Met sprongen vooruit

J. Menne
Freudenthal instituut, Universiteit Utrecht

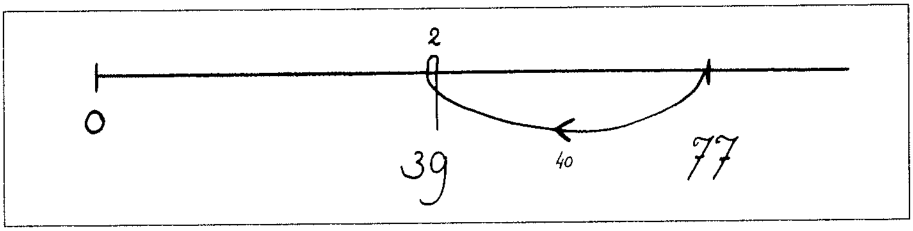
1 Inleiding

Gedurende het schooljaar 1997-'98 nemen negen leerkrachten op zeven basisscholen deel aan het experiment 'Oefenen in de rekenkring'. Dit is een klassikaal, interactief en gedifferentieerd ondersteuningsprogramma voor het rekenen tot 100 en speciaal bedoeld voor zwakke rekenaars in groep 4. Door drie keer in de week gedurende 10 à 15 minuten bepaalde basale vaardigheden te oefenen wordt beoogd dat de leerlingen op den duur meer inzicht in fundamentele vaardigheden krijgen dan wanneer alleen de reguliere reken-wiskundemethode zou zijn gevolgd. Om dit verschil enigzins te kunnen meten, wordt de tijd voor het oefenen in mindering gebracht op de totale rekentijd.
Het oefenen, zoals bedoeld, vraagt enerzijds een stijl van aanpak die je alleen al doende leert. Zo waren vrijwel alle leerkrachten niet gewend om het geven van een beurt vooraf te laten gaan aan het stellen van de vraag en het inlassen van een denkpauze. Ook startten ze de rekenkring aanvankelijk niet met het herhalen van bekend verondersteld oefenrepertoire. Hierdoor konden de kinderen niet warm lopen en ging verworven kennis toch weer verloren. Anderzijds vereist het geven van oefenlessen dat de leerkracht vooraf op de hoogte is welke vaardigheden perspectief bieden voor het latere rekenen tot 100. Wat is meest essentieel om te oefenen? Kun je het rekenen tot 20 verlaten als je 8 + 8 nog niet weet?
In dit artikel wordt aan de hand van knelpunten voor het rekenen tot 100 toegelicht wat op welke manieren efficiënt en doelgericht kan worden geoefend.

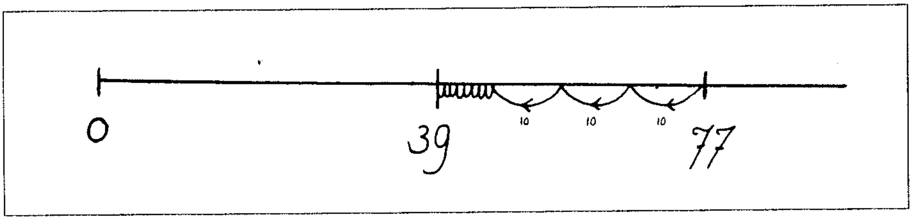
2 Wat moet je weten voor het rekenen tot 100?

In de werkgroep 'Met sprongen vooruit' is gevraagd in kernwoorden antwoord te geven op bovenstaande vraag. Op de flapover verschijnen begrippen als rekenen tot 20, automatiseren, tellen tot 10 en 20, context, de bewerkingen. Ook hebben sommigen gedacht aan 'hebben van getalbegrip'

en 'doorzien van positie-systeem'. Deze laatste twee begrippen blijken echter te alomvattend om vrij precies zicht te krijgen op hetgeen leerlingen zouden moeten kunnen. De vraag wordt daarom specifieker gesteld: Wat moeten kinderen eind groep 4 kunnen opdat ze zich flexibel en handig kunnen bewegen over een lege getallenlijn? Hiermee wordt bedoeld dat ze enerzijds de oplossingswijze laten afhangen van de gegeven getallen en anderzijds in zo weinig mogelijk sprongen naar het antwoord springen.
Zo kun je een som als 78 – 33 oplossen door een grote sprong van 30 terug te nemen. Je komt dan op 48. Nog een hup van 3 terug brengt je op 45. Voor een opgave als 77 – 38 ligt voor de hand eerst 40 terug te springen en dan juist weer 2 heen. Op een lege getallenlijn zien minder en meer verkorte oplossingen voor 77 – 38 er als volgt uit (fig.1 en fig.2).



figuur 1: minst verkort



figuur 2: meest verkort

Hierbinnen bestaan allerlei tussenvormen van verkorting. Je kunt bijvoorbeeld ook eerst een sprong van 30 terug nemen. Vanaf 47 spring je vervolgens met een hup van 7 naar 40 en nog eentje eraf geeft het antwoord 39.

3 Tellen

Een analyse van de berekening in figuur 1 laat zien dat je in ieder geval moet kunnen tellen: één voor één tellen vanaf een willekeurig getal, zowel heen als terug. Leren tellen is één van de eerste doelen waarmee het klassikaal oefeningsrepertoire wordt opgebouwd. Het sluit tevens aan bij wat de kinderen al enigzins kunnen.

Begonnen wordt met het opnoemen van de tientallen, want als je niet weet wat na 27- 28 - 29 - ... komt, kun je steeds maar niet verder.
Kinderen leren de telrij aanvankelijk als een rijmpje. Ze lopen hierbij door de klas en ervaren zo ook iets van het ritme van het tellen en de relatie van getallen tot elkaar. Wanneer je op 80 begint, ga je al snel over de 100. Begin je bij 20 dan duurt dat nog wel even.
Een voorbeeld van een bruikbare tel-oefening is deze: De leerkracht loopt door de groep terwijl ze hardop telt. Op een gegeven moment tikt ze een kind aan. Deze leerling staat op en telt in hetzelfde ritme verder. Wanneer de leerkracht met haar hand een stopteken gebaart, moet de beurt worden doorgegeven. Deze oefening is met name geschikt omdat aan de ene kant het mechanische karakter van tellen wordt benadrukt en aan de andere kant zeer efficiënt wordt geoefend. Nauwelijks gaat tijd verloren aan talige instructie en alle kinderen tellen in hun hoofd mee. Ze kunnen immers elk moment worden aangetikt. Dus ... het is nog spannend ook.[1]
Hoewel je wellicht verwacht dat kinderen de meeste moeite hebben met het overbruggen van een tiental, maken ze ook binnen een tiental geregeld fouten. Fouten binnen het tiental zijn toe te schrijven aan de taal: '74-75-76-78-..'. Het getal 77 ontbreekt en dat heeft zijn reden. Je hoort '6 en 7-tig' en na deze '7' komt toch een '8' van '8 en 7-tig?

4 Mechanische vaardigheden hebben voorrang

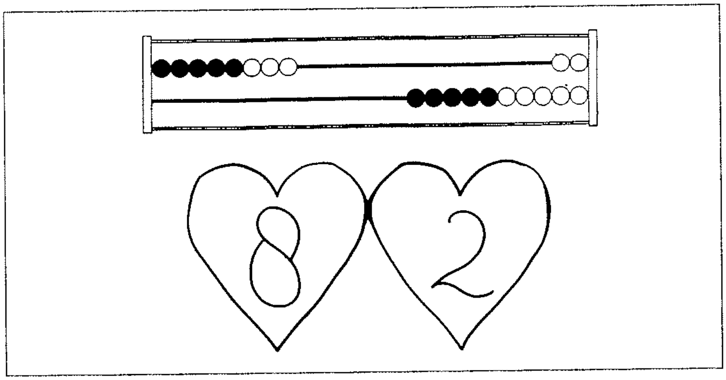
Om beurten opzeggen van delen van de telrij krijgt prioriteit ten opzichte van het oefenen van sommetjes als 4 erbij 5 of 15 eraf 12. Dergelijke opgaven berusten op inzicht, terwijl tellen veel meer een mechanisch karakter heeft. Tellen is daardoor eenvoudiger te leren. Het behelst eigenlijk niets meer dan het verweven van de getallen 1 tot en met 9 met de mooie, ronde getallen. Met uitzondering van 11, 12, 13 en 14. Deze klinken niet systematisch. Voor het oplossen van bijvoorbeeld 4 + 5 moet je gelijk al een aantal vaardigheden combineren. Je kunt aan 4 + 4 denken. Via deze dubbele geredeneerd moet je weten dat 5 eentje meer is dan 4; dat 4 erbij 4 samen 8 is; dat 8 erbij 1 je brengt op 9. Voor zwakke rekenaars is dit een lastig karwei dat veelal leidt tot frustratie en verlies van kostbare oefentijd.
In het oefenprogramma komen in het begin niet alle optellingen en aftrekkingen tot 10 en 20 aan de orde, zodat aandacht kan worden besteed aan het leren van de telrij en de (globale) ligging van getallen. Dit lukt van meetaf aan wel.

5 Verkorten

Toch is het noodzakelijk om over gememoriseerde en geautomatiseerde kennis te beschikken. Tel je alles op je vingers dan is voor de som 77 – 38 niet gelijktijdig bij te benen hoeveel je hebt teruggeteld en waar je bent gebleven. Leerlingen moeten over verkortingen beschikken om uiteindelijk op een meer formeel niveau te kunnen rekenen.
Op weg naar formeel, handig rekenen zijn drie niveaus te onderscheiden (Treffers, 1998). Het eerste niveau betreft tellend rekenen. Hier wordt alles één voor één geteld. Op het tweede niveau wordt gebruik gemaakt van handige verkortingen met behulp van een schema, zoals een lege getallenlijn. Binnen dit structurende rekenen bestaan meer en minder geavanceerde mate van verkortingen (zie fig. 1 en 2). Het laatste niveau tenslotte zou je handig, formeel rekenen kunnen noemen. Een schema is hier afwezig. Op een kladje kunnen enkele getallen als geheugensteuntje worden genoteerd.
Welke verkortingen zijn naar verhouding gemakkelijk en tevens minimaal vereist om enigzins op het tweede niveau te kunnen rekenen? En hoe kan dit worden geoefend?

6 Aanvullen tot 10

Memoriseren van de aanvullingen tot 10 levert veel perspectief voor het verdere rekenen. Bovendien ligt het aantal dicht bij de kinderen. Je hebt immers 10 vingers. De aanvullingen tot 10 worden geïntroduceerd op de bovenste staaf op het rekenrek. Aangezien de paren van 10 zo snel mogelijk op mentaal niveau gekend moeten worden, doen de verliefde harten hun intrede (Menne & Veenman, 1997).



figuur 3: verliefde harten worden afgeleid van het rekenrek

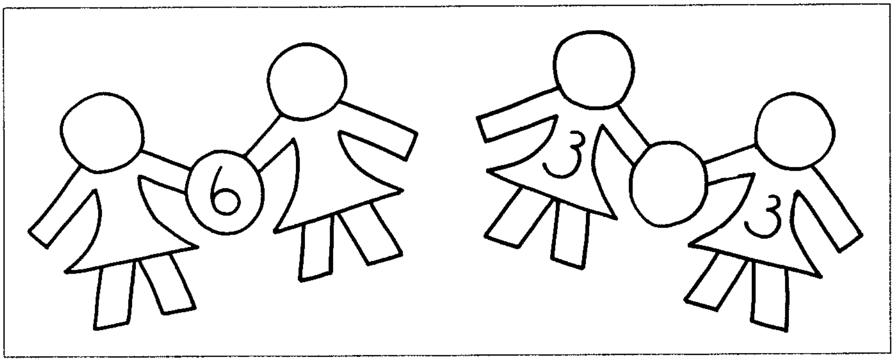
Een belangrijk detail hierbij is om de grootste van de twee op het linkerhart te plaatsen. Ze worden immers afgeleid van het rekenrek en het is gemakkelijker te achterhalen wie verliefd is op 8 dan omgekeerd (fig.3). Natuurlijk is de liefde wederzijds en moeten de kinderen ook weten wie verliefd is op 2.
Begin groep 4 verschijnen de harten ten tonele en worden toegevoegd aan het herhalingsrepertoire. Dit betekent dat ze voor de rest van het jaar zowel interessant moeten blijven voor de leerlingen als functioneel voor het rekenen tot 100. Hieronder zijn voorbeelden gegeven van variaties en toepassingen van 'hart-kennis':

Welke harten heb ik? Leerlingen noemen uit het hoofd alle hartenparen op. Hier worden de splitsingen van 10 geoefend;
Hoeveel is 10 – 6, 3 + 7? De relatie voor sommen is niet voor iedereen direct duidelijk. Deze relatie moet expliciet worden gelegd;
De vrienden van 100: '80 en 20', '50 en 50'.
Verdere toepassingen als 30 – 4, 100 – 80, 100 – 9;
Eigen producties, zoals het maken van familiesommen:
8 + 2, 38 + 2, 98 + 2. 'Wie weet er nog eentje?'

7 Splitsen van getallen onder 10

Zwakke rekenaars hebben veel moeite met het splitsen van getallen. Splitsen is een bruikbare verkorting wanneer je 26 + 7 oplost via het springen naar een tiental. Een start van het splitsen kan worden gevonden in het eerlijk verdelen: evenveel paaseitjes als je broertje. Dit spreekt kinderen aan. Eerlijk verdelen kun je beschouwen als de inverse van dubbelen. Dit is eenvoudiger om mee te beginnen. Primitieve volkeren hebben ze zelfs in hun telsysteem: met 'drie-drie' wordt zes bedoeld (Ifrah, 1987). Net als bij de verliefde harten kun je dubbelen een emotionele lading geven: tweelingen met ieder evenveel stickers, paaseitjes, pepernoten. Ook de tweelingen worden van het rekenrek afgeleid. Als ze weten hoeveel 3 erbij 3 is, kan dit worden teruggevraagd: 'Hoeveel paaseitjes heeft ieder als ze er samen 6 hebben?' Ter controle wordt de tweeling omgedraaid (fig.4).
Bij een fout antwoord wordt het getalbeeld op het rekenrek in herinnering gebracht.
Niet alle dubbelen verdienen evenveel aandacht. Tot het basisrepertoire zouden dubbel 1 tot en met 6 en dubbel 10 moeten behoren. Dubbel 7, 8 en 9 bieden minder perspectief voor het rekenen tot 100. Wie maakt bij 58 + 28 gebruik van 8 + 8? Je kunt dit ook uitrekenen via 58 + 2 → 60 + 6 → 66 of 58 + 10 → 68 – 2 → 66. Als leerlingen gewend zijn te rekenen op een lege getallenlijn is de kans nog kleiner dat dubbel 8 wordt gebruikt.

Het werken op een lege getallenlijn stimuleert de rijgmethode waarbij de getallen zoveel mogelijk heel worden gelaten.



figuur 4: tweelingen: 'Samen 6 dus ieder ...?'

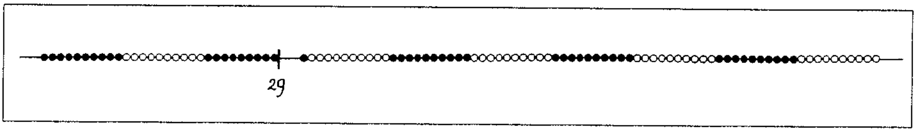
Dubbel- en halveeroefeningen kunnen aan de hand van tweelingen door het jaar heen worden uitgebreid, zoals uit onderstaand voorbeeld blijkt.

Sommetjes als 4 + 4; 8 – 4.
Grote dubbelen: 40+40, 200-100
Verdere toepassingen; 44+4, 140+40
Het spel van de dokter en de half-dove patiënt.
De dokter gelooft niet dat zijn patiënt voor de helft doof is. hij zegt daarom een getal, bijvoorbeeld 22, en laat de patiënt dit herhalen.
De patiënt staat in de hoek van de kamer en zegt: '... 11.'

8 Springen naar getallen

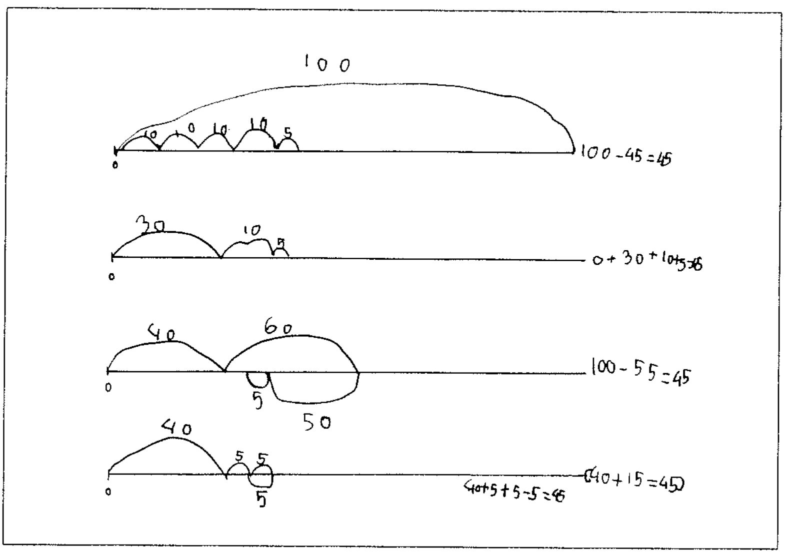
In het verlengde van het tellen, ligt het springen naar getallen. Gezien de structuur van de telrij maken de kinderen sprongen van 10 en huppen van 1. Je kunt dit doen op een kralenketting met 10-structuur, lege getallenlijn of denkbeedlige lijn. Afgesproken wordt dat de denkbeeldige getallenlijn van links naar rechts voor het bord loopt. Iedereen oriënteert zich vanuit hetzelfde oogpunt op die lijn. Dit is van belang bij een oefening als: 'Naar welk getal spring ik?' Een leerling neemt vanaf 0 een sprong, een sprong en nog een sprong en vervolgens een hupje terug. Waar ben ik uitgekomen?' '39'. Het is wel met een '9', maar niet negenen*dertig*. Op de kralenketting kan worden verduidelijkt dat er twintig voorzitten. (fig.5).
Bij het opschuiven van een aantal mogen de kralen slechts een klein stukje van elkaar worden gehaald. In bovenstaande afbeelding is de structuur zo min mogelijk doorbroken, zodat ze bij het aflezen steun hebben aan die ene kraal van dezelfde kleur.

'31 misschien?' Wellicht is deze leerling in de war met de richting. 'Ze sprong vanaf 30 een hupje eraf en niet erbij.' Ook dit kan je laten zien op een kralenketting. Laat degene die '92' oppert, het getal even opschrijven. Ook de kralenketting kan worden gebruikt om nadruk te leggen op het schrijven en uitspreken van getallen: 'We zeggen negentwintig, want we lezen het van rechts naar links.' Wijs tegelijkertijd in deze richting op de negen 'losse' kralen en vervolgens op de twee stukken van tien. 'Marokkanen spreken het ook zo uit.'



figuur 5: naar 29 springen op een kralenketting

Sprongen van 10 en huppen van 1 worden na verloop van tijd uitgebreid met grote huppen van 2 tot en met 9. Dit leidt tot verdere verkortingen. Als je naar 24 springt moet je wel meedelen hoe groot je hup is. Anders kun je niet met zekerheid zeggen waar iemand terecht is gekomen. Overigens, een interessante variatie: 'Waar kun je uitkomen als je na een sprong en nog een sprong een grote hup maakt?'



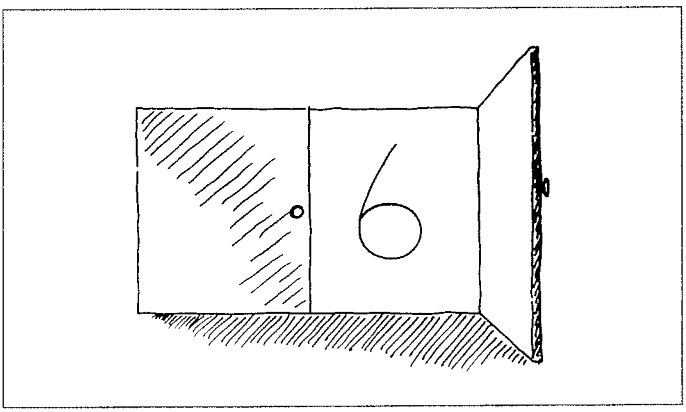
figuur 6: bedenk sommen bij je verschillende sprongen naar 45

Het is bij dit onderdeel de bedoeling alle leerlingen op de meest snelle manier naar getallen leren springen. Je mag vanaf 0 beginnen, maar in sommige gevallen zal vanaf 100 vlugger gaan. Om dit onder de knie krijgen

moeten ze veel oefenen en niet alleen tijdens de oefenlessen. De leerkracht kan hiervoor zorgen door een rage te ontketenen. Als juf plakte ik kaartjes op het raam. Vanaf de speelplaats konden ze zien welke getallen in de volgende oefenles aan de orde zouden komen. Wie wilde, kon alvast oefenen. Ook informeerde ik geregeld of iemand thuis naar een getal had gesprongen. 'Doe eens voor, dan raden wij.'
Vanuit het springen naar getallen wordt expliciet de relatie met sommetjes gelegd. In onderstaand voorbeeld springt Sabir op zoveel mogelijk manieren naar 45.[2] Naast sprongen van 10 ontdekken ze dat je ook grote sprongen hebt van 20, 30, 40, ..., zowel heen als terug. Als hij klaar is schrijft hij zijn sommen ernaast (fig. 6)

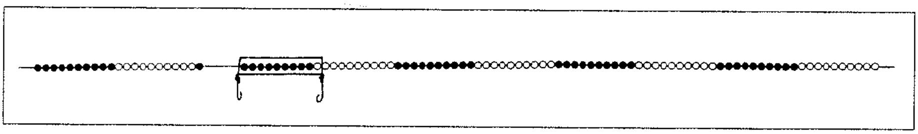
9 Sprong van 10 vanaf een willekeurig getal

In dit stadium kunnen de kinderen zich flexibel bewegen over een lege getallenlijn door het springen van sprongen, grote sprongen, huppen en grote huppen vanaf 0 of 100. Maar het handig oplossen van 78 – -33 levert nog problemen op. Het belangrijkste struikelblok is het niet kunnen nemen van een sprong van 10 vanaf een willekeurig getal. 'Eraf 33' kan worden gelezen als een sprong van 10, 10, 10 en een hup van 3 terug. De sprongen van 10 tel je echter niet zomaar één voor één terug vanaf 78. Zelfs op een lege getallenlijn is dit onoverzichtelijk. In tegenstelling tot de hup van 3. Dit kan nog best tellend worden opgelost.
Nu wordt de meeste winst geboekt wanneer een sprong van 10 vanaf ieder getal kan worden genomen: 78 en een sprong van 10 terug is 68, 78 en een sprong van 10 heen is 88.



figuur 7: hoeveel dagen tot koninginnedag?

Naast het expliciet leren van een sprong van 10 kan aandacht worden besteed aan een meer impliciete vorm: afmaken van auditief systematisch klinkende rijtjes als '22 – 32 – 42 – 52– ...' Hierbij wordt alleen vermeld dat je met 10 tegelijk heen of terug gaat. Uitdagend zijn de rijtjes die in de voortzetting niet klankzuiver zijn.
Bijvoorbeeld: 72 – 82 – 92– ... of 42 – 32 – 22– ... Geschreven zijn ze wel systematisch. Suggereer dat je ze geschreven in je hoofd ziet staan. Hoe ziet het volgende getal eruit? Hoe heet het?
Een andere manier om getallen in gedachten te laten construeren is het raden van een bepaald aantal dagen achter gedeeltelijk gesloten deurtjes (fig.7). Je hoeft hier geen aanloop van getallen te geven. Bovendien wordt in deze oefening aandacht geschonken aan de betekenis van getallen. Stel het is nu 25 maart. Hoeveel dagen en de koningin viert haar verjaardag? Zonder precies te rekenen kun je weten dat 36 wordt bedoeld. Je gebruikt hierbij referenties als: het is nu eind maart, een maand heeft ongeveer dertig dagen en koninginnedag van op de laatste dag volgende maand. Aantallen als 16 en 26 vallen direct af, want het duurt nog ruim een maand en 46 of 56 dagen is weer (veel) te lang.
Expliciet ontdekken van een sprong van tien kan op een kralenketting. Als hulpmiddel fungeert een zogenaamde 10-vanger (zie fig.8).



figuur 8: sprong van 10 vanaf 21 met een 10-vanger

Een 10-vanger kan precies tien kralen vangen, minder kan ook maar dan doe je zijn naam geweld aan. Als je vanaf 21 een sprong van tien wilt maken, kan dat in één keer. Je meet de volgende tien kralen af en schuift ze aan. Laat dit herhaaldelijk doen en kinderen proberen te verwoorden wat hen opvalt. Je vangt steeds één kraal van de volgende kleur. Deze ontdekking is cruciaal, want na enkele keren mét kunnen sommigen ook zonder 10-vanger sprongen van 10 maken.

Een volgende stap is het benoemen van de verkregen aantallen: 'Je hebt 23 kralen opgeschoven. Kun je nu voorspellen hoeveel kralen je krijgt als je er 10 bijschuift?' Het doel is bereikt wanneer ze zonder kralenketting vanaf een willekeurig getal een sprong van 10 maken. Lukt het nog niet dan kan worden teruggegrepen naar de kralenketting. Eventueel wordt zelfs de 10-vanger erbij gehaald. Ook kan geld een rol spelen bij het leren van de 10-sprong. Je hebt *f* 25,- in je spaarpot. Als je een tientje verdient, hoeveel heb je dan? Gaandeweg verschuift de oefening '10-erbij, 10-eraf' naar het herhalingsrepertoire en dient als warming-up voor opgaven als 78 + 11, 78 – 9, 78 – 20, 78 ê 33, 78 + 19 zowel kaal als in een context. De sommen worden uitgerekend op lege getallenlijnen waarbij gebruikt wordt gemaakt van de kennis van de 10-sprong en de relatie tot tien.

10 Tot slot

In het springen over een lege getallenlijn is al het optellen en aftrekken vervat. Ook oefenen kinderen zich in de beginselen van vermenigvuldigen en delen door het maken van herhaalde sprongen. Uiteindelijk is het echter de bedoeling dat de leerlingen los van de getallenlijn geraken. Een lege getallenlijn is slechts een middel.
Naast genoemde activiteiten spelen eigen produkties een rol. Kinderen worden het gehele jaar door aangespoord sommen te maken voor een pratende handpop (Menne, 1997). Bij de bespreking leren ze veel van elkaar. Zelf sommen bedenken waar bijvoorbeeld '10' uitkomt, geeft bij uitstek veel ruimte voor differentiatie, terwijl het toch een klassikale oefening betreft (Treffers, 1997).
Bij het langslopen van de knelpunten voor het rekenen tot 100 is het accent op het 'wat' van het oefenen gelegd. Aangezien effectiviteit en efficiëntie ook afhangen van het 'hoe' gelden er een aantal principes (Menne & Veenman, 1997). Zoals genoemd wordt uitgegaan van een frequentie van 3 maal per week en een tijdsduur van 10 à 15 minuten per keer. Meer mag ook. Tevens speelt de techniek van het oefenen een rol. Wanneer je vergeet om eerst een vraag te stellen en dan pas een naam te noemen, is de kans groot dat de helft zoiets denkt als 'het zal mijn tijd wel duren'. Daarbij is de leerkracht op de hoogte wat kinderen al kunnen. Dit uit zich bijvoorbeeld in een uitstapje naar de vrienden van 1000. Zwakke rekenaars profiteren hiervan mee. Ze ervaren dat een bepaalde systematiek in de telrij zich blijkbaar doorzet na 100. Verder is een plezierige sfeer in de groep vereist. Kinderen moeten zich vrij voelen om een fout te kunnen maken. Tenslotte is er de eigen inbreng van de leerkracht. De manier van oefenen is sterk verbonden met het karakter. Genoemde richtlijnen zullen echter gemeenschappelijke kenmerken zijn om effectieve oefenlessen te kunnen geven.

noten

1 Naar een idee van J. Krijthe van de 'Johannesschool' te Utrecht.
2 Met dank aan basisschool 'de Pijlstaart' te Utrecht.

literatuur

Ifrah, G. (1987). *From one to zero. A universal history of numbers.* New York: Penguin Books.

Menne, J. & I. Veenman (1997). (Re)productief oefenen in de rekenkring. In: C. van den Boer & M. Dolk (eds.), *Naar een balans in de reken-wiskundeles: interactie, oefenen, uitleggen en zelfstandig werken.* Utrecht: Freudenthal instituut, 51-60.

Menne, J. (1997). Op Waku-waku kun je rekenen. *Willem Bartjens,* 16(5), 12-15.

Treffers, A. (1997). Rekenonderwijs naar menselijke maat: Gedifferentieerd en klassikaal: een onjuiste tegenstelling. *Willem Bartjens,* 17(*1*), 5-8.