Van poffertjes tot supersom

- een lijn in tafels -

F. Moerlands
Bekadidact, Utrecht
N. Boswinkel
Freudenthal instituut, Universiteit Utrecht

1 inleiding

Van oudsher is de didactiek van de tafels van vermenigvuldiging een gebied waarin vooral door middel van oefening naar uiteindelijke beheersing wordt gestreefd. Wie kent niet het klassikaal opdreunen van de tafelrijen? Met enig geluk kende je uiteindelijk alle tafels uit het hoofd. Maar o wee als je een tafel niet kende: hoe kon je dan toch achter het antwoord komen? Inmiddels zijn de meeste aanhangers van de realistische theorie het er wel over eens dat oefenen alleen niet voldoende is. Daarvoor is meer nodig: aanbieden van de tafels in reële contexten, inzicht in wat vermenigvuldigen is en het ontwikkelen van handige strategieën zodat je te allen tijde uit een vermenigvuldigopdracht komt, vormen een heel andere insteek. N. Boswinkel en F. Moerlands zijn als auteurs betrokken bij de ontwikkeling van de nieuwe realistische rekenmethode 'Wis en Reken'. Bij deze methode is er weliswaar voor gekozen om een tafelgewijze aanbieding te volgen, maar dat duidt geenszins op een klassieke aanpak. De tafeldidactiek is grondig ingebed in een langlopende leergang rond vermenigvuldigen en delen. Een leergang die is opgezet volgens de realistische uitgangspunten. In dit artikel wordt geschetst hoe oude en nieuwe ideeën zijn samengevoegd en hoe deze didactiek over een langere periode is opgebouwd. Met de tafel van zes als voorbeeld zal aan de hand van leerlingmateriaal, bijbehorende beschrijvingen en leermiddelen een doorkijkje gegeven worden.

2 reconstructie in plaats van reproductie

Bij het opzetten van onze leergangen hebben we ons gebaseerd op de zogenaamde 'reconstructie- didactiek' zoals die in de 'Proeve ...' wordt beschreven. Het gaat om een aantal ontwikkelingsfasen, die zich voor wat betreft de tafels uitstrekken over de groepen 4 en 5. In dit artikel zullen we kort schetsen wat er in groep 4 op het gebied van de tafels zoal aan de orde komt. Vervolgens zullen we aan de hand van de tafel van zes – die begin groep 5 op het programma staat – schetsen hoe daarnaast de tafels ook afzonderlijk aan de orde komen.

3 wat er in groep 4 gebeurt

ontwikkelen van de 'vermenigvuldigtaal'

In groep 4 is er veel aandacht voor de begripsvorming: wat zijn tafels, waar kom je ze tegen, hoe reken je ze uit? De leerlingen gaan in de klas op zoek naar vermenigvuldigstructuren: het scharenblok, de stickervelletjes in het bureau van de juf, doosjes met potloden, enzovoort. In eerste instantie krijgt het beschrijven van de situatie veel aandacht: ik zie vijf rijtjes van vier bloemkolen, vijf zakjes met vier koekjes, vijf groepjes van vier leerlingen. Deze beschrijvingswijze ligt al dicht aan tegen de formele vermenigvuldigtaal: vijf rijtjes van vier bloemkolen kun je beschrijven als vijf keer vier bloemkolen en nog weer later als 5 × 4 bloemkolen. Ook vijf zakjes met vier koekjes kun je beschrijven met vijf keer vier koekjes (5 × 4 koekjes). Als we uiteindelijk aan een kale formele vermenigvuldigsom (5 × 4) toe zijn, kunnen de leerlingen zich hier verschillende situaties bij voorstellen.

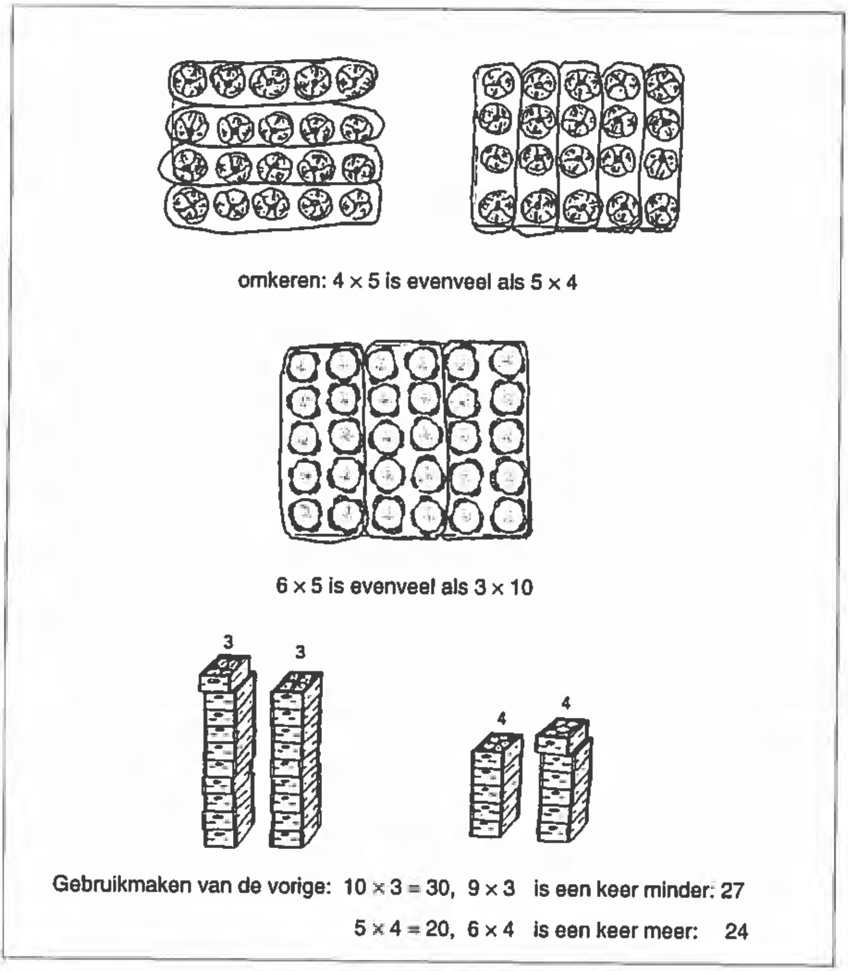
ontwikkelen van oplossingsstrategieën

Naast het ontwikkelen van de vermenigvuldigtaal als een manier om een situatie te beschrijven, wordt in groep 4 aandacht besteed aan het ontwikkelen van (handige) oplossingsmanieren. Wat kinderen spontaan laten zien aan aanpakken wordt langzaam maar zeker verkort tot handigere en veelal snellere oplossingsmanieren. Herhaald optellen (4 + 4 + 4 + 4 + 4) is een van de informele strategieën die leerlingen spontaan gebruiken. De meeste leerlingen komen echter al gauw tot verkortingen. In figuur 1 vindt u enkele voorbeelden:

- omkeren: vier rijtjes van vijf is hetzelfde als vijf rijtjes van vier;
- bundelen tot handige groepjes;
- gebruikmaken van de vorige opdracht: een keer meer of een keer minder.

Dit soort informele verkenningen van strategieën komt bij iedere situatie naar voren en gaandeweg ontdekken de leerlingen de mogelijkheid van het gebruikmaken van gemakkelijke sommen bij het uitrekenen van moeilijke. Bij 'moeilijke sommen' kun je denken aan bijvoorbeeld 7 × 4, maar ook aan 12 × 4. Die laatste kan immers ook via een gekende som opgelost worden:

'10 × 4 en dan nog 4 en 4 erbij.' We schromen niet om dit soort situaties van meet af aan in het programma aan de orde te stellen.



figuur 1: voorbeelden van strategiegebruik

op weg naar automatisering van de tafels van één tot en met vijf

Dat we zoveel aandacht besteden aan de onderbouwing van vermenigvuldiging betekent niet dat er niet geautomatiseerd wordt. In de laatste maanden van groep 4 komen de tafels van één tot en met vijf tafelsgewijs aan de orde en wordt begonnen met een gerichte training ervan. Regelmatig zijn er tempotoetsen om te signaleren hoe ver de automatisering gevorderd is.

4 naar groep 5

opfrissen van wat in groep 4 is geleerd

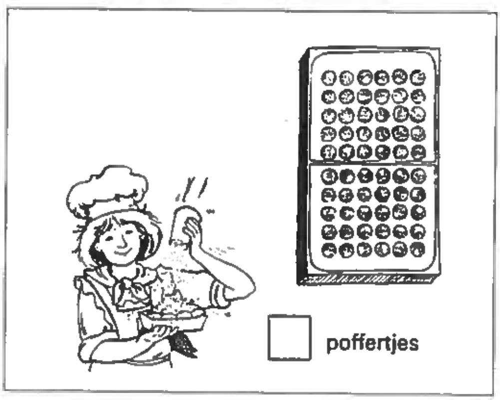
Het begin van groep 5 staat in het teken van het herbewustmaken van vermenigvuldigen als een taal waarmee je uiteenlopende situaties kunt beschrijven. Daarnaast worden de meest basale oplossingsstrategieën opgefrist. In principe zouden de tafels van één tot en met vijf en de tafel van tien eind groep 4 grotendeels geautomatiseerd moeten zijn. In de eerste twee blokken van groep 5 wordt daar echter nog niet echt vanuit gegaan. De ervaring leert dat de echte automatisering pas veel later komt. Training van de tafels is dus nog nodig en vindt dan ook regelmatig plaats in de vorm van korte oefenmomenten. Natuurlijk blijven we hierbij aandacht besteden aan de betekenis van vermenigvuldigen. Als een kind een antwoord niet zo snel weet, wordt het even herinnerd aan de verschillende manieren waarop je de tafels uit kunt rekenen.

5 de tafel van zes als voorbeeld

In groep 5 gaan we vervolgens over op een tafelgewijze aanbieding van de tafels van zes tot en met negen. Omdat de opbouw van de tafelleergang in principe steeds hetzelfde is, zullen we aan de hand van de tafel van zes illustreren hoe de nieuwe tafels aan de orde komen. Verspreid over twee blokken (dus vier weken onderwijs) ziet het er ongeveer als volgt uit.

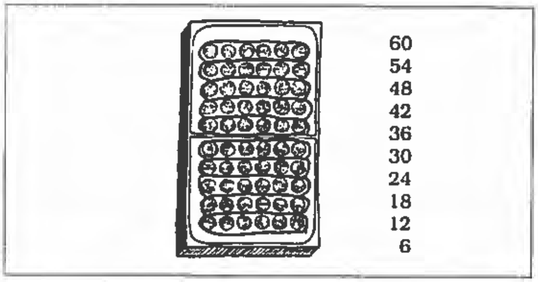
een concrete context als uitgangspunt

Aan de hand van een concrete context, die duidelijk maakt wat bedoeld wordt, wordt de nieuwe tafel geïntroduceerd.



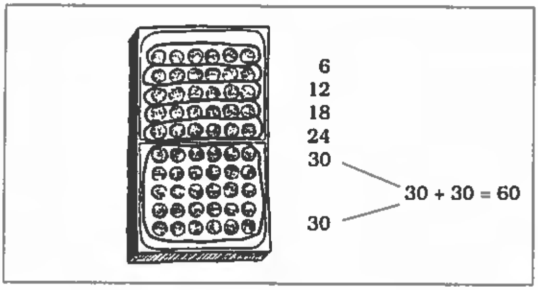
figuur 2: hoeveel poffertjes op de plaat?

Bij de tafel van zes is de centrale context het bakken van poffertjes op een poffertjesplaat (fig.2). De vraag aan de leerlingen is om uit te zoeken hoeveel poffertjes op de plaat passen. Doordat de poffertjesplaat een rechthoeksstructuur heeft, zijn in principe alle denkbare strategieën mogelijk (fig.3 tot en met fig.7).



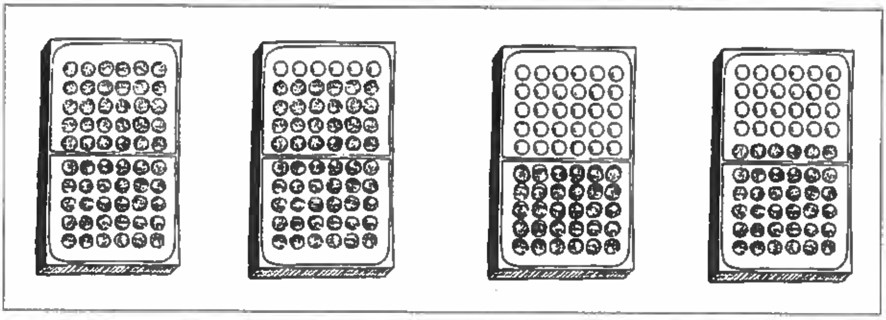
figuur 3: herhaald optellen met sprongen van zes

De bovenste helft vaststellen door middel van herhaald optellen (dertig poffertjes). Op de onderste helft passen precies evenveel poffertjes, dus samen kunnen er 30 + 30 = 60 poffertjes op de plaat (fig. 4).



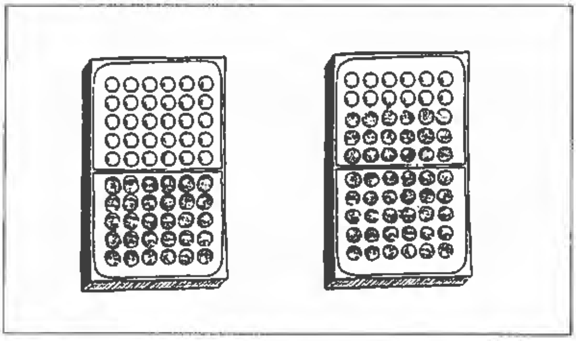
figuur 4: de helft is dertig, een hele bakplaat dus 30 + 30 = 60

Vervolgens zoeken de leerlingen van de overige platen uit hoeveel poffertjes er op liggen.



figuur 5 en 6: een keer minder, een keer meer

De volgorde van de platen is steeds zo gekozen, dat er gebruik gemaakt kan worden van de vorige (fig.5 en fig.6).
Verder kunnen de leerlingen gebruikmaken van de volgende strategieën:
- verdubbelen: op twee rijtjes liggen twaalf poffertjes, dus op vier rijen 12 + 12 = 24;
- halveren: in een volle pan kunnen zestig poffertjes, dus op de helft dertig;
- gebruikmaken van een bekende som (bijvoorbeeld 5 × ..): 8 × 6 weet ik niet, 5 × 6 wel, dat is dertig, dan moet er nog 3 × 6 bij, dus het antwoord is 30 + 18 = 48 (fig.7)



figuur 7: 5 × 6 = 30, 8 × 6 is 3 × 6 meer, dus 30 + 18 = 48

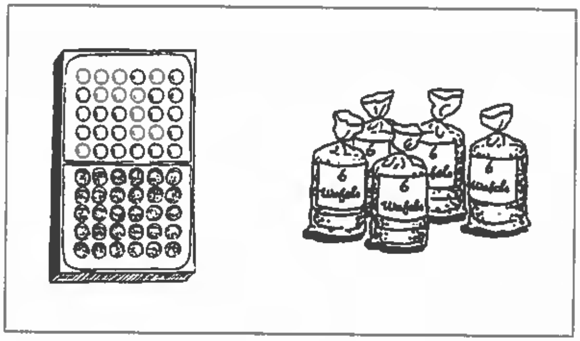
De leerlingen kunnen steeds gebruikmaken van de concrete voorstelling van de poffertjesplaat als ondersteuning. Door de dikke streep in het midden wordt met name de helft (5 ×) als ankerpunt benadrukt en daarmee ook de strategieën 'eentje meer' en 'eentje minder'.

uitbreiding naar andere contexten

In een volgende les wordt de centrale context verbreed naar andere situaties. De leerlingen krijgen plaatjes voorgelegd, waarvan ze moeten bepalen 'hoeveel het er zijn'. In ieder plaatje zit een vermenigvuldiging uit de tafel van 6 verweven.

De manier waarop de vermenigvuldiging wordt opgelost, kan in principe nog simpelweg door één voor één te tellen. Er wordt echter wel een link gelegd naar de poffertjesplaten van de vorige activiteit: vijf rijtjes met zes puzzelstukjes is evenveel als vijf rijtjes met zes poffertjes, en dat was dertig. In dezelfde les krijgen de leerlingen een werkblad voorgelegd waarin de situaties niet concreet telbaar zijn.
Waar het dan om gaat, is enerzijds dat ze er de vermenigvuldiging in herkennen, dus bijvoorbeeld vijf zakjes met zes wafels is te beschrijven met de som 5 × 6.
Bovendien zijn alle opdrachten van het tweede werkblad identiek aan die

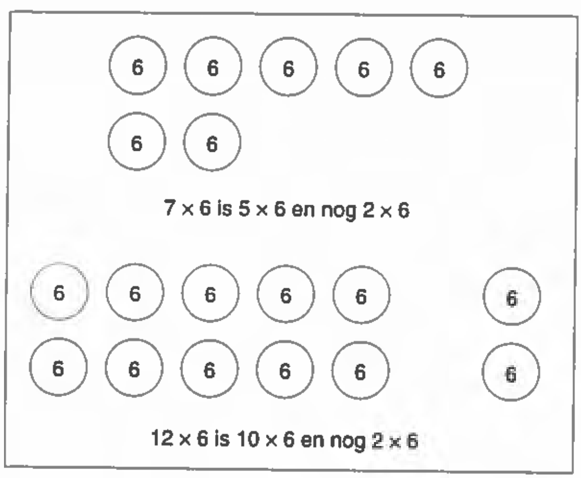
van het eerste werkblad (fig.8). De leerling wordt daarmee op het spoor gezet van de overeenkomst tussen de situaties.



figuur 8: vijf zakjes met zes wafels is evenveel als vijf rijtjes met zes poffertjes en dat is dertig, dus zijn het dertig wafels

situaties vertalen naar vermenigvuldigsommen en die oplossen

De poffertjes op de plaat zijn nog een voor een te tellen. Om leerlingen die dit telgedrag vertonen te stimuleren om de opgaven op een hoger niveau aan te pakken komen steeds vaker abstractere voorstellingen aan de orde (fig.9).



figuur 9

Bijvoorbeeld: de juf zet bordjes met een 'kinderportie' poffertjes klaar. Op ieder bordje gaan zes poffertjes. Hoeveel poffertjes heb ik als ik zeven bordjes klaarzet? En als ik er negen klaarzet? En twaalf?

De leerlingen leren hier om de situatie te beschrijven met de vermenigvuldigsom. In het oplossen ervan leren ze gebruik te maken van de verschillende strategieën die ze geleerd hebben. Ook het uitschrijven van de springrij valt onder deze activiteiten. In deze voorstellingsvorm worden met name de buursommen en de verdubbelingsregel uitgelokt.

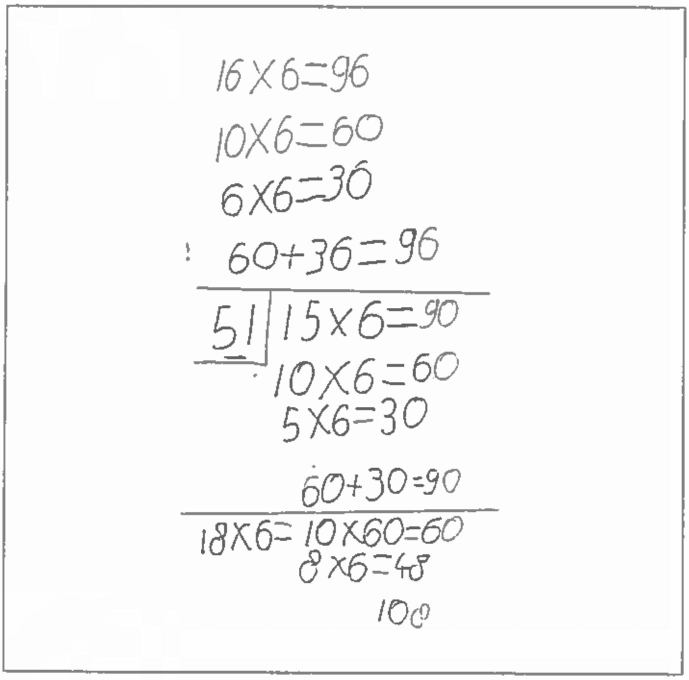
Een laatste sluitstuk hiervan vormt het rekenen met somparen:

5 × 6 = 30	of	6 × 6 = 36
dus		want
6 × 6 = 36		5 × 6 = 30

handig oplossen van kale vermenigvuldigsommen

Het voorgaande heeft uiteraard uitgemond in kale tafelsommen. Doordat het op deze manier is opgebouwd zijn de sommen echter niet meer zo 'kaal', maar kunnen de leerlingen er zich een voorstelling bij maken. De vermenigvuldigsommen zijn concreet onderbouwd en de leerlingen kunnen bij het uitrekenen ervan terugvallen op een concreet voorstelbare situatie.

Stel dat een leerling de som 7 × 6 uit moet rekenen en het antwoord niet weet. Door de voorgaande concrete invulling kan het denken aan bijvoorbeeld een halfgevulde poffertjesplaat (5 × 6), en daar nog 2 × 6 aan toevoegen.



figuur 10

We leren de leerlingen van meet af aan om hun oplossingsmanier overzichtelijk te noteren in een zogenaamd 'regelgewijs handelingsverslag'. Hierdoor houden ze overzicht op hun berekening. Een voorbeeld hiervan vindt u in figuur 10.

oefenen

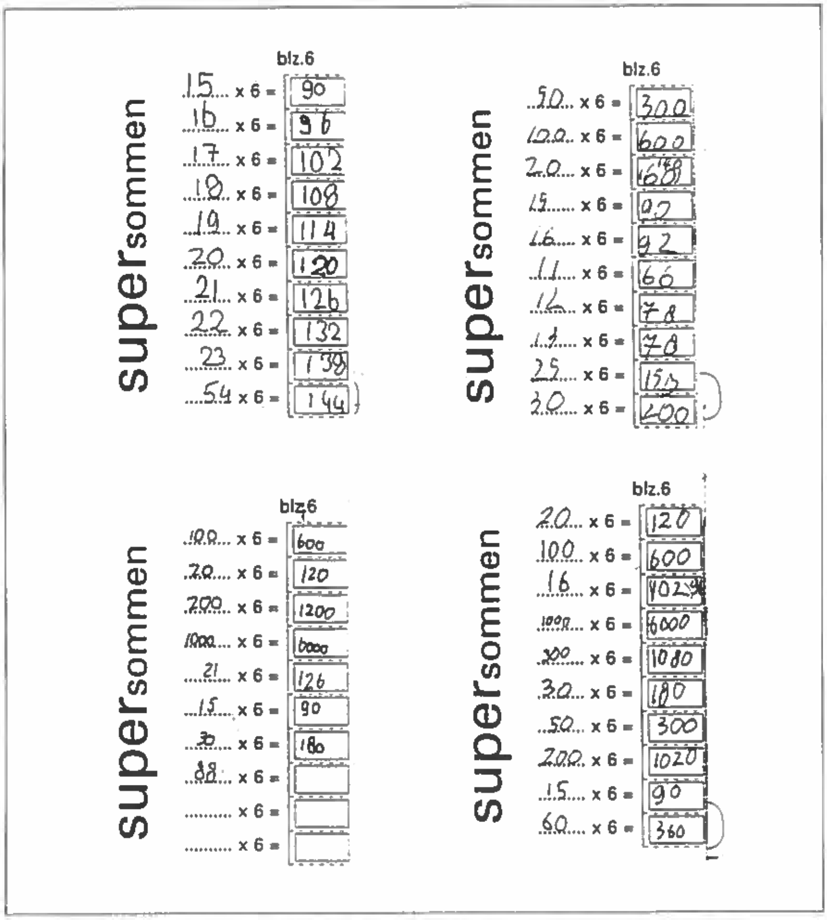
We besteden veel tijd aan de begripsvorming, maar dat wil niet zeggen dat er niet geoefend wordt. Bij de introductie van de tafel speelt het oefenen nog geen belangrijke rol, maar in latere blokken komt dit structureel aan de orde. Het automatiseren vloeit op een natuurlijke manier voort uit het zoeken naar inzichtelijke en efficiënte aanpakken. Oefenen betekent niet het 'opdreunen' van de tafelrij.
De tafels kunnen bijvoorbeeld 'droog' geoefend worden door gebruik te maken van tafelkaartjes. De leerkracht laat steeds een tafelsom zien en vraagt de leerling naar het antwoord. Als het erg lang duurt voor een leerling met het antwoord komt wordt de betreffende som op een apart stapeltje gelegd. Zo ontstaat een stapeltje met makkelijke en een stapeltje met moeilijke sommen. De moeilijke sommen worden nog eens onder de loupe genomen: wat is er moeilijk aan? Hoe kun je achter het antwoord komen? In een volgende les kan worden begonnen met het stapeltje makkelijke sommen en kan worden ingezoomd op de moeilijke. In de vorm van regelmatig terugkerende korte oefenmomenten komen de tafels aan de orde. Gaandeweg komen de leerlingen steeds meer tot verkorting en ten slotte tot automatisering van de tafel.
Oefenen kan ook betekenen dat een strategie geoefend wordt. Regelmatig zijn oefeningen ingevoegd waarbij een specifieke strategie wordt geoefend. Bijvoorbeeld 'eentje minder/eentje meer':

$10 \times 6 = 60$, dus $9 \times 6 = 54$
$5 \times 6 = 30$, dus $6 \times 6 = 36$

tafelboekje[1]

Naast de voorgaande oefenvormen speelt het tafelboekje een belangrijke rol. Per tafel is er steeds een nieuw tafelboekje. Het boekje begint met de centrale context, in dit geval de poffertjesplaat. Vervolgens is er een bladzijde met modellen, die de leerlingen kunnen gebruiken bij het uitrekenen van een som. Daarna wordt de tafelrij op volgorde en door elkaar aangeboden. Doordat de antwoorden van de tafelrij omvouwbaar zijn, biedt het tafelboekje uitstekende mogelijkheden tot speels oefenen.
Een extra uitbreiding van de tafel zijn de zogenaamde 'supersommen'. Dit zijn sommen die boven de 10 × uitgaan. Tot grote verrassing van veel leerkrachten blijken de meeste leerlingen hier al snel toe in staat te zijn. Terwijl ze een som als 8 × 6 nog niet geautomatiseerd hebben, blijken ze al

wel in staat om een som als 12 × 6 op een kladblaadje uit te rekenen. In figuur 11 vindt u enkele voorbeelden van wat leerlingen zoal aan 'supersommen' laten zien.



figuur 11

Hier manifesteert zich de meerwaarde van het investeren in begrip en inzicht en pas daarna in gememoriseerde kennis. Strategieën die de leerlingen onder de 10 × hebben leren toepassen, weten ze ook boven de 10 × te gebruiken. Door in de klassikale aanbieding van de 'supersom' ook aandacht te besteden aan de manier waarop je dat kunt uitrekenen, komen leerlingen ook met oplossingen zoals in figuur 11.

Ten slotte willen we erop wijzen dat je door middel van 'supersommen' eigenlijk ook op een subtiele manier bezig bent met het oefenen van de lagere tafels. Immers: als een leerling achter elkaar 12 × 6, 15 × 6, 18 × 6 uitrekent via 10 × 6 en .. × 6, oefen je in feite de tafels 10 × 6, 2 × 6, 5 × 6 en 8 × 6.

het verschil tussen groep 4 en groep 5

In de voorgaande beschrijving van de tafelleergang lijkt de aanpak in groep 4 en 5 identiek te zijn. Dit is echter schijn. Het onderscheid is het best te omschrijven als een verschil in tempo. In groep 4 ligt de nadruk op het ontwikkelen van inzicht in wat vermenigvuldigen is: vijf keer een rijtje van vier bloemkolen kun je omschrijven als 5 x 4. Ook vijf zakjes met vier knikkers kun je met deze som beschrijven. Een groot deel van de tijd in groep 4 wordt besteed aan het kennismaken met de verschillende verschijningsvormen van tafels en het gebruikmaken van de vermenigvuldigtaal. Daarnaast ontwikkelen de leerlingen een aantal handige strategieen om de tafelsommen uit te rekenen. Zo is aan het eind van groep 4 een stevige basis gelegd, waar we in groep 5 een beroep op kunnen doen. De nieuwe tafels kunnen in een veel hoger tempo aangeboden worden. Immers: hoe je een situatie kunt beschrijven met een vermenigvuldigsom is bekend. Dat je strategieen kunt gebruiken, wat mogelijke handige strategieen zijn, waarom die strategie handig is dat weten we ook. Strategieën hoeven niet meer ontwikkeld te worden, maar reeds gekende strategieën kunnen toegepast worden. Hierdoor kunnen leerlingen al in een vroeg stadium ook opdrachten aan die op het eerste gezicht veel te moeilijk lijken (denk bijvoorbeeld aan de supersommen).

6 ten slotte

In dit artikel hebben we een korte impressie gegeven van de manier waarop tafels in de methode Wis en Reken aan de orde komen. Veel nadruk op begrip en inzicht en pas daarna gerichte automatiseringsoefeningen leiden ertoe dat de leerlingen al vroeg vrij ingewikkelde opgaven kunnen oplossen. Voorgaande is echter geen lineair proces. Het is heel goed mogelijk dat de leerlingen wel al 15 × 6 kunnen uitrekenen, maar de som 7 × 6 nog niet geautomatiseerd hebben. Dit is een van de gevolgen van een integratie tussen de goede aspecten van de oude en nieuwe ideeën met betrekking tot tafels.

noot

1 Voor een uitgebreidere beschrijving van het tafelboekje verwijzen we naar: Buijs, K. (1996). Kijkje in de klas. De tafel van 5. *Willem Bartjens*, 16(2), 30-32.