Samenhang tussen breuken, procenten en verhoudingen

M. Torn & C. Bergmans
Bekadidact, Baarn
K. Buijs
SLO, Enschede / Bekadidact, Baarn

1 inleiding

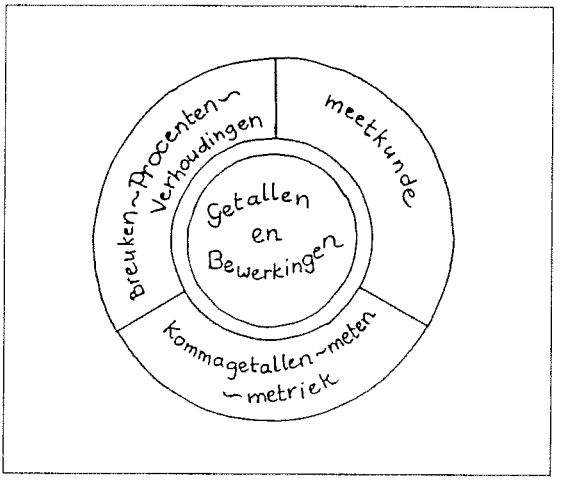
Het ontwikkelwerk rond de bovenbouwmaterialen van de nieuwe realistische rekenmethode 'Wis en Reken' is in volle gang. Centraal in dit artikel staat een gedeelte van het 'try-out' materiaal uit groep 7. Dit materiaal wordt voor het tweede jaar in verschillende scholen uitgeprobeerd en op grond van de ervaringen bijgesteld. Er wordt zoveel mogelijk aan gedaan om de uitgangspunten die in de onderbouw van de nieuwe methode zijn gerealiseerd, ook in de bovenbouw zo goed mogelijk tot hun recht te laten komen. Het gaat hierbij met name om de volgende punten:

- het aansluiten bij de eigen aanpakken en informele kennis van leerlingen;
- de geleidelijke aansturing op niveauverhoging en verkorting. Hierbinnen blijft veel ruimte voor het werken op verschillende niveaus (de kinderen kunnen vraagstukken getalsmatig aanpakken of gebruik maken van de steun van een model, bijvoorbeeld de strook);
- de intensieve aandacht voor een hechte begripsmatige fundering (samenhang) van achtereenvolgens getalbegrippen, getalrelaties, procedures, e.d.

Vooral dit laatste is een verre van eenvoudige maar wel zeer principiële kwestie. De leerstof wordt in de bovenbouw immers gekenmerkt door een grote verscheidenheid aan onderwerpen zoals: grote getallen (in de miljoen en miljard), basaal hoofd- en eigenschapsrekenen (bijvoorbeeld rekenen tot 1000, vermenigvuldigen en delen met ronde getallen), schattend rekenen, cijferend rekenen (standaardprocedures), breuken, kommagetallen, procenten en verhoudingen, meten en meetkunde.

Het is van groot belang dat al deze onderwerpen zoveel mogelijk in onderlinge samenhang aan de orde gesteld worden, zodat het geen losse en on-

begrepen segmenten in de leerlijn worden. Dit geldt met name voor de 'hogere' getalbegrippen: breuk, procent, verhouding en kommagetal. Aan deze begrippen kan overigens pas goed inhoud worden gegeven wanneer er een sterke basis op het gebied van de hele getallen en hun relaties aanwezig is (fig. 1).



figuur 1

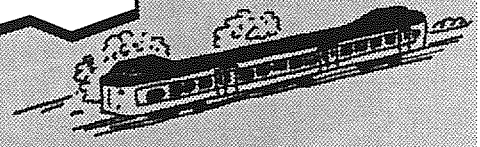
In dit artikel wordt een klein gedeelte beschreven van de wijze waarop de samenhang tussen de 'hogere' getalbegrippen gerealiseerd wordt. Daarbij zullen de kommagetallen slechts zijdelings in beeld komen, hoewel deze in nauwe verbinding met het meten en de breuken uiteraard wel een belangrijke rol spelen.

Beschreven wordt hoe de kinderen geleidelijk aan steeds meer greep krijgen op de begrippen breuk, procent en verhouding. De onderlinge verbondenheid van deze begrippen wordt daarbij steeds verder bewust gemaakt. Ten behoeve van de leesbaarheid is ervoor gekozen om deze begrippen in dit artikel achtereenvolgens aan de orde te stellen. Daarbij wordt steeds duidelijk aangegeven wat de rode draad is die de begrippen met elkaar verbindt.

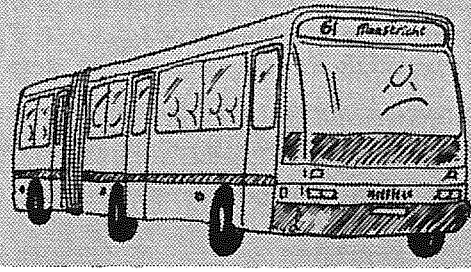
Ten slotte werpen we een blik op wat het resultaat kan zijn van een dergelijke samenhangende leerlijn. Tegen het einde van groep 7 blijken de kinderen ook met situaties waarin allerlei gegevens door elkaar of impliciet aanwezig zijn (figuur 2 en 3) heel goed uit de voeten te kunnen.

OPENBAAR, HO MAAR....

Uit onderzoek blijkt dat maar liefst de helft van de mensen met de auto naar het werk gaat. 25% gaat met de fiets en 1 op de 10 met het openbaar vervoer. De rest gaat op een andere manier. Aan het onderzoek deden 5000 mensen mee.

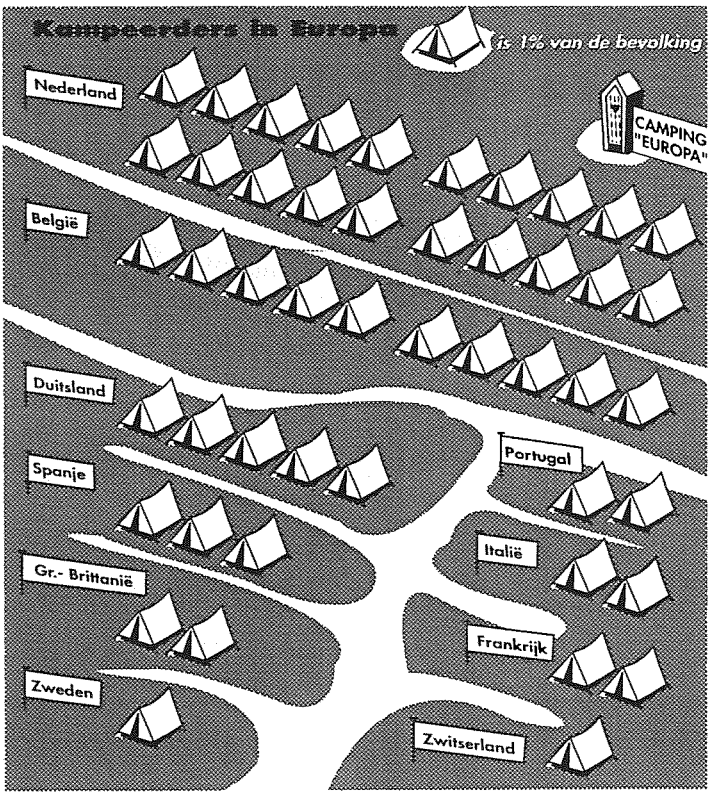


1. Wat wordt bedoeld met '1 op de 10' gaat met het openbaar vervoer naar het werk?
2. Teken de helft, 25% en '1 op de 10' in één strook of één cirkel.
3. Er deden 5000 mensen mee aan het onderzoek.
   Hoeveel daarvan gaan met de auto naar het werk?
   En hoeveel met de fiets?
   En hoeveel met het openbaar vervoer?



figuur 2: 'Openbaar Ho Maar'

Een plaatje uit de krant.
Per land staat aangegeven hoeveel procent (%) van alle inwoners een tent heeft.



1. Bekijk het plaatje goed. Valt je iets op?
   In welk land wonen de meeste kampeerders, denk je?
2. Reken uit hoeveel inwoners van ieder land een tent hebben.
   Gebruik de gegevens van blz. 15 van het werkboek.
3. Teken deze aantallen in de grafiek van blz. 15.

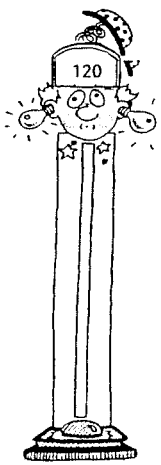
figuur 3: 'Kampeerders in Europa'

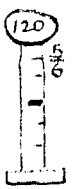
2 breuken

Groep 7 begint met een uitgebreide opfrisperiode. Belangrijke zaken met betrekking tot de getallen en de hoofdbewerkingen komen daarin naast meten, maatkennis, schaalbegrip en dergelijke aan de orde. Wat betreft de breuken wordt de brede verkenning die in groep 6 is opgestart, voortgezet. Daarbij wordt veel nadruk gelegd op de breukentaal. Een voorbeeld: $\frac{5}{6}$ deel van bijvoorbeeld een taart, stokbrood of worst en dergelijke houdt in: je deelt het in zes gelijke stukken, en je neemt (snijdt, bakent af, kleurt) daarvan vijf stukken.
In het verlengde van de opfrisperiode wordt een aantal nieuwe zaken opgestart. Ten aanzien van de kommagetallen betreft dit een brede verkenning van allerlei praktische verschijnselen, waarin kinderen kommagetallen zelf tegenkomen. Bij de breuken betreft dit het bepalen van een deel van een hoeveelheid (van een getal): de breuk als operator. In de bekende 'Kop van Jut'-context, komt de dubbele strook voor het eerst als model naar voren (fig.4).

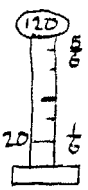
Vandaag krijg je bij de Kop van Jut 120 punten als je tot bovenaan slaat. Azize heeft tot $\frac{5}{6}$ geslagen. Hoeveel punten krijgt ze? (Leg uit hoe je het uitrekent)

Sommige leerlingen zullen los van de dubbele strook al meteen redeneren: het is 5/6, dus je moet 120 eerst delen door 6, en dan 5 stukjes nemen. Anderen kunnen echter de ondersteuning van de dubbele strook nog goed gebruiken. Maak daarom nog eens aan de hand van de Jutstaaf op het bord duidelijk hoe een en ander in z'n werk gaat:

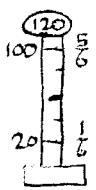




je slaat tot 5/6, dus op deze hoogte



één stukje van 1/6 is dan 120:6=20 punten



voor 5/6 krijg je dan 5x20=100 punten

figuur 4: de breuk als operator

In dit model kunnen problemen van verschillende aard gevisualiseerd worden. De dubbele strook zal ook bij de ontwikkeling van het begrip van procenten en verhoudingen een belangrijke rol blijven spelen.
Het is niet de bedoeling dat de strook, na introductie, dwingend wordt ingezet. Zijn de kinderen in staat om dit soort vraagstukken getalsmatig op te lossen dan mag dat ook. De strook heeft een ondersteunende functie.
Nadat de breuk als operator uitgebreid verkend is in de context van 'de Kop van Jut', wordt vrijwel direct ook gevraagd om dit begrip te relativeren. De breuk (als operator) staat nooit op zichzelf maar is altijd afhankelijk van de context waarin hij wordt geplaatst. Getracht wordt om de kinderen bewust te maken van het feit, dat het altijd gaat om wat er bovenaan de strook staat (de relativiteit van de breuk). Om de kinderen dit te laten ervaren is in het materiaal gerichte oefenstof opgenomen.
Al snel hierna wordt de strook als model ook gebruikt om een 'andere aspect van het breuk-begrip' te verkennen, namelijk de breuk als beschrijver van een verhouding. Bijvoorbeeld: 800 van de 1200 toeschouwers, welk deel is dat? (fig.5)

Een berichtje uit de krant.

TONEELSTUK GROOT SUCCES

Het nieuwe toneelstuk van theatergroep 'steeds hoger' is een groot succes. In de stadschouwburg waren gisteravond bijna 800 van de 1200 plaatsen bezet. De toeschouwers waren zeer enthousiast.

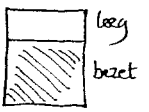
a Hoeveel plaatsen waren er ongeveer leeg?
Welk deel is dat?
b Welk deel van de plaatsen was bezet?
c Maak een plaatje van de zaal en teken erin welk deel leeg is en welk deel bezet.

figuur 5: de breuk als beschrijver van een verhouding

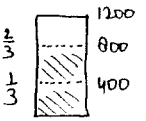
Ook hierbij speelt de dubbele strook weer een belangrijke rol bij het visualiseren van het probleem en het komen tot een aanpak (fig.6).
Zoals eerder werd gezegd wordt de dubbele strook niet dwingend ingezet. Veel kinderen zullen de strook al snel niet meer tekenen. Zij zijn inmiddels in staat om op een puur getalsmatige manier de uitkomst van dit soort vraagstukken te vinden. Toch biedt de mogelijkheid om op de strook terug te kunnen vallen voor een groep kinderen veel steun. Het mooie is dat die zekerheid in het verloop van groep 7 alleen maar bevestigd wordt, omdat

de strook het centrale model is waarin het begrip van breuken, procenten en verhoudingen samenkomt.
Omdat de strook als (denk)model niet wordt losgelaten, worden de kinderen daadwerkelijk in staat gesteld om op hun eigen niveau en naar eigen voorkeur dit soort problemen aan te pakken. Wanneer een kind kiest voor het werken met de strook, omdat het de puur getalsmatige aanpak nog moeilijk vindt, blijkt dat het toch verder kan gaan met de stof.

800 van de 1200 plaatsen bezet: is dat veel?
Dan vestigt u de aandacht op het aantal bezoekers: er waren ongeveer 800 mensen, terwijl er in totaal 1200 plaatsen in het theater zijn. Is dat veel, die 800 bezoekers? Zit de zaal dan bijna vol? Of zijn er nog een hoop plaatsen onbezet? Wie zou er een plaatje van kunnen tekenen? Deze vragen worden gezamenlijk besproken. U laat daarbij naar voren komen dat 800 op een totaal van 1200 heel wat is. Er zijn dan weliswaar nog 400 plaatsen onbezet, maar het aantal bezette plaatsen is toch dik over de helft. In een plaatje kan dit nader verduidelijkt worden.



Welk deel is dat?
Vervolgens wordt nader besproken welk deel van de zaal nu bezet is. Wie heeft er een idee om dit te achterhalen? U laat de leerlingen met hun suggesties komen en maakt deze zo mogelijk aanschouwelijk aan de hand van een strook (die dan dezelfde vorm kan hebben als de tekening van de zaal die al op het bord staat). Bijvoorbeeld:
– er zijn 400 plaatsen onbezet, dat is 1/3 deel. Dan is 800 2/3 deel:



figuur 6: handleiding, de breuk als beschrijver van een verhouding

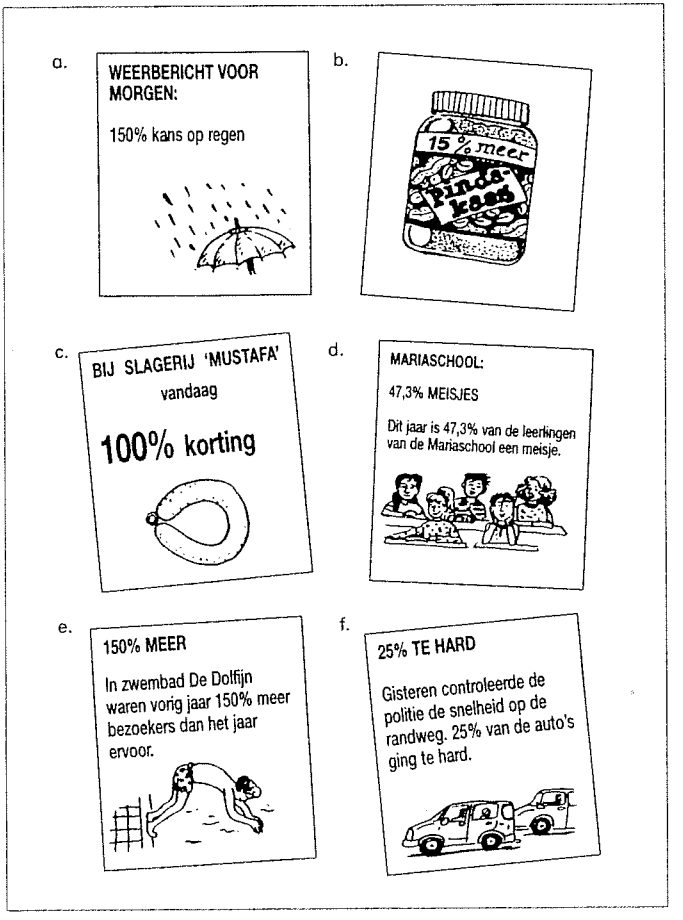
Deze vorm van niveau-differentiatie vormt de essentie van wat de methode 'Wis en Reken' binnen het raamwerk van klassikaal interactief onderwijs probeert te bereiken.

3 breuken en procenten

Halverwege groep 7 zijn de leerlingen goed vertrouwd met het gebruik van de breuk als operator. Ook kunnen ze eenvoudige verhoudingen met een

breuk beschrijven. Daarnaast zijn natuurlijk allerlei andere zaken aan de orde, zoals bijvoorbeeld de verkenning van kommagetallen gekoppeld aan het meten. Het voert te ver om hier nu op in te gaan.

In blok 10 (januari) wordt vervolgens het procentenbegrip geïntroduceerd. We starten vanuit een soort beginsituatie-onderzoekje, in de geest van de onderzoekjes van L. Streefland. Zo wordt de informele kennis, die bij de kinderen aanwezig is voor het voetlicht gebracht. In de try-outs blijkt deze steeds weer aanzienlijk te zijn (fig.7).

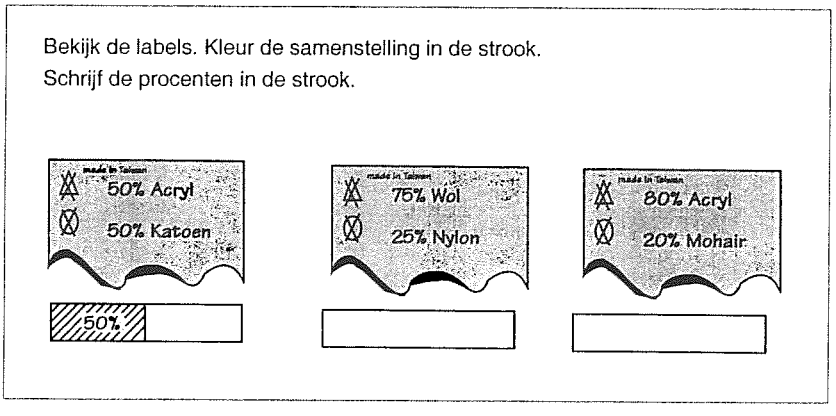


figuur 7: een procentenonderzoekje

Uit het onderzoekje blijkt dat de kinderen procenten herkennen uit hun dagelijkse werkelijkheid ('Ik heb het een keertje gezien bij tandpasta'). Verder blijkt dat veel kinderen zich al bewust zijn van het feit dat 'mooie per-

centages' corresponderen met bekende breuken, zoals 50 procent met een $\frac{1}{2}$ deel (helft) en 25 procent met een $\frac{1}{4}$ deel (kwart) en dergelijke. Deze informele kennis vormt de basis voor de verdere ontwikkeling van het procentenbegrip van de kinderen zoals dat in het vervolg van de methode gestalte krijgt. De 'mooie percentages' vormen een goed didactisch aanknopingspunt en gaan fungeren als ankerpunten.

In situaties als de in figuur 8 wordt het inzicht in ankerpunten verdiept. Bovendien wordt het aantal ankerpunten geleidelijk aan uitgebreid (10 procent, 5 procent) zodat een netwerk ontstaat.

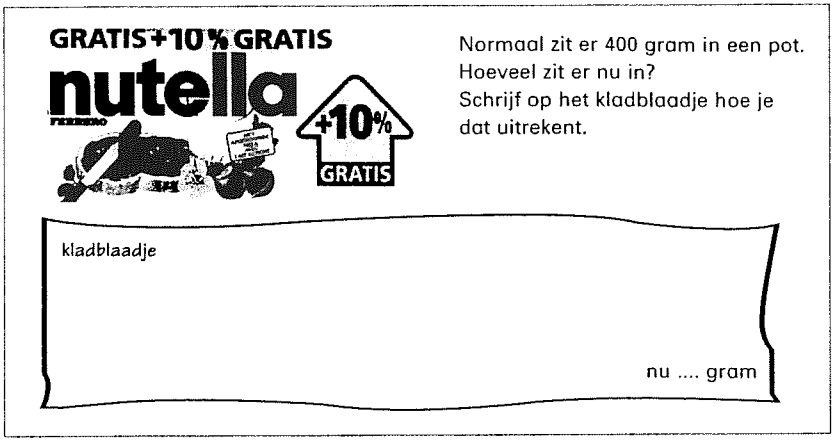


figuur 8: kledingslabels

Op basis daarvan wordt het rekenen met procenten geïntroduceerd. Dit rekenen gebeurt bij kortingen (fig.9) en in stijging/dalingsituaties, bijvoorbeeld 'meer chocoladepasta voor hetzelfde geld' (fig.10 en 11).

Net als bij de breuken speelt de dubbele strook een centrale rol ter ondersteuning van de denkweg en het rekenwerk.
Het rekenen met 1 procent komt naar voren in de context van een prijsverhoging van 4 procent. De kinderen kunnen dan niet meer werken met de bekende ankerpunten maar moeten gebruik maken van 1 procent ($\frac{1}{100}$ deel) om de prijsverhoging uit te rekenen. Na het rekenen met procenten (de procent als operator) wordt net als bij de breuken ook het inschatten van de verhouding als percentage nader verkend. Dit wordt onder andere gedaan in een context van brillen in de uitverkoop. De bril kost *f* 148,- nu in de aanbieding voor *f* 118,- . Hoeveel procent korting is dat ongeveer?

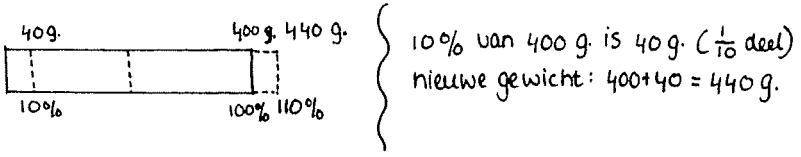
figuur 9: procenten in kortingsituaties



figuur 10: procenten in stijgingsituaties

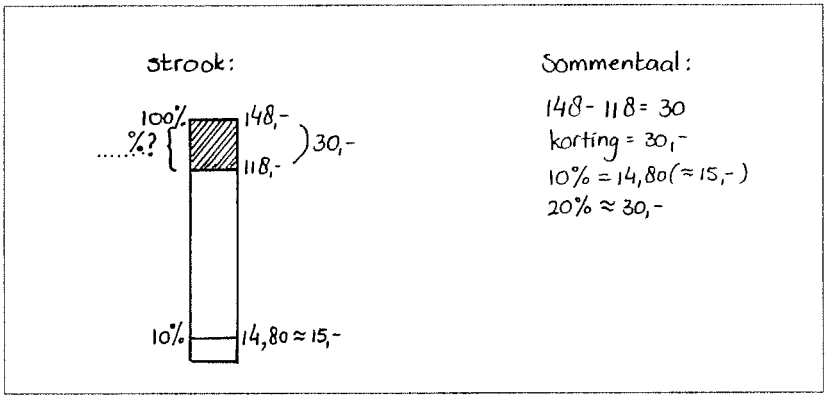
Het werken met de dubbele strook staat ook bij dit aspect van de procenten centraal. Omdat het bepalen van een verhouding een lastig vraagstuk is, kunnen de kinderen hierbij de strook gebruiken om het probleem te visualiseren. De strook helpt bij het in kaart brengen van het probleem en bij het zoeken naar een mogelijke oplossingsweg.

Hoeveel zit er in de grotere pot?
Dan vraag u wie kan uitrekenen hoeveel er nu precies in de grotere pot zit. U noteert de berekening stapsgewijs op het bord. Bijvoorbeeld:
Illustreer deze berekening aan de hand van de tekeningen van de beide potten die al op het bord staan:



figuur 11: handleiding, procenten in stijgingssituaties

De strook ordent je denkweg: wat weet je al van het probleem en wat wil je nog te weten komen. Een groep kinderen zal deze visuele ondersteuning al snel niet meer nodig hebben. Zij maken gebruik van de sommentaal (fig. 12).



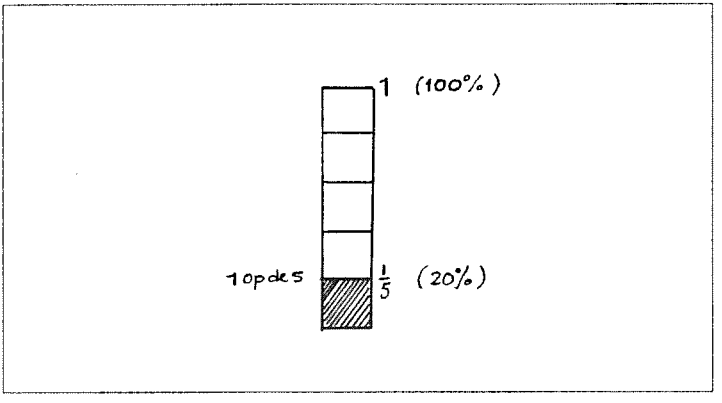
figuur 12: hoeveel procent korting?

Naast het rekenen met procenten wordt er ook aandacht besteed aan de functionele waarde ervan. Waarom wordt iets in een percentage uitgedrukt? Een van de contexten waarbij kinderen dit ervaren is de context 'lezen is leuk'. In de ene school lezen 96 van de 320 leerlingen thuis wel eens een boek en op de andere school zijn dat 49 van de 98 leerlingen. Op de

eerste school lezen veel meer kinderen thuis wel eens dan op de tweede school. Maar op de eerste school zitten ook veel meer leerlingen. Dus wil je het met elkaar kunnen vergelijken dan moet je het in een verhouding (percentage of breuk) uitdrukken.

4 verhoudingen

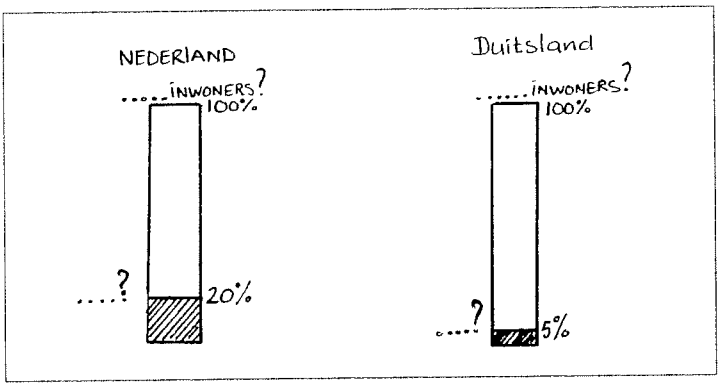
De kennis die de leerlingen hebben van breuken en procenten speelt een centrale rol om betekenis te geven aan de standaard verhoudingsaanduiding '1 op de 5' of '1 op de 4'.
'1 op de 5' betekent in breukentaal $\frac{1}{5}$ deel, in procententaal is dat 20 procent. Dit kunnen de kinderen controleren doordat 20 procent vijf keer in de 100-procent-strook past (fig.13).



figuur 13: 1 op de 5

Tegen het einde van groep 7 zijn de kinderen zo ver dat ze in allerlei gemengde verhoudingssituaties tot een oplossing kunnen komen. Bijvoorbeeld: bij de context 'openbaar ho maar' (zie figuur 2) kunnen de kinderen de uitwisselbare kennis tussen breuken, procenten en verhoudingen toepassen. Om vervolgens in complexere situaties, bijvoorbeeld het tentenprobleem (zie figuur 3) zelf het belang van verhoudingen te kunnen inschatten. Bij dit tentenprobleem gaat het om het volgende: In Nederland kampeert 20 procent van de bevolking in Duitsland is dat 5 procent. Wil dat zeggen dat er meer Nederlandse dan Duitse kampeerders zijn? De kinderen moeten hier zelf kunnen oproepen dat het inwonersaantal van belang is, Duitsland heeft veel meer inwoners dan Nederland.
Ook nu is de dubbele strook het model waarin het probleem kan worden weergegeven. De eerste stap naar de oplossing (fig.14).

Dit verhoudingsgewijs denken is van een vrij abstract niveau, dat niet ineens bereikt kan worden. Door de kinderen in de bovenbouw dit soort prikkelde problemen voor te leggen doen ze hier ervaring mee op.



figuur 14: welk land heeft meer kampeerders?

5 tot slot

In dit artikel hebben we een korte impressie gegeven van de manier waarop de samenhang tussen breuken, procenten en verhoudingen in de methode 'Wis en Reken' wordt opgebouwd. In deze bijdrage hebben we ons uiteraard moeten beperken tot een globale schets. De opgedane praktijkervaringen wijzen steeds weer uit dat de leerlingen hun kennis van respectievelijk de breuken, procenten en verhoudingen als een geheel ervaren. De strook speelt als model een belangrijke rol. In dit model kunnen de kinderen deze begrippen van meet af aan zichtbaar aan elkaar koppelen. Daarnaast kan de strook altijd door de kinderen worden gebruikt om op eigen niveau en naar eigen voorkeur de eerder geschetste vraagstukken op te lossen. Wanneer de kinderen hun denkweg in een strook of in sommentaal weer kunnen geven heeft dit gevolgen voor het onderwijs. De leerkracht krijgt zicht op het redeneerproces van de kinderen.