaanzicht van het bouwwerk getekend.

Welk zijaanzicht heeft hij getekend?

A

B

C

D

Zijaanzicht _____

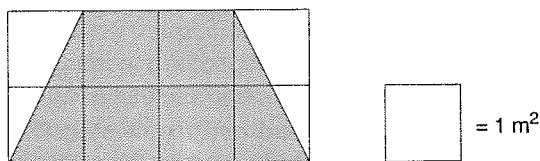
figuur 10: voorbeelden bij de vaardigheidsschaal meetkunde

Het eerste dat opvalt bij vergelijking van de PPON-gegevens van 1992 en 1997 is dat er een verbetering is waar te nemen voor meetkunde, maar dat deze miniem is. Een tweede interessante kwestie is de 'beheersingsgraad'. Er is sprake volgens het PPON-rapport sprake van 'voldoende beheersing van de kerndoelen' als 70 tot 75 procent van de leerlingen de opgaven uit figuur 10 goed of nagenoeg goed beheerst. En dat is ook gehaald.

Deze standaard is vastgesteld op grond van de oordelen van een aantal deskundigen. Nu is mij gebleken uit een mondelinge mededeling van Jansen van het Cito dat deze deskundigen de standaarden voor meetkunde veel lager inschatten dan bij rekenen. Met andere woorden: de deskundigen zijn tevreden met tamelijk lage eisen voor meetkunde. De drie opgaven uit figuur 10 komen uit de peiling van 1992 en staan slechts model voor bepaling van de standaard. De eerste twee items hadden toen goedscores van 86 procent en 80 procent (de laatste heb ik niet kunnen vinden). Nu komen dergelijke opgaven in de huidige methoden al in de middengroepen of zelfs in de kleuterprogramma's voor en kunnen derhalve van een zeer elementair niveau genoemd worden. Als daar in het onderwijs ook werkelijk aandacht aan besteed zou worden, dan moet er toch een veel hoger niveau bereikt kunnen worden. Deze stof is toch veel eenvoudiger dan het rekenen met procenten om maar eens iets echt moeilijks te noemen, maar dat hoort thuis in de andere hersenhelft.

13 oppervlakte

Teleurstellend vind ik de resultaten op het onderdeel 'oppervlakte meten' in het PPON-onderzoek van 1997. Een klassieke opgave als: bereken de oppervlakte van een rechthoekig stuk land van 30 bij 40 meter, blijkt door slechts 64 procent van de kinderen goed gemaakt te worden, terwijl dat item in het PPON-onderzoek van 1992 nog 70 procent haalde. In de Pimbo-toets kwam een dergelijk vraagstuk niet voor. Wel een opgave als in figuur 11, die meer over het begrip oppervlakte gaat en het kunnen omstructureren van figuren. Deze had een goedscore 90 procent. Het lijkt me van groot belang dat hierover eens een nadere analyse gepleegd wordt.



De oppervlakte van de grijze figuur is _____ m^2

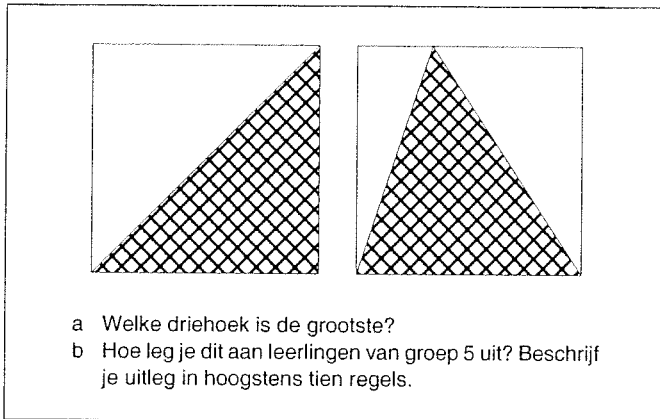
figuur 11: opgave uit de Pimbo-toets

Al sinds het eind van de jaren zeventig bestaat er voor het oppervlakte meten een schat aan materiaal, dat gelegenheid biedt om dit onderwerp zorgvuldig en inzichtelijk op te bouwen met de mogelijkheid tot een uiteindelijke formalisering. Een belangrijk element in het verwerven van een goed

oppervlaktebegrip is het zogenaamde omstructureren van figuren. Iets dat de kinderen niet vanzelf komt aanwaaien, maar waarin onderwijs gegeven moet worden.

14 oppervlakte op een Pabo

Dat het oppervlaktebegrip zelfs op de Pabo tot allerlei merkwaardige begripsverwarring kan leiden, heeft Ter Heege beschreven in een artikel in het 'Tijdschrift voor nascholing en onderzoek van het reken-wiskundeonderwijs' (jrg 18 nr 2). Als tentamenvraag aan het eind van het tweede jaar Pabo, kregen de studenten naar aanleiding van de afbeelding in figuur 12 de volgende vragen voorgelegd: 'Welke van de twee driehoeken is het grootst? Hoe zou je de kinderen dit uitleggen?'



figuur 12: welke driehoek heeft de grootste oppervlakte?

Tweederde van de studenten gaf op de eerste vraag een goed antwoord, maar uit hun uitleg bleek dat dit vaak op een verkeerde redenatie berustte. Zo beweerde een van de studenten dat, als je de top van de driehoek over de bovenzijde van het vierkant bewoog, de ene zijde van de driehoek langer werd, maar dat dit opgeheven werd door wat de ander korter werd en dat de oppervlakte dus(!) gelijk bleef. Niet alleen verkeerd geredeneerd, maar ook constateren we de klassieke verwarring over omtrek en oppervlakte. In een interactieve les zou je meteen kunnen ingrijpen door bijvoorbeeld de top tot buiten het vierkant voort te zetten. Maar het betrof hier een toetssituatie!

Ter Heege heeft het eerste deel van het vraagstuk daarna ook in groep 8

van een basisschool afgenomen. Daar was de goedscore eenderde. Misschien dat de vraagstelling sommige kinderen op het verkeerde been heeft gezet, maar kennelijk was de meesten toch niet de bekende hulplijn bekend. Bovendien betrof het hier geen representatieve steekproef. Het zou mij niet verbazen als aan dit soort vraagstukken nauwelijks aandacht wordt besteed. Nu kunnen de studenten van deze Pabo nog blij zijn dat ze iets van deze problematiek hebben kunnen leren, maar op hoeveel Pabo's komt meetkunde met ternauwernood één contactuur voor wiskunde & didactiek in de week überhaupt aan de orde?

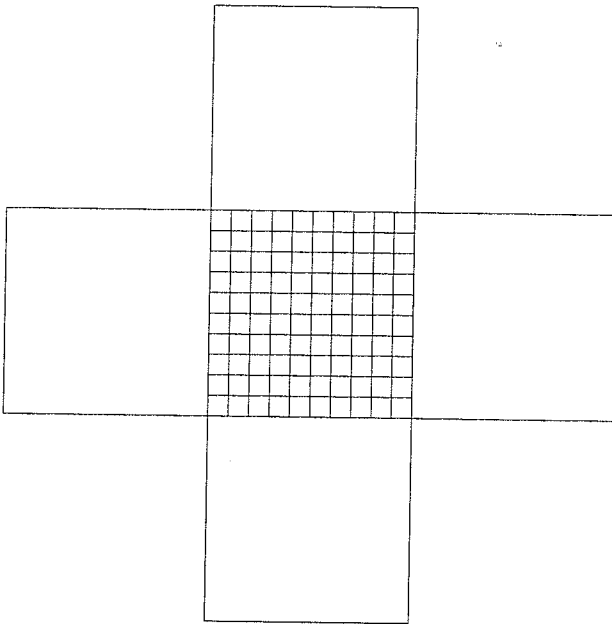
15 ervaringen met Stella

Ik denk dat er op de basisschool ook bij dit onderwerp veel meer bereikt zou kunnen worden dan wat we op grond van deze resultaten zouden moeten geloven. Ik baseer mij hiertoe op mijn ervaringen met mijn leerlinge Stella (elf jaar), die sinds begin september 1999 elke maandag een uurtje bij mij komt. Het laatste kwartier komt haar vader erbij en wordt de les met z'n drietjes geëvalueerd. Ze nemen huiswerk mee, dat bestaat uit oefeningen uit een boekje over flexibel rekenen van W. Faes. Elke dag doen ze een blaadje, nooit meer dan een half uur. Haar vader schrijft een verslagje in een schrift.

Ik bepaal me tot een aantal fundamentele, inzichtelijke zaken. Op school wordt individueel met werkkaarten gewerkt, er worden geen klassikale lessen gegeven, er zijn geen hoofdrekenlessen. Wel wordt op de Cito-toets geoefend. Stella heeft enige rekenachterstand volgens een test van de schoolbegeleidingsdienst. Dit klopt, maar de oefeningen met haar vader beginnen al succes te hebben. Verder las ik in het testrapport van de schoolbegeleidingsdienst dat Stella geen ruimtelijk inzicht heeft. Daarover nu iets.

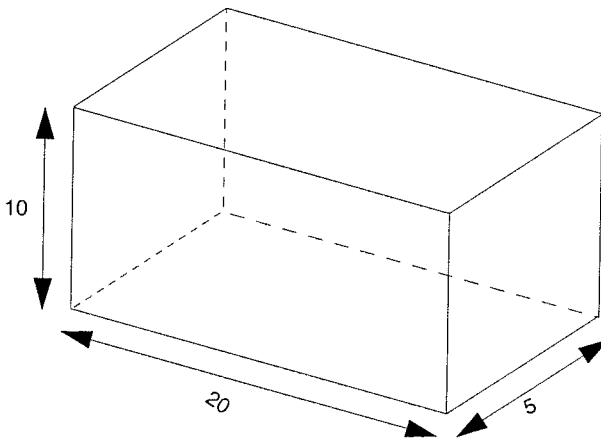
Aan het begin van een van onze lessen, had ik een opengevouwen kubusdoosje van 10 bij 10 bij 10 cm op tafel gelegd (figuur 13). Wat is dat? Ze pakt meteen het bouwplaatje en vouwt het dicht. Een doosje! Op de bodem is een rooster van 10 bij 10 cm getekend. De ribben worden met een liniaal nagemeten. Ik heb blokjes van 1,2 cm. Dus die passen niet in de bodem, maar ze kan zich voorstellen dat er een laag van 100 blokjes van 1 bij 1 bij 1 cm gelegd kan worden. En tien lagen betekent 1000 blokjes, die we ons verder steeds voorstellen. We ontdekken het verband tussen 1000 cm^3 en 1 dm^3 . Dan blijkt dat ze niet weet dat we dit één liter noemen. Wel iets van de metriek stelsel-'trap' gehad op school, maar dat lijkt nog niet beklijfd. Ze wil niet geloven dat er werkelijk één liter water in die kubus gaat. Ik be-

loof haar dat ik dit de volgende keer zal laten zien. Ik knutsel daarom later van een melkpak en stopverf een echte literkubus in elkaar.



figuur 13: bouwplaatje van doosje zonder deksel

Tot slot van deze les schatten we het aantal blokjes dat in een gewoon melkpak van 7 bij 7 bij 19,5 cm gaat. Als oefening laat ik van enkele andere dozen met afmetingen van hele centimeters de inhoud berekenen.



figuur 14: : doosje van 20 bij 5 bij 10 cm

In de volgende lessen ga ik steeds van de ruimtelijke duizend-configuratie uit. We zoeken uitgaande van de 10 bij 10 bij 10 configuratie door ontbinding en herschikking van de factoren andere 'dozen', zoals 20 bij 5 bij 10 (fig. 14). Ik schets ze steeds op een blaadje en vraag haar aan te geven hoe zo'n doos er in werkelijkheid ongeveer uitziet.

Ook berekenen we van elke doos de hoeveelheid karton, die voor een doos nodig is. Iets dat ze ruimtelijk met haar handen aanwijzend doet: dit is beneden 5 bij 20, dan die van 5 bij 10 tweemaal en die twee van 20 bij 10. Ze wil de berekende resultaten ook nog uit het hoofd bij elkaar tellen, maar daar moet even papier bij te pas komen. Vergelijking van de verschillende dozen naar hoeveelheid karton doet bij haar spontaan de constatering ontstaan dat de kubusdoos de kleinste moet zijn. Ik probeer nu: wat zou het hoogste melkpak in hele centimeters zijn? Zonder aarzeling komt die van 1 bij 1 bij 1000 cm eruit.



Het bijna drieduizend meter lange cruiseschip Carnival Triumph meert af in de haven van Miami. Het ship begint vandaag aan zijn maiden trip met ruim 2700 passagiers aan boord. De gasten hebben de keus uit achttien bars.

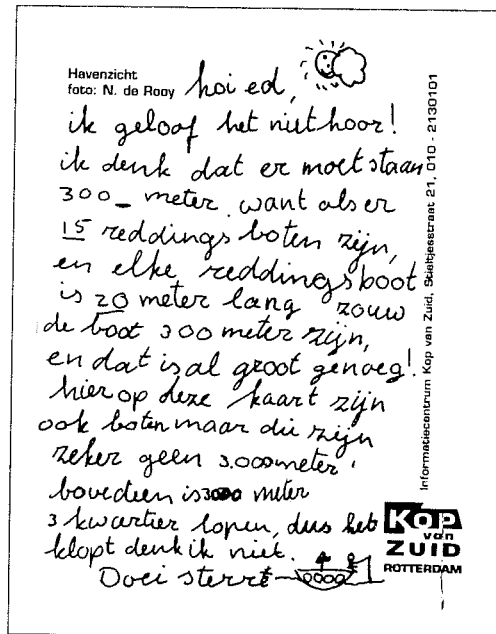
FOTO AP

figuur 15: een krantenbericht

Dat dat ongeveer zo hoog is als ons huis wekt wel weer enige verbazing. Ondertussen werken we aan het metriek stelsel. Met flesjes van 100 ml (shampoo van de Hema) en 20 cl (Spa) schenken we water over en oefenen sommetjes.

Toevallig kreeg ik in de week van Stella's herfstvakantie van collega K. Bujs een foto van een cruiseschip, waarvan het bijschrift vermeldt dat de boot 3000 meter lang is (fig. 15). Ik kon niet nalaten Stella een kopie te

sturen met de vraag of zij dacht dat dit kon. Verrassend was de tekst van de kaart, die ze me terugstuurde (fig. 16). Dit geeft goede hoop dat het gaat lukken met het rekenen van Stella. En wat het zwakke ruimtelijk inzicht betreft, ik geloof dat dat nogal meevalt, gezien ons melkpakken-onderzoek. In ieder geval moet het toch mogelijk zijn via het rekenen de kinderen in aanraking te brengen met een aantal fundamenteel meetkundige verschijnselen.



figuur 16: Stella's antwoord

16 van vormleer naar realistische meetkunde

Een uitgebreide beschrijving van de geschiedenis van het meetkundeonderwijs is te vinden in het boek 'Van vormleer naar realistische meetkunde'. Ook de huidige staat van het meetkundeonderwijs op de basisschool, zoals onderzocht in het Pimbo-project, is daar beschreven. In dit boek sluit ik af met een tiental aanbevelingen.

Een daarvan is de huidige toetsing van meetkunde door het Cito uit te breiden met of te vervangen door andere evaluatie-instrumenten dan alleen die met meerkeuzevragen. Anders bestaat immers de kans dat meetkunde verstart tot een papieren onderwijs, waarbij op specifieke vragen

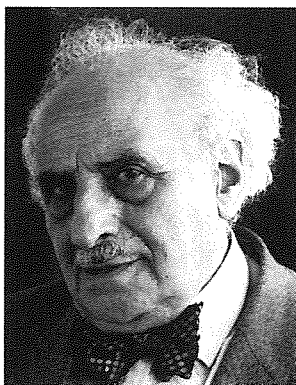
geoefend gaat worden. Men kan dan bijvoorbeeld denken aan open vragen, waarbij ook het actieve element, zoals het zelf construeren en tekenen, van de leerlingen tot uiting komt. Maar ook aan kleine projecten of thema's over meetkunde - bijvoorbeeld iets over de zon en de maan - waar de kinderen onder leiding van de leraar gezamenlijk aan werken. Controle zou door de inspectie kunnen plaatsvinden.

Een andere aanbeveling is een oproep om tot een consensus te komen over de inhoud van het huidige programma. Een mogelijkheid ligt hier via het TAL-project, waarvoor thans in ieder geval voor de onderbouw tussendoelen en leerlijnen beschreven moeten worden.

17 tot slot

Dit was niet zo'n positief verhaal over meetkunde als onderwijsvak voor het basisonderwijs. In vroeger tijden is er heel wat mislukt. Ook de opbrengsten van nu zijn bepaald niet rooskleurig. Voor sommigen een reden om ons er maar niet al te druk over te maken. Maar de lezer zal wel begrijpen dat ik het daar helemaal niet mee eens ben.

Vroeger gold de vormende waarde als enige reden voor meetkunde als onderwijsvak. Nu kunnen we talloze voorbeelden geven van meetkunde als een praktisch vak, dat ook op een heel elementair en informeel niveau, zelfs voor de jongste kinderen aan de orde gesteld kan worden. Het is bovendien van waarde als voorbereiding op de verdere ontwikkeling in het voortgezet onderwijs.



figuur 17: Hans Freudenthal (1905-1980)

Maar er is iets dat we thans sterker dan ooit als motivering naar voren kunnen brengen. Het is het feit dat - als we de kinderen zo breed mogelijk,

in al hun faculteiten - willen ontwikkelen, we niet alleen aandacht aan de logisch-mathematische intelligentie (het getal), maar ook aan het ruimtelijke doen en denken (de ruimte) moeten besteden.

En als u hierdoor nog niet overtuigd bent, dan roep ik nog eens een uitspraak van Hans Freudenthal aan, die hij op een van de Panamaconferenties in de jaren tachtig naar voren bracht tijdens een discussie over de motivering van meetkunde als vak voor de basisschool. 'Meetkunde moet', zo zei hij, 'al is het alleen maar omdat je de kinderen zoveel moois niet mag onthouden'.

literatuur

Moor, E.W.A. de (1999). *Van vormleer naar realistische meetkunde. Een historisch-didactisch onderzoek van het meetkundeonderwijs aan kinderen van vier tot veertien jaar in Nederland gedurende de negentiende en twintigste eeuw*. Utrecht: Freudenthal Instituut.