Symboliseren en modelleren als wiskundige activiteit

K. Gravemeijer
Freudenthal instituut, Universiteit Utrecht

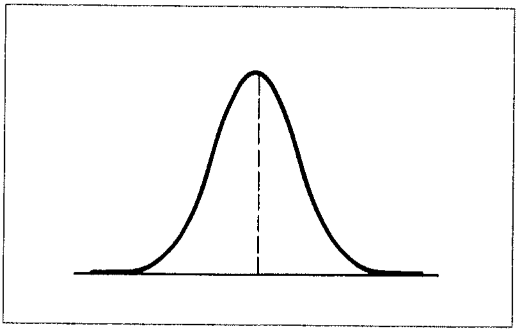
1 Inleiding

Stel ik kies willekeurig honderd volwassen mannen uit de Nederlandse bevolking en ik zet ze in een geordende rij.
Hoe ziet zo'n rij eruit?

Zoals sommigen van u misschien weten, ben ik oorspronkelijk opgeleid als kernfysisch onderzoeker. Op het Instituut voor Kernfysisch Onderzoek in Amsterdam participeerde ik als student in een onderzoek waarbij elektronen met een hoge snelheid op atoomkernen werden geschoten. Op basis van de verstrooiing van de elektronen door deze atoomkernen werden conclusies getrokken over de doorsnede en energieniveaus van deze atoomkernen. De rekenmethode die hiervoor werd gebruikt, was de zogeheten Bornse benadering. In het begin wist ik niet wat dat was, maar je gebruikte uiteraard computerprogramma's waar de gewenste kengetallen uitrolden. Later hoorde ik dat deze programma's geen gebruik maakten van de Bornse benadering maar van een 'distorted-wave approximation'. Toen ik mijn scriptie ging schrijven realiseerde ik mij dat ik eigenlijk niet wist wat de Bornse benadering precies inhield, en zeker niet wat het voor een gevolgen had als je een 'distorted-wave approximation' gebruikte in plaats van een Bornse benadering. Je begint je dan natuurlijk ongerust te maken. Navraag leerde echter dat eigenlijk niemand wist hoe het precies zat. Iedereen was ongeveer op dezelfde manier vertrouwd geraakt met de term en iedereen gebruikte hem zonder zich zorgen te maken over de precieze betekenis.

2 De normale verdeling

Zo gaat het ook vaak met het leren van symbolen en modellen in de wiskunde. Hoewel er veelal serieuze pogingen worden gedaan om de achtergrond en betekenis te verduidelijken, ontwikkelen de leerlingen in eerste instantie slechts globale noties. En net als het mij bij de Bornse benadering verging, zal het de leerlingen vaak zo vergaan dat ze deze globale noties voor de werkelijke betekenis gaan houden. Ik wil dit toelichten met een ander voorbeeld. De meesten van ons zijn wel bekend met de normale verdeling. We kennen allemaal het plaatje van de klokvormige kromme die aangeeft hoe zo'n verdeling er uitziet (fig. 1).



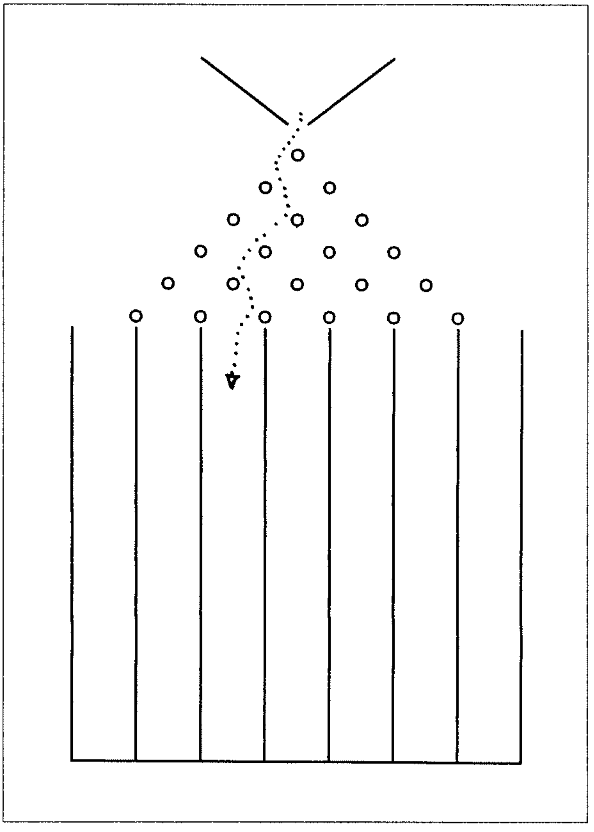
figuur 1: klokvorm normale verdeling

J. Bokhove gebruikte dergelijke plaatjes enkele jaren geleden om de uitkomsten van de bij het Cito gebruikte schalingstechnieken toe te lichten. Normale verdelingen vormen de hoeksteen van de meeste statistische berekeningen in de sociale wetenschappen. Statistiekcursussen vormen het vaste struikelblok bij dergelijke studies. Toch kunnen we ons afvragen of degenen die de statistiekonderdelen met succes doorlopen grondiger kennis van statistiek hebben opgebouwd, dan ik van de Bornse benadering. Ik wil in dit verband verwijzen naar een onderzoek van Wilensky (1997) die volwassen proefpersonen met een gedegen statistiekopleiding de volgende vraag voorlegde: 'Waarom is lengte normaal verdeeld?' Preciezer geformuleerd bedoelde hij: hoe komt het dat de verdeling van lengtes zich in de realiteit precies zo gedraagt als een wiskundige functie (de binominale verdeling) voorspelt?

Hij legde deze vraag voor aan een psychologe die juist was gepromoveerd op een onderzoek waarin gangbare statistische technieken werden gebruikt om de superioriteit van een bepaalde aanpak te bewijzen. Uit de reactie van de psychologe bleek dat ze zeer onzeker was over de werkelijke betekenis van de statistische toepassingen. Ze erkende dat ze zich altijd had afgevraagd of de normale verdeling nu een kenmerk van onze wereld was, of een wiskundige kunstgreep waarbij de werkelijkheid geweld werd aangedaan om haar in het wiskundige model te laten passen. Na enig aandringen erkende ze dat dit laatste, een geforceerde toepassing van een mathematisch model, haar het meest waarschijnlijke leek.

De gedachte dat vanuit bepaalde aannames, over aan toeval onderhevige factoren die lengte bepalen, zou kunnen worden afgeleid dat de verdeling van de lengtes de vorm van deze specifieke wiskundige functie aanneemt, was haar volslagen vreemd.

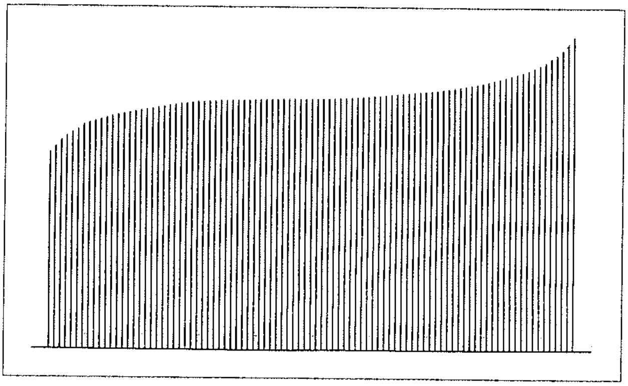
Wanneer je uitgaat van een flink aantal biologische factoren die lengte positief en negatief kunnen beïnvloeden, dan valt in te zien dat extreme waarden alleen worden bereikt als al die factoren in dezelfde richting werken. Die extreme waarden zullen dus zeldzaam zijn. Sterker nog, als je de grootte van de invloed en de kans om in de ene of de andere richting te werken weet, kun je precies uitrekenen hoe die verdeling eruit zal zien. Een mooi concreet model voor het ontstaan van zo'n verdeling is het spijkerbord waarin je kogeltjes naar beneden kunt laten vallen, die bij het botsen op een spijker een kans van 50 procent hebben om naar links te vallen en een kans van 50 procent om naar rechts te vallen (fig.2).



figuur 2: vallende kogeltjes

Wanneer je een groot aantal kogeltjes laat vallen, ontstaat de vertrouwde normale verdeling. Het sommeren van de kansen leidt tot een binominale verdeling die je voor grote aantallen kunt benaderen met de normale verdeling.

Naast dit theoretische (epistemologische) aspect is er nog een ander aspect aan de normale verdeling dat ik hier even naar voren wil halen. We kennen allemaal het plaatje van de normale verdeling en dit plaatje bepaalt globaal ons concept: de meeste waarden liggen ongeveer in het midden en hoe verder je van het midden komt hoe kleiner de aantallen. Maar realiseren we ons ook wat dit in de praktijk betekent? Ik moet u bekennen dat ik zelf nogal verrast was toen ik de gegevens van een normaal verdeelde lengte uitzette als een rij van individuele lengtes (fig. 3).



figuur 3: schematische voorstellingen van honderd mannen op een rij

In zo'n normaal verdeelde groep zitten duidelijke uitschieters aan het begin en aan het eind: één (of enkele) hele lange en één (of enkele) hele korte. Op zich is dit goed te begrijpen als je de verbinding met de normale verdeling legt, maar het is een consequentie van de normale verdeling die ik me nooit had gerealiseerd. En dat, denk ik, is een gevolg van te weinig concrete ervaring met normale verdelingen.

3 Symbolen, taal en communicatie

Het woord symbool kan op verschillende manieren worden geïnterpreteerd. Je kunt het gebruiken om naar verbale labels te verwijzen en je kunt het gebruiken om te verwijzen naar inscripties zoals visuele symbolen op papier.

Ik zal hier geen scherp onderscheid in maken, hoewel ik primair visuele en materiële symboliseringen in gedachten heb. Dergelijke externe representaties zijn mijns inziens echter onlosmakelijk verbonden met verbale labels. Een andere kwestie die zich hier opdringt is het onderscheid tussen modellen en symbolen. Ook hier zal ik geen duidelijk onderscheid tussen maken. Niet omdat er geen verschillen zijn, maar omdat ik beide op één continuüm plaats. Modellen kunnen zich mijns inziens na verloop van tijd tot symbolen ontwikkelen en het heeft, denk ik, niet zoveel zin om te proberen een precieze grenslijn te definiëren. Een onderscheid kan zinvol zijn als we de term model op een globaler (meta)niveau hanteren. Het model kan dan bestaan uit een geheel van symboliseringen die in de loop van het leerproces geleidelijk aan veranderen. De aanduiding 'model' kan dan als een overkoepelende term worden gebruikt die dit complexe geheel omvat, ik kom daar straks op terug.

Begrippen en labels leren we vaak via voorbeelden. Zo leren we de woorden 'tafel', 'stoel' en dergelijke en in het algemeen gaat dit best goed. Bij wiskundige concepten en symbolen hebben we echter een probleem. Wiskundige concepten en symbolen ontlenen hun betekenis in het algemeen namelijk aan een groter wiskundig verband. Hier doet zich in het onderwijs een probleem voor dat wel wordt aangeduid als de 'learning paradox': symbolen en modellen worden gebruikt als taalmiddelen om nieuwe wiskunde uit te leggen, maar je hebt die nieuwe wiskundige kennis in feite nodig om die symbolen en modellen te begrijpen. Daarmee kom je in een onoplosbare vicieuze cirkel terecht, waarbij je je af kunt vragen hoe het überhaupt mogelijk is om iemand wiskunde te leren.

Een bekend voorbeeld van dit type problemen wordt gevormd door het gebruik van concreet materiaal om leerlingen het decimaal positiesysteem te leren. Labinowicz (1985) geeft aardige voorbeelden van de misverstanden die zo ontstaan.
Holt (geciteerd in Cobb, 1987) verwijst naar ditzelfde probleem in verband met Cuisinair-materiaal. In eerste instantie is hij buitengewoon enthousiast over dit materiaal waarmee je getalrelaties concreet maakt. Maar, zo realiseerde hij zich later, volwassenen zien allerlei getalrelaties in het materiaal die te danken zijn aan herkenning; we zien de relaties die we al kennen. De leerlingen die deze relaties nog niet tot hun beschikking hebben zien alleen de houten blokjes.
Ook de normale verdeling kan hier als voorbeeld dienen. Het gebruik van kant-en-klare symboliseringen als informatiedrager kan leiden tot oppervlakkige kennis. Zo kan de klokvormige kromme het symbool worden voor een normale verdeling, zonder dat de kennis waar dit symbool naar verwijst wordt overgedragen. Enerzijds betreft dat de normale verdeling als

het eindresultaat van een cumulatief kansproces. Anderzijds betreft dit de klokvormige kromme als een benadering van een histogram met een oneindig smalle klassebreedte. Dit histogram is weer een symbolische beschrijving waarin de originele data - bijvoorbeeld de lengtes van een groot aantal personen - op een hoger agregatieniveau zijn samengevat.

4 Alternatieven

De hiervoor genoemde 'learning paradox' verklaart het mislukken van wat wel het 'transmissiemodel' wordt genoemd. In de Engelstalige literatuur spreekt men ook wel van 'teaching by telling'. Bij de MAB-blokken zouden we misschien moeten spreken van 'teaching by showing', hoewel de docenten de leerlingen zeker zullen vertellen wat ze geacht worden te zien.
In de alternatieven voor het transmissiemodel kunnen we grofweg twee fundamenteel verschillende benaderingen onderscheiden. Enerzijds benaderingen die ik zou willen labelen als gericht op 'ontdekken', anderzijds benaderingen gericht op 'uitvinden'.

De *ontdek-benadering* gaat ervan uit dat er een symboolsysteem is (cultureel erfgoed) en dat de leerlingen zich dit eigen moeten maken. Dit kan door leerlingen te laten proberen het symboolsysteem te doorgronden, ondersteund door het geven van feedback. Een voorbeeld van deze benadering is een computerprogramma (Kaput, 1994) dat 'tijd-afstand-' en 'tijd-snelheid'-grafieken intern koppelt aan de simulatie van het rijden in een auto. Hypotheses over wat bepaalde elementen van de grafiek betekenen, kunnen met behulp van het computerprogramma worden getoetst aan de (gesimuleerde) werkelijkheid.

De *uitvind-benadering* richt zich erop de leerlingen daadwerkelijk in de gelegenheid te stellen de beoogde symboliseringen zelf uit te vinden. Idealiter betekent dit dat de leerlingen in situaties worden gebracht die vragen om symboliseringen, waarbij ze vervolgens eigen symboliseringen verzinnen. De eerste symboliseringen zullen dan geen standaard conventionele symbolen en modellen zijn, maar informele symbolen en modellen. Vanuit deze informele symboliseringen kunnen leerlingen, via een proces van progressief mathematiseren, bij conventionele symboliseringen uitkomen. In de praktijk is het echter niet zo realistisch om te verwachten dat de leerlingen zelf een zodanige reeks van symboliseringen uitvinden, dat ze vanzelf bij de conventionele symboliseringen uitkomen. Je kunt natuurlijk wel proberen dit proces zo dicht mogelijk te benaderen. Dat wil zeggen dat je bedenkt welke symboliseringen de leerlingen op een bepaald moment uit zouden kunnen vinden en die aan te bieden. Het verschil met de *ontdek-*

benadering zit dan primair in het feit dat de symboliseringen die je introduceert aansluiten bij de eigen kennis en inzicht van de leerling op dat moment. Dit proces van geleid uitvinden heeft een bottom-up karakter in de zin dat het denken van de leerling de basis voor de symboliseringen vormt. De *ontdek-benadering* kan daarentegen top-down genoemd worden, omdat daar het denken van de expert het uitgangspunt vormt.
Een belangrijk verschil van de *uitvind-* ten opzichte van de *ontdek-benadering* is, dat een symboolsysteem niet wordt gepresenteerd als iets dat anderen hebben bedacht en wat de leerling zich eigen moet zien te maken. In de *uitvind-benadering* ervaart de leerling het symboliseren/modelleren als een eigen activiteit waarin de symboliseringen geleidelijk aan tot ontwikkeling komen. Dat wil niet zeggen dat 'ontdekken' niet tot inzicht zou kunnen leiden, maar het is wel een heel ander proces. Het participeren in de ontwikkeling van symboliseringen is mijns inziens een waardevolle wiskundige activiteit, die in de ontdek-opzet ontbreekt. Er zijn dus twee verschillen tussen de *ontdek-* en de *uitvind*-opzet en die betreffen activiteit en autoriteit. De wiskundige activiteit van het symboliseren/modelleren en de autoriteit van de docent, of - van de andere kant bekeken - de intellectuele autonomie van de leerling.

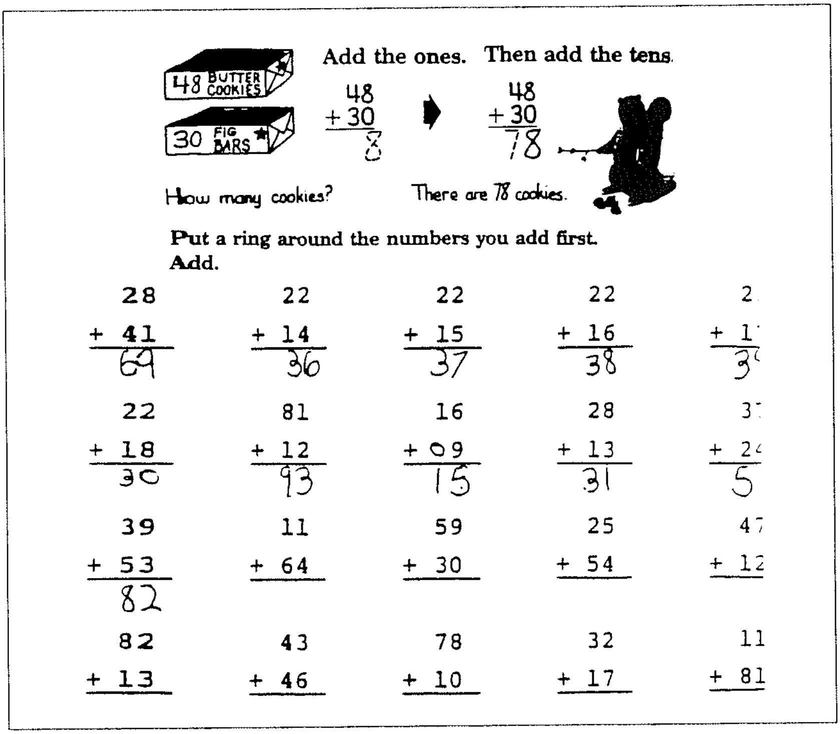
5 Reflexieve relatie symbool- en begripsontwikkeling

Het symboliseren als proces correspondeert met het 'reinvention'-principe in die zin dat de symboliseringen, die we nu als conventionele wiskundige symboliseringen kennen, ook zo tot stand zijn gekomen. Er is bovendien nog een ander aspect en dat betreft de dubbelrol van symbolen. Enerzijds beschrijven en organiseren symbolen een stukje werkelijkheid, anderzijds creëren ze een nieuwe eigen werkelijkheid. Een duidelijk voorbeeld hiervan is algebra, maar in zekere zin geldt dit ook voor de getallenwereld. Wat we echter in 'reinvention'-onderwijs willen vermijden, is dat die 'nieuwe' werkelijkheid los komt te staan van de 'oude'. Laat ik dit toelichten met getalbegrip als voorbeeld.
Freudenthal onderscheidt verschillende soorten getalbegrip; één daarvan is het rekengetal. Bij rekengetallen gaat het om het werken met getallen volgens procedures en eigenschappen zoals vastgelegd in ons rekensysteem. We kunnen daarbij denken aan de axioma's van Peano, of in gewone mensentaal aan 'eigenschappen', zoals die worden benut in het eigenschapsrekenen. Samen met gememoriseerde kennis van de basisautomatismen, kan een rekensysteem worden opgebouwd dat volledig losstaat van kwantitatieve relaties in de werkelijkheid. Nu zal dit bij het aanvankelijk rekenen niet zo gauw gebeuren, omdat het leggen van verbindingen

met getallen in de werkelijkheid op dit niveau tamelijk vanzelfsprekend is. Toch wil ik hier nog een keer het voorbeeld van Auburn opvoeren, die ervan overtuigd is dat het kolomsgewijs rekenen op een werkblad niets te maken heeft met rekenen met hoeveelheden in alledaagse situaties.
Auburn is een leerling in 'Grade 1' (groep drie) op een Amerikaanse school. In een interview dat wordt afgenomen door P. Cobb (1989) krijgt ze eerst een paar losse sommen voorgelegd:

16 + 9 =
28 + 13 =
37 + 24 =
39 + 53 =

Al deze opgaven lost ze correct, tellend, op. Daarna krijgt ze een werkblad voorgelegd met optellingen 'onder elkaar' zoals dat in Amerikaanse rekenboeken gebruikelijk is (fig. 4).



figuur 4

Nu komt ze tot:

16 + 9 = 15

en er ontwikkelt zich een gesprekje tussen de interviewer (I) en Auburn (A):

I: Klopt dat, dat er twee antwoorden zijn?
A: ?
I: Wat is het beste denk je?
A: 25.
I: Waarom?
A: Ik weet het niet.
I: Als we 16 koekjes hebben en nog 9 erbij, zouden we er dan 15 hebben?
A: Nee.
I: Waarom?
A: Als je ze bij elkaar telt zou je 25 krijgen.
I: Maar dit (15) is af en toe goed? Of is het altijd fout?
A: Het is altijd goed.

Blijkbaar is Auburn van mening dat een optelling twee antwoorden kan hebben, één als het om een concrete situatie gaat en een ander bij het cijferend optellen in de rekenles.

De bovengenoemde dubbelrol van symboliseringen hangt samen met een reflexieve relatie tussen symboolontwikkeling en begripsontwikkeling. Alvorens dit idee van een reflexieve samenhang tussen symbool- en begripsontwikkeling verder uit te werken, wil ik eerst ingaan op hoe er in de semiotiek over symbolen wordt gedacht. Een 'sign' wordt opgevat als een combinatie van een 'signified' en een 'signifier'. Daarbij wordt er niet vanuit gegaan dat de 'signifieds' bestaande zaken zijn waar de 'signifier' later als label wordt opgeplakt. Grondgedachte is dat 'signifier' en 'signified' niet los van elkaar kunnen bestaan. Anders gezegd: Wat de 'signified' is wordt mede bepaald door de 'signifier'. Samen vormen ze in terminologie van Saussure (geciteerd in Whitson, 1997) een 'sign'. Een 'sign' is in die opvatting dus niet een symbool dat je los van zijn betekenis beschouwt, maar een symbool dat die betekenis vertegenwoordigt.
We kunnen hier een verbinding leggen met de beschrijving van Freudenthal van een wiskundige fenomenologie (Freudenthal, 1983). Hij beschrijft hier hoe een fenomenologie van de wiskunde zich bezighoudt met de wijze waarop wiskundige 'gedachtedingen' helpen greep te krijgen op verschijnselen in de werkelijkheid. Deze fenomenologische benadering impliceert eveneens een reflexieve relatie. De vraag is namelijk hoe zo'n wiskundig 'gedachteding' de werkelijkheid organiseert, opdat ze toegankelijk wordt voor wiskundige berekeningen en redeneringen. Dit organiseren van de werkelijkheid, verandert ook de manier waarop we die werkelijkheid zien.

De wiskunde-didacticus Meira (1995) voegt aan deze reflexieve relatie een procescomponent toe. Hij spreekt van een dialectische relatie tussen symboliseren en begrijpen. Aan de ene kant helpen symbolen greep te krijgen op de werkelijkheid, aan de ander kant verandert de wijze waarop we werkelijkheid conceptualiseren onder invloed van de wijze waarop we haar re-

presenteren. Sterker nog, het werken met symbolen creëert een nieuwe werkelijkheid en die nieuwe werkelijkheid beïnvloedt weer de betekenis van de symbolen die we gebruiken.
Het klinkt zo wat cryptisch en ik wil het daarom proberen concreet te maken met het rekenen onder de twintig als voorbeeld.

6 Aanvankelijk rekenen

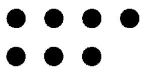
Het aanvankelijk rekenen biedt ook een geschikte context om mijn eerder gemaakte opmerking over de samenhang tussen modelleren en symboliseren toe te lichten. In een *uitvind-benadering* zullen we jonge kinderen vragen zelf manieren te bedenken om hoeveelheden te representeren. Representaties kunnen in opeenvolgend niveau van formalisering bestaan uit vingers, blokken, of fiches, stippen, turven, en cijfersymbolen. Wat de leerlingen doen valt in eerste instantie te kenschetsen als modelleren. Zeker als het gaat om het representeren van verhaaltjessommen als: 'An heeft vier knikkers en ze wint er nog drie bij, hoeveel heeft ze nu?'
Deze opgave kan op een elementair niveau worden opgelost met blokjes: elk blokje symboliseert een knikker. De handeling van het aftellen en bij elkaar tellen van de blokjes modelleert dan de knikkerpartij van An. In zekere zin is dat nog zo als deze gebeurtenis met een formele rekenzin wordt beschreven: '4 + 3 = 7'. Al zullen sommigen dan eerder spreken van symboliseren dan van modelleren. Zodra de notatie '4 + 3 = 7' wordt gebruikt om een rekenfeit te representeren, zal iedereen van symboliseren spreken.

In eerste instantie wordt er bij dit rekenen met benoemde getallen gewerkt; het gaat om 'vier knikkers' en 'drie knikkers', niet om 'vier' en 'drie'. De vraag: 'Hoeveel is vier en drie?', heeft voor heel jonge kinderen nog geen betekenis wanneer de getallen nog niet zijn losgemaakt van benoemde eenheden. Wanneer we '4 + 3 = 7' schrijven, werken we met getallen die een op zichzelf staande betekenis hebben. Deze getallen zijn in feite generalisaties van tal van situaties waar allerlei zaken als teleenheid worden gebruikt. De getallen hebben nog steeds een kwantitatieve betekenis, dit in tegenstelling tot de getallen in de abstracte rekengetallenwereld die ik zojuist schetste. Natuurlijk wordt die kwantitatieve betekenis niet altijd meegedacht. Vier plus drie is zeven, is op een gegeven moment een weetje geworden. En zelfs als we '6 + 7' uitrekenen als '6 + 4 = 10' en '10 + 3 = 13', hoeven we niet per se aan hoeveelheden te denken. Maar ik acht het wel essentieel dat die ondergrond er is, zodat: (a) de getallen in principe betekenis hebben en het rekenen niet louter bestaat uit het manipuleren van symbolen, en (b) de leerlingen iets hebben om op terug te vallen. Met een

Engelse term kun je die ondergrond beschrijven als 'imagery'; een beeld waar de symbolisering naar verwijst. Dit beeld betreft niet alleen een visueel beeld, maar omvat de hele situatie - in dit geval de situatie, of situaties, van het handelen - met hoeveelheden.

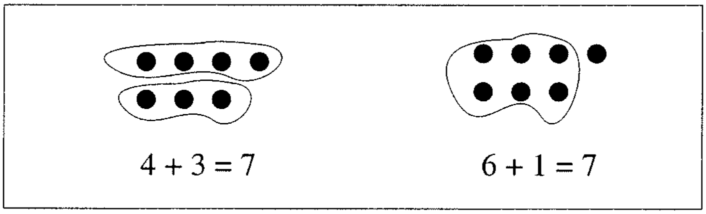
Getallen functioneren in het aanvankelijk rekenen op drie niveaus. Eerst als getallen in de telrij, zeg maar als woorden in een versje. Later ook als benoemde hoeveelheidsgetallen en ten slotte als op zichzelf staande objecten. Kinderen die getallen alleen nog maar als 'telrij'-getallen kennen, weten bijvoorbeeld nog niet dat het laatstgenoemde telwoord bij het tellen een specifieke betekenis heeft. Tellen is voor hen een procedure en het telresultaat heeft voor hen nog geen op-zichzelf-staande betekenis. Op de vraag: 'Hoeveel?', zullen ze reageren met het uitvoeren van de telprocedure, ook als ze de bedoelde hoeveelheid net daarvoor ook al geteld hebben; als je ze het nog een keer vraagt tellen ze weer. Pas na verloop van tijd ontwikkelt zich het besef dat het laatst genoemde getal iets zegt over de getelde hoeveelheid. Zo ontstaan de benoemde getallen. Het symboliseren van hoeveelheden - met blokjes, stippen, turfstreepjes of cijfers - werkt hier als katalysator.
Merk op dat de hoeveelheidsaanduiding in feite het proces van het tellen van die hoeveelheid omvat: 'Zes knikkers', wil zeggen dat als je de knikkers telt, het laatstgenoemde telwoord 'zes' zal zijn. De volgende stap is dat de leerling generaliseert over tal van situaties. Deze generalisaties betreffen niet zozeer het tellen van hoeveelheden als wel relaties tussen hoeveelheden. 'Vier plus drie is zeven' is een generalisatie over tal van situaties waarin vier objecten vermeerderd met drie objecten, zeven objecten oplevert. Zoals gevarieerd tellen het ontwikkelen van benoemde getallen bevordert, zo bevordert het structureren van hoeveelheden het ontwikkelen van een gegeneraliseerd getalbegrip. Het is niet voor niets dat ik als voorbeeld steeds een rekenzin '$4 + 3 = 7$' heb gebruikt.
Het gaat bij dit type getallen om getalrelaties. 'Vier' als op zichzelf staand object ontleent zijn betekenis aan de relaties met andere getallen; relaties als:$4 + 3 = 7$, $4 = 2 + 2$, $4 + 6 = 10$, enzovoort.
Activiteiten die hierbij passen vallen onder wat door Van Gelder (1969) 'het structureren van hoeveelheden' werd genoemd. Ook Van Gelder ging ervan uit dat het structureren van hoeveelheden de basis vormt voor het ontwikkelen van getalrelaties. In de opzet van Van Gelder structureren de leerlingen concrete of voorgestelde hoeveelheden (stippen) op aanwijzingen van de docent. Zo wordt de leerling bijvoorbeeld gevraagd zeven in twee ongelijke groepen te splitsen. De gevonden splitsing wordt vervolgens als getalrelatie genoteerd; bijvoorbeeld: $7 = 4 + 3$. Door gebruik te maken van flitskaarten, of door kort een hoeveelheid stippen op een overhead-scherm

te tonen, kan het initiatief voor de structurering bij de leerlingen worden gelegd (fig.5).



figuur 5: hoeveel stippen?

De vraag is dan: 'Hoeveel stippen zie je?' Met als vervolgvraag: 'Hoe heb je gezien dat het er zeven waren?'



figuur 6: hoe heb je het gezien?

Ook hier speelt het noteren/symboliseren weer een kernrol. Wanneer de leerling vertelt hoe hij of zij gezien heeft dat het er zeven waren, noteert de docent dit als een reken relatie (fig.6).

Via het structureren van hoeveelheden in gevarieerde situaties kunnen deze getalrelaties zich ontwikkelen tot formele generalisaties over relaties tussen hoeveelheden. En als het hiervoor geschetste traject is doorlopen symboliseren de formele notities generalisaties over relaties tussen hoeveelheden.

7 Het rekenrek

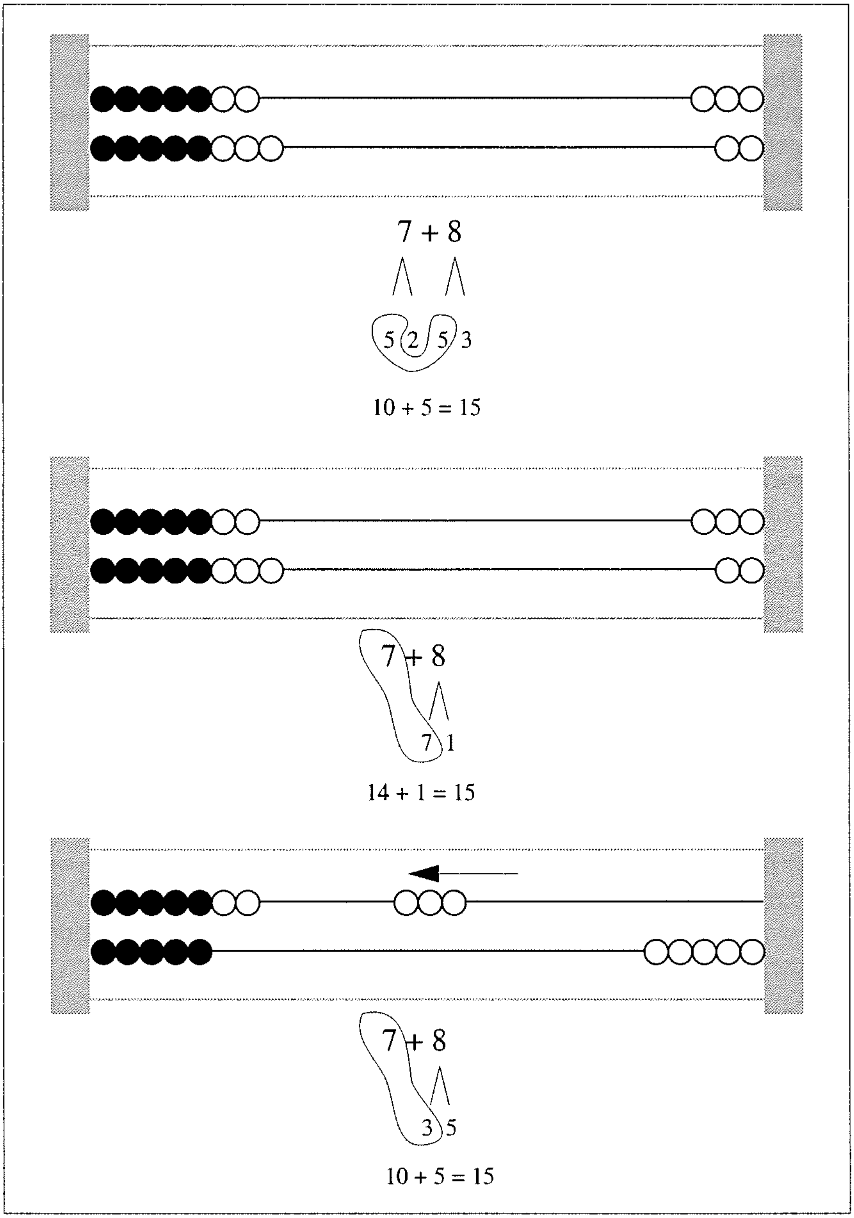
De ontwikkeling van deze getalrelaties kan worden ondersteund door symboliseren. Impliciet werd dit al aangeduid in de voorbeelden van symbolische representaties die ik zojuist gaf: van het werken met blokjes en dergelijke tot en met het werken met cijfersymbolen. Het rekenrek kan een dergelijke rol vervullen in het vervolg. Voor het rekenrek op een zinvolle wijze kan worden geïntroduceerd zullen de leerlingen op zijn minst resultatief moeten kunnen tellen. Dat wil zeggen: getallen kunnen gebruiken als benoemde hoeveelheidsgetallen. Als ons startpunt op dat niveau ligt, lijkt het zinvol steeds uit te gaan van contextopgaven. De leerlingen kunnen de probleemsituatie dan op het rek symboliseren/modelleren en op dit symbolische niveau oplossen. Dit is in feite een symbolisering van een laag niveau; niet wezenlijk anders dan een voorstelling met blokjes of fiches. Het rekenrek voegt daar echter nog iets aan toe door de wijze waarop de kralen zijn gestructureerd. De kralen zijn gegroepeerd in twee keer twee groepen van vijf. De leerlingen kunnen deze structuur gebruiken mits ze zich de overeenkomstige getalrelaties eigen hebben gemaakt. De leerlingen hebben immers niet zoveel aan het feit dat 'acht' op het rekenrek als 'dubbel vier' kan worden weergegeven, als ze niet weten dat '4 + 4 = 8' is. Tot op zekere hoogte kan het rekenrek ook de context zijn om deze getalrelaties te ontwikkelen. Daar zijn echter enkele risico's aan verbonden. In de eerste plaats kan het zo zijn dat routinematig werken met het rekenrek ertoe leidt dat leerlingen schijnbaar onbenoemde getallen gebruiken, terwijl ze feitelijk in termen van benoemde getallen denken. Daar het immers steeds om het aantal rekenrek-kralen gaat, kan met '4 + 4 = 8' worden volstaan, wanneer '4 kralen + 4 kralen = 8 kralen' wordt bedoeld. Bovendien is er strikt gesproken sprake van overgeneralisatie wanneer de leerlingen hun kennis over getalrelaties uitsluitend baseren op kennis van relaties tussen aantallen kralen op het rekenrek. Hier zou zich dezelfde situatie kunnen voordoen als bij Auburn en de werkbladen. De leerling zou het rekenrek kunnen gaan zien als een op zichzelf staand stukje schoolwerkelijkheid dat niets met de alledaagse werkelijkheid te maken heeft.

Om te voorkomen dat het rekenrek tot een werkelijkheid in zichzelf wordt, dienen de representatie en de gerepresenteerde situatie uit elkaar gehouden te worden. In die zin kan het rekenrek ook bijdragen aan het formaliseren. Immers, wat op het rekenrek wordt afgebeeld zijn aantallen, niet de objecten uit het context-verhaal. Wanneer het rekenrek bijvoorbeeld wordt gebruikt om de passagiersverdeling in een dubbeldekkerbus te beschrijven, dan corresponderen de kralen op de twee staven met de aantallen passagiers boven- en onderin de bus. De individuele kralen stellen geen individuele passagiers voor. (Het zou ook wat moeilijk worden wanneer we een willekeurige kraal van de bovenste naar de onderste staaf zouden willen laten verhuizen.) In die zin 'dwingt' het rekenrek tot een zekere formalisering; de situatie wordt verschraald en de aandacht richt zich volledig op het aantalaspect.
De kracht van het rekenrek is mijns inziens dat het de leerlingen een soort kladblaadje biedt voor de meer basale getalrelaties die ze nodig hebben bij het uitrekenen van meer complexe opgaven. In eerste instantie kan dit de kennis zijn dat 7 gelijk is aan 5 + 2, die wordt gecombineerd met de wetenschap dat 5 + 5 = 10 is, om 7 + 7 uit te rekenen. Later kan het de kennis zijn dat 7 + 7 = 14, die wordt ingezet om 7 + 8 uit te rekenen. Het rekenrek is zo beschouwd een symboolsysteem dat de leerling de gelegenheid biedt

getalrelaties die hij of zij al kent te symboliseren. Al werkend met dit symboolsysteem bouwen de leerlingen hun netwerk van getalrelaties verder uit. Op deze manier ontwikkelt het getalbegrip zich tot een vertrouwde omgeving waar de leerling referentiepunten heeft ontwikkeld, handige routes kent, enzovoort (om de omgevingsmetafoor van Greeno (1991) te gebruiken). Dit eindniveau is herkenbaar aan het feit dat de leerling flexibel strategieën als aanvullen of afhalen tot tien, compenseren, één-meer of één minder gebruikt. Ik zou dit echter niet willen beschrijven als het toepassen van strategieën. Toepassen betekent voor mij dat het startpunt van het denken ligt in het gereedschap dat wordt toegepast. Wat ik me hier voorstel is dat de vertrouwdheid met de getalrelaties zo groot is geworden dat de leerlingen direct 'zien' hoe je de opgave handig kunt oplossen. Misschien lijkt het nu alsof ik het 'zien' van getalrelaties, wat ik in het begin van dit verhaal afwees, alsnog omarm. Dat is echter zeker niet het geval. Het punt is namelijk dat dit 'zien' een mentaal 'zien' is, dat is gebaseerd op eigen kennis. Niet het 'zien' van kennis die experts met concrete symbolen of modellen willen 'laten zien'. De leerling is nu zelf een expert geworden en hij/zij 'ziet' deze getalrelaties ook als er geen concrete representaties voorhanden zijn.

De concrete representatie speelt nu een andere rol; het rekenrek fungeert dus als het ware als een soort kladblaadje. Werkend met dit kladblaadje kan de leerling lastige sommen oplossen en daarmee al doende het gebied van de bekende getalrelaties uitbreiden. Het met informele notities beschrijven van de op het rekenrek gehanteerde, of gedachte, oplossingsstrategieën kan dit proces verder ondersteunen (fig.7).
Op deze wijze ontwikkelt de leerling voor het gehele gebied van de getallen tot twintig op zichzelf staande getallen, die hun betekenis enerzijds ontlenen aan het rekenkundige relatienet waar ze deel van uitmaken en die anderzijds de kwantitatieve betekenis hebben van getallen die verwijzen naar hoeveelheden in de werkelijkheid.

Wanneer we het rekenrek vanuit het perspectief van het symboliseren bekijken, dan wordt het gebruikt om de eigen kennis van de leerling te symboliseren, die symbolisering wordt benut om nieuwe problemen op te lossen en het werken met deze symbolisering helpt weer de eigen kennis uit te breiden. Zo kan het werken met het rekenrek een centrale rol vervullen in het eerder aangeduide reflexieve proces van symbool- en begripsontwikkeling. Daarmee kunnen we het gebruik van concreet materiaal binnen het realistische reken-wiskundeonderwijs ook onderscheiden van het gebruik van concreet materiaal in structuralistisch reken-wiskundeonderwijs. Daar wordt wiskundige kennis in het materiaal ingebouwd die de leerlingen vervolgens geacht worden te ontdekken. Het onderscheid tussen realistisch en structuralistisch reken-wiskundenderwijs zit dus niet in het gebruik van concreet materiaal of andere concrete modellen, maar in de rol van dit materiaal in de leergang.



figuur 7: noteren van rekenstrategieën voor 7 + 8

Cruciaal voor dit onderscheid is dat het materiaal wordt bekeken vanuit het gezichtspunt van de leerling: wat betekent deze symbolisering voor hem of voor haar, of preciezer, wat wordt er gerepresenteerd, de eigen kennis van de leerling of de kennis van anderen?

Volgens mij is dit ook een geschikt uitgangspunt om de plaats en rol van materiële en visuele symbolen en modellen binnen het realistische reken-wiskundeonderwijs te doordenken. Neem bijvoorbeeld het kralensnoer dat wordt gebruikt om de lege getallenlijn voor te bereiden. Vanuit een structuralistisch perspectief, zou je zonder enige voorbereiding met het kralensnoer kunnen beginnen om dit te gebruiken om de leerlingen de structuur van de getallen tot honderd te laten ontdekken.
Vanuit een realistisch perspectief zal je willen dat het kralensnoer naar voren komt als een materiële concretisering of symbolisering van een mentale getallenrij waar de leerling al over beschikt. De vraag is dan natuurlijk wat je daaronder wilt verstaan en die vraag is niet zo eenvoudig te beantwoorden. In het hiervoor geschetste reflexieve ontwikkelingsproces wil je het kralensnoer en de lege getallenlijn immers een dubbelrol laten vervullen tussen het symboliseren van reeds aanwezige kennis aan de ene kant, en het uitbouwen van die kennis tot nieuwe kennis aan de andere kant. Dit betekent dat je enerzijds wilt dat er voldoende kennis en inzicht is dat gesymboliseerd kan worden, terwijl je anderzijds wilt dat kralensnoer en getallenlijn worden ingebracht op een moment dat er nog ruimte voor verdere ontwikkeling is. De vraag is dan, wat is voldoende kennis en inzicht? Betekent dit dat de leerlingen met sprongen van tien verder moeten kunnen tellen vanaf een willekeurig getal voordat het kralensnoer wordt aangeboden? En welke betekenis moet dit sprongsgewijze tellen dan hebben? Is het voldoende als de leerlingen vlot met de telrij om kunnen gaan, of moeten de getallen ook een kwantitatieve betekenis hebben?

Ik zou willen afsluiten met de constatering dat het uitgangspunt van symboliseren en modelleren als wiskundige activiteit, waarbij symboolontwikkeling wordt gezien als een proces dat reflexief samenhangt met begripsontwikkeling, een geschikt uitgangspunt biedt voor het doordenken van de rol van symbolen en modellen in realistisch reken-wiskundeonderwijs.

literatuur

Cobb, P. (1991). Reconstructing elementary school mathematics. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 13(2), 3-22.

Cobb, P. (1987). Information-processing Psychology and Mathematics Education - A Constructivist Perspective. *The Journal of Mathematical Behavior*, 6(*1*), 4-40.

Gelder, L. van (1969). *Grondslagen van de rekendidactiek*. Groningen: Wolters-Noordhoff.

Greeno, J.G. (1991). Number sense as situated knowing in a conceptional domain.

Journal for Research in Mathematics Education, 22, 170-218.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Kaput, J.J. (1994). The representational roles of technology in connecting mathematics with authentic experience. In: R. Biehler, R.W. Scholz, R. Sträßer & B. Winkelmann (eds.). *Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 379-397.

Meira, L. (1995). The Micro evolution of mathematical representations in children's activity. *Cognition and Instruction*, 13(2), 269-313.

Whitson, J.A. (1997). Cognition as a semiotic process: From situated mediation to critical reflective trancedence. In: D. Kirschner & J.A. Whitson (eds.). *Situated cognition theory: Social, semiotic, and neurological perspectives*. Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Wilensky, U. (1997). What is normal anyway? Therapy for epistemological anxiety. *Educational Studies in Mathematics*, 33, 171-202.