Is dat al wiskunde? Is dat nog wiskunde?

F. van der Blij
Werkgroep Bolleboos

1 inleiding

Tijdens de slotlezing van de Panama najaarsconferentie van 1996 bespraken we enkele onderwerpen die het midden houden tussen 'kinderspel' en 'echte wiskunde'. De vraag is of ze voor degenen die het als kinderspel beleven toch ook wiskundige activiteiten omvatten.
Bij sommige mensen bestaan misverstanden over de vraag waar iets ophoudt wiskunde te zijn en gewoon gezond verstand wordt (alsof wiskunde te maken zou hebben met ongezond verstand!). Wellicht is de vraag: 'Is dat wiskunde?', niet zinnig, maar moeten we de vraag stellen: 'Zijn dat wiskundige activiteiten?' Niet dat zo'n verandering veel bijdraagt tot de beantwoording van de vraag.

In de presentatie in Noordwijkerhout kwamen twee voorbeelden aan de orde.
Het eerste vraagt enige wiskundige voorkennis, die ik in oude 'Wiskobastermen' samenvat onder 'klokrekenen' en 'het stadsplan'. In wiskundige termen 'modulo-rekenen' en 'Cartesische coördinaten'. Technisch gesproken worden in het tweede onderdeel van het eerste voorbeeld sinus en cosinus gebruikt, maar voor een goed begrip van de gestelde problemen is de kennis van deze functies niet nodig.
Het tweede onderwerp gebruikt klassieke speelobjecten van kleuters, stukjes uit de mozaïekdoos en kan leiden tot activiteiten die variëren van het niveau van de leerling uit groep 3 van de basisschool tot de leerling uit klas 6 van het vwo.
Het eerste onderwerp gebruikt de computer, twee programma's in Q-basic, in zestien kleuren. Het kan zo geïnterpreteerd worden dat alleen met natuurlijke getallen en delen met rest gewerkt wordt. Iets fraaier is het als ook gehele negatieve getallen gebruikt worden, waarbij de klassieke regels voor vermenigvuldiging gebruikt moeten worden.
We willen op het computerscherm 'mooie' plaatjes genereren met zo eenvoudig mogelijke programma's. Leerlingen met enige spelervaring met de

computer kunnen misschien wel enig begrip van het programma krijgen. Met het oog daarop zijn bepaalde standaardprocedures uit de informatica vermeden om een zo overzichtelijk mogelijk programma te krijgen. Wellicht is het voor leerlingen van groep 7 en 8 al een echte wiskundige activiteit.

2 computerspel 1

Laten we beginnen met de variant die alleen natuurlijke getallen gebruikt. In het vlak tekenen we een x- en y-as, met gehele, niet-negatieve coördinaten (x, y). Natuurlijk kan men ook woordvariabelen hiervoor invoeren 'x' wordt bij voorbeeld '*naar rechts*' en 'y' wordt '*naar boven*'. Deze zou men dan na enig gebruik kunnen afkorten tot 'r' en 'b' en er mee rekenen zoals men rekent met 'oppervlakte rechthoek is $l \times b$'. Eenvoudigheidshalve benutten we hier toch maar de 'x' en de 'y'.
We beschouwen nu een punt in het vlak met gehele coördinaten (x, y) en berekenen $x^2 + y^2 = n$.
We kiezen een vast getal d als modulus, dat wil zeggen we vervangen ieder getal door zijn rest r bij deling door d. Dus is r een getal tussen 0 en $d - 1$, de grenzen ingesloten.
We kunnen dit gebied in twee stukken verdelen, de getallen tussen 0 en $\frac{1}{2}(d - 1)$ en de getallen tussen $\frac{1}{2}(d - 1)$ en $d - 1$. Valt r in het eerste stuk dan maken we rond het punt (x, y) een zwart blokje; valt r in het tweede stuk dan maken we rond (x, y) een wit blokje. We maken de blokjes zo groot dat ze precies bij elkaar aansluiten.
Laten we x en y alle getallen tussen 0 en een getal t, dat we groter dan d kiezen doorlopen, dan ontstaat een patroon van $(t + 1) \times (t + 1)$ zwarte en witte blokjes. Dit is eenvoudig op het computerscherm te realiseren.
Kozen we t flink wat groter dan d zelfs gelijk aan twee, drie of vier maal d dan zien we een patroon zich herhalen, naast elkaar en onder elkaar. Kunnen we dit begrijpen?
Als we x en/of y met d vermeerderen, wordt n met een veelvoud van d vermeerderd en dus blijft de rest r van n bij deling door d gelijk.
Kijken we nu naar *één* patroon door voor t een getal iets groter dan d te kiezen. Ook nu zien we nog regelmatigheden, en vooral symmetrie in het patroon.

Als we met negatieve en positieve coördinaten werken vinden we dat (0,0) een centrum van symmetrie is. Dat is begrijpelijk; de acht verschillende punten (x, y) en (y, x) geven dezelfde waarde voor n en dus ook dezelfde waarde voor r. (In speciale gevallen zijn het echter geen acht verschillende

punten.) Dit feit verklaart de symmetrie van het blokjespatroon. Er zijn zowel horizontale als verticale symmetrie-assen, maar ook onder hoeken van 45 graden vinden we symmetrie-assen. Verder weten we dat $x^2 + y^2$ het kwadraat van de afstand van het punt (x, y) tot de oorsprong is; er is dus ook cirkel-symmetrie.
Werken we met alleen natuurlijke getallen dan hebben we hetzelfde patroon alleen verschoven.
Enkele boeiende vragen, die wel buiten het bereik van de leerlingen liggen, zijn eenvoudig op te roepen:

- Is er ongeveer evenveel wit als zwart in de figuur?
- Maakt het veel verschil of d een even of een oneven getal is?
- Als we voor d een priemgetal kiezen, geeft dat nog iets bijzonders?

We zouden bijvoorbeeld voor $d = 4$ of $d = 5$ alles eens met de hand kunnen berekenen en patronen zien ontstaan.
(Bij oneven waarden van d is $\frac{1}{2}(d - 1)$ een geheel getal en moeten we kiezen of we dit bij de eerste helft of de tweede helft rekenen.)
In figuur 1 ziet u de resultaten voor $d = 4$ en $d = 5$.

0	0	1	0	1	0
3	1	2	1	2	1
2	0	1	0	1	0
1	1	2	1	2	1
0	0	1	0	1	0
	0	1	2	3	0

$d = 4$

0	0	1	4	4	1	0
4	1	2	0	0	2	1
3	4	0	3	3	0	4
2	4	0	3	3	0	4
1	1	2	0	0	2	1
0	0	1	4	4	1	0
	0	1	2	3	4	0

$d = 5$

figuur 1

Het schema bij $d = 5$ brengt ons op het idee de kleurenmonitor te gebruiken. We kunnen aan 0, 1, 2, 3 en 4 verschillende kleuren toekennen en zo de symmetrie nog wat duidelijker laten zien.

Na deze eenvoudig met de hand te construeren voorbeelden zetten we computer aan het werk. Het verdient aanbeveling eerst het getal d niet te groot te kiezen; voor getallen d groter dan honderd zijn meer dan tienduizend berekeningen nodig en dat kost op de computer soms iets wat meer tijd. Kiezen we d bijvoorbeeld tussen de twintig en veertig dan kunnen we

het interval tussen 0 en $d - 1$ in zestien gelijke delen verdelen. Aan ieder stukje kennen we een kleur toe. De blokjes kunnen dus zestien verschillende kleuren krijgen. Er ontstaan nu boeiende patronen. Verschillende variaties liggen voor de hand.
We kunnen $x^2 + y^2$ vervangen door $x^2 + y^2 + xy$ dan gaat de cirkelsymmetrie verloren, maar we zien toch wel regelmaat.
Enkele leerlingen zullen misschien durven raden wat er gebeurt als we $x^2 + y^2$ daarna vervangen door $x^2 + y^2 - xy$. Is dat raden of al wiskundig inzicht?
Nog spannender wordt het als we $x^2 + y^2 + 2xy$ proberen! Het hele patroon ontaardt in enkel rechte lijnen. Natuurlijk hadden wij dat kunnen weten, wij weten immers $x^2 + y^2 + 2xy = (x + y)^2$, en dat verklaart alles. Ook is het boeiend $x^2 + y^2$ eens te vervangen door xy. We zien éénkleurige horizontale en verticale balken ontstaan. Speciaal duidelijk als we nu t weer eens iets groter dan bijvoorbeeld drie maal d kiezen. Een raadsel? Nee want 0 maal y heeft voor alle waarden van y dezelfde waarden. Zo is ook x maal 0 voor alle waarden van x gelijk aan 0.

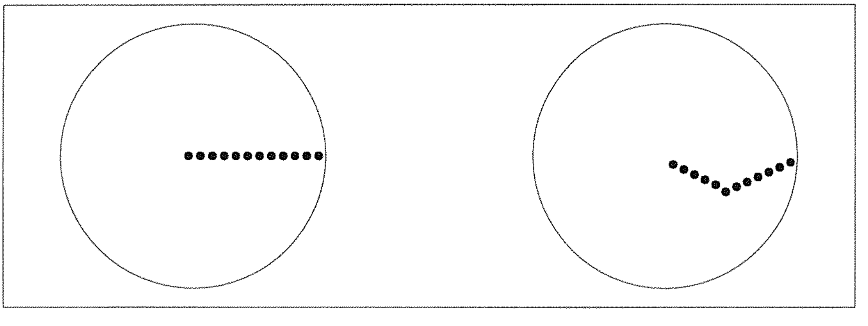
```
'blokpatroon
'kies modulo getal
d = 13
'kies grootte patroon
t = 15
'kies aantal kleuren
k = 5
'kies natuurlijke of andere, c=0 zijn natuurlijke, c=1 ook negatieve getallen
c = 1
'blokpatroon
'einde invoer gegevens
SCREEN 12
WINDOW (-ct, -ct)-(t, t)
FOR y = -ct TO t
FOR x = -ct TO t
n = x ^ 2 + y ^ 2
IF n >= 0 THEN r = n MOD d
IF n < 0 THEN r = (n MOD d) + d
FOR f = 0 TO k - 1
w = f * 15 MOD 16
g = f * d / k
u = x - .5
v = y - .5
IF r >= g AND z < (g + d / k) THEN LINE (u, v)-(u + 1, v + 1), w, BF
NEXT
NEXT
NEXT
END
```

figuur 2

Hoe zal het plaatje van $x^2 - y^2$ er uitzien? Hier wordt het al echte brugklas wiskunde! Men zou zelfs naar $x^4 + y^4$ en $x^3 + y^3$ kunnen kijken. In figuur 2 geef ik in *Q*-basic een schets van een programma dat deze patronen voortbrengt. De keuzen voor *d* en *t* en het aantal kleuren zijn duidelijk. De keuze $w = 0$ gebruikt alleen natuurlijke getallen, de keuze $w = 1$ geeft het gebruik van gehele, positieve en negatieve getallen weer. Het is duidelijk dat in de regel $n = x^2 + y^2$ variaties kunnen worden aangebracht.[1]

3 computerspel 2

Een tweede voorbeeld van een computerprogramma dat enig onderzoek mogelijk maakt, maar voor de leerlingen wel iets minder doorzichtig is, heet 'koffieroeren'.
Het is een zeer onrealistisch model van het roeren van enkele druppeltjes room in een kop koffie. We gaan uit van een cirkelvormige kop gevuld met koffie. We noemen het middelpunt van het koffie-oppervlak *M*. We brengen een rijtje room-druppeltjes aan vanaf *M* tot aan de rand van de kop. Het roeren gaat op een erg simpele manier. Ieder druppeltje gaat door het roeren een cirkelbaan om het middelpunt *M* beschrijven. De druppeltjes dicht bij het middelpunt lopen vrij langzaam op hun baan. De druppeltjes dicht bij de rand evenzo. De druppels ongeveer midden tussen middelpunt en rand hebben de grootste snelheid. Na een bepaald tijdsverloop, dat we een 'roerseconde' zullen noemen, maken we een plaatje van de stand van de druppels.



figuur 3: beginstand (links) en stand na één seconde (rechts)

Figuur 3 geeft de beginstand en de stand na één roerseconde. Het programma laat met korte tussenpozen de stand na één, twee, drie ... roerseconden zien. In het begin moeten we het aantal druppels kiezen, bijvoorbeeld $m = 40$. Evenzo na hoeveel roerseconden we het programma willen stoppen. Deze variabele heet n. Zoals te verwachten was, is de toestand na een aantal roerseconden vrij chaotisch geworden. Maar na heel veel roerseconden treden regelmatigheden op. Die zijn ontstaan door de in het programma gekozen speciale snelheden.

```
'koffieroeren
'aantal keren
n = 20
'aantal druppeltjes
m = 40
'hoe grote stappen?
a = 1
'druppels laten liggen? f=0 nee, f=1, ja
f = 0
'verbinden? 1 is ja, 0 is nee
c = 0
'kleur? d=0 geeft enkel wit, d=1 geeft kleur
d = 1
'einde opdrachten

FOR k = 0 TO n
IF f = 0 THEN CLS
SCREEN 12
WINDOW (–1.1, –1.1t)–(1.1, 1.1)
FOR s = 0 TO 1 STEP (1 / m)
r = s * (1 – s)
b = 6.283184 / 5
x = .75 * s * COS(r * k * b * a)
y = –s * SIN (r * k * b * a)
u = ((s * m) MOD 15) + 1
IF d = 0 THEN g = 15
IF d = 1 THEN g = u
IF c = 1 THEN LINE –(x, y), g
IF c = 0 THEN LINE (x – .03, y – .03)–(x, y), g, BF
NEXT s
IF c = 1 THEN LINE –(.75, 0), g
IF f = 0 THEN PRINT "druk op een toets om verder te gaan"
IF f = 1 AND k = 0 THEN PRINT "druk op een toets om verder te gaan"
SLEEP 10
NEXT k
END
```

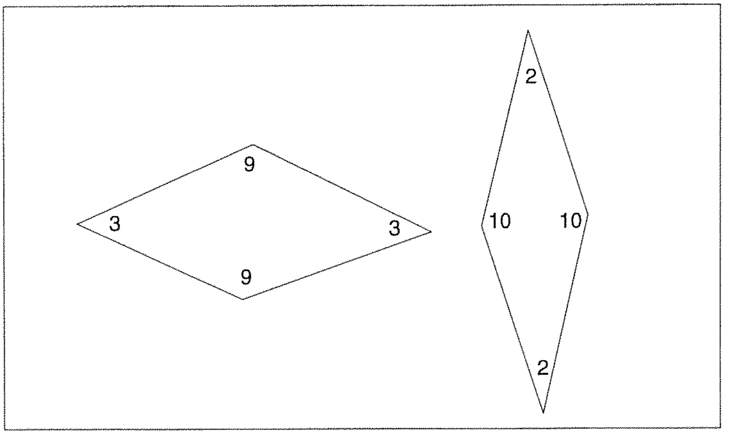
figuur 4

Omdat het vertonen van vele plaatjes wat lang kan gaan duren, zijn verkortingen mogelijk. Door de keuze van de variabele a zien we de stand na iedere a roerseconden, In het geval $n = 20$ en $a = 10$ is het laatste plaatje de stand na $20 \times 10 = 200$ roerseconden.

We kunnen enkel witte druppeltjes kiezen of ook gekleurde druppels. Er zijn vele variaties mogelijk. Door de keuze $c = 1$ worden de oorspronkelijk naast elkaar gelegen druppels door een lijntje verbonden, $c = 0$ laat de losse druppels zien. Door de keuze $f = 1$ in plaats van $f = 0$ worden de druppels niet in ieder nieuw plaatje weggepoetst, maar zijn na bij voorbeeld vijf roerseconden de druppels zowel op de plaats na één als na twee, drie vier en vijf roerseconden te zien. Het is alsof op iedere roerseconde een beetje room achterblijft. Figuur 4 geeft het computerprogramma in *Q*-basic voor 'koffieroeren'.

4 mozaïekspel

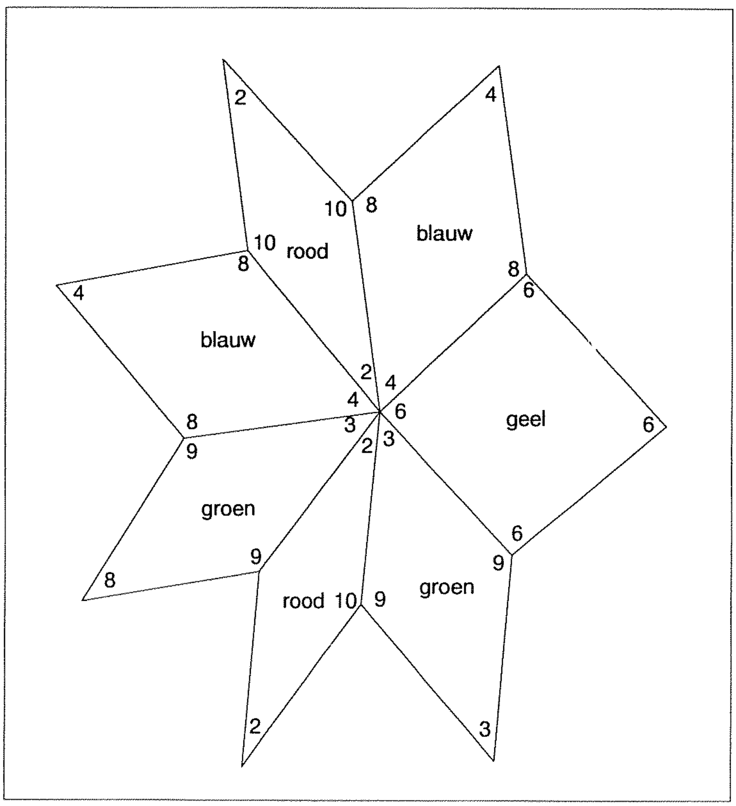
Het tweede onderwerp ging over een mozaïekspel, dat in het kader van het SLO-project 'Bolleboos' onder leiding van F. Goffree ontwikkeld is. Zeer fraai door J. Smit uitgevoerde mozaïek-stukjes werden door enkele proefpersonen gebruikt op een ontdekkingstocht.
Alle stukjes zijn ruiten met zijden met een zelfde lengte (ongeveer 4 cm). Er waren ruiten met hoeken van 30, 45, 60 en 90 graden. We kiezen de hoek van 15 graden als hoekmaat.
We hebben rode ruiten met hoeken 2 en 10; groene ruiten met hoeken 3 en 9; blauwe ruiten met hoeken 4 en 8 en ten slotte gele ruiten (vierkanten) met hoeken 6 en 6 (fig. 5).



figuur 5

We gaan figuren zo leggen dat steeds de zijden van verschillende ruiten geheel langs elkaar vallen. In het 'Bolleboos'-project zijn vele, met opklimmende moeilijkheid voorkomende, meetkundige en rekenachtige opgaven.

Tijdens de conferentie beperkten we ons tot twee voorbeelden.
Rond een vast punt *M* willen we een krans van ruiten leggen. Natuurlijk zijn er voor de handliggende mogelijkheden, zoals vier vierkanten of zes blauwe ruiten. We willen het echter met verschillende ruiten doen. Dit komt neer op de vraag een herhaalde optelling van getallen 2, 3, 4, 6, 8, 9, 10 te vinden met som 24. We kunnen de volgorde van de summanden de volgorde van de gekleurde ruiten laten bepalen. Men kan vragen naar symmetrische sterren enzovoorts. In figuur 6 geven we een voorbeeld van de optelsom 2 + 3 + 6 + 4 + 2 + 4 + 3.

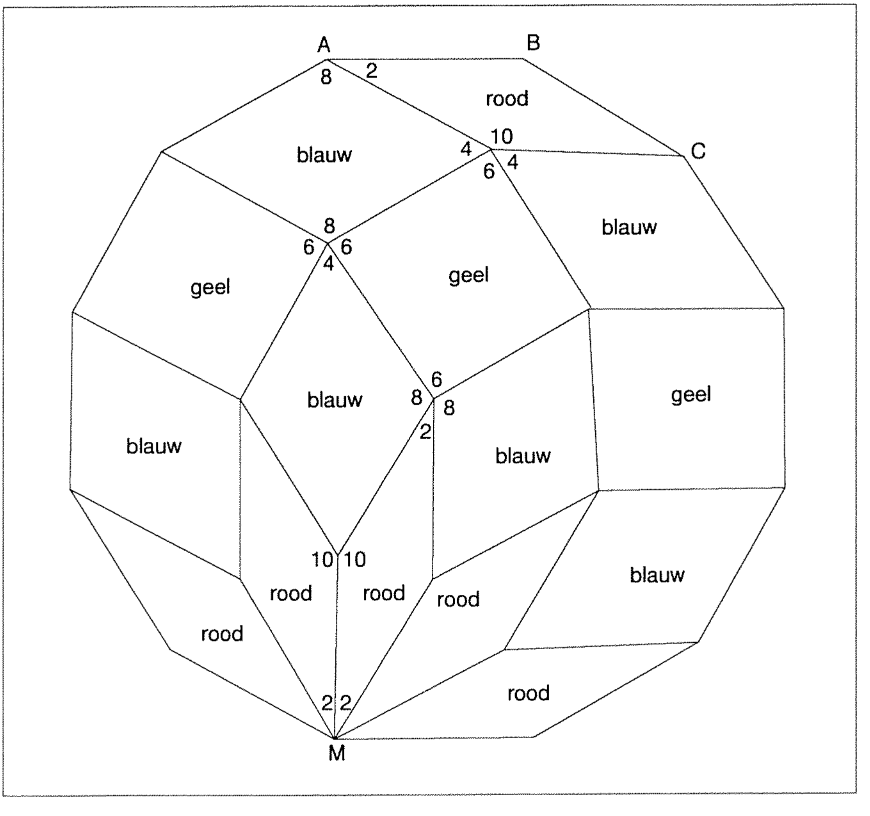


figuur 6

Een spannende vraag is om te beredeneren dat altijd als er één groene driehoek gebruikt is er zeker nog een tweede gebruikt is!
Een tweede opgave was met twaalf rode ruiten een twaalfpuntige ster te leggen. Daarna de tussenruimten tussen de punten op te vullen. In de

opening liggen twee hoeken van 10. Er kan dus een ruit met hoeken 4 (en 8) in passen. Opnieuw ontstaan openingen, nu liggen er al in de nieuwe punten één hoek van 2 en twee hoeken van 8, er past dus een ruit met hoek 6 in. Daarna hebben we een opening van 8, die we weer opvullen. Ten slotte moet tussen twee blauwe en één gele ruit nog een opening van 10 gevuld worden met een rode ruit.

Het geheel heeft als rand nu een regelmatige twaalfhoek gekregen. In figuur 7 tekenen we een deel van deze figuur. Van de regelmatige twaalfhoek is *M* het middelpunt en *B* is een punt van de omtrek. Bij *A* en *C* ontstaan hoeken van 2 + 8 + 2 = 12, dus een gestrekte hoek. De zijden van de twaalfhoek zijn twee keer zolang als de zijden van de ruiten.



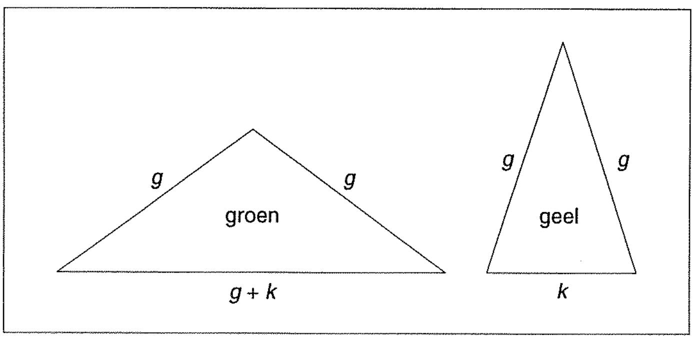
figuur 7

Wanneer men wat langer bezig is met het leggen van patronen krijgt men behoefte aan een ruit met hoeken 5 en 7. Deze is natuurlijk extra toe te voegen. In het project materiaal voerden we deze dan ook als nieuwe ruit ten tonele.

De ruit met hoeken 1 en 11 voerden we niet in. Het ontbreken hiervan geeft extra opdrachten en technisch gesproken is zo'n ruit wat fragiel![2]

5 de regelmatige vijfhoek

Een derde mozaïekspel werkt met twee soorten driehoekige stukjes. Groene driehoeken met hoeken van 36, 36 en 108 graden en gele driehoeken met hoeken van 36, 72 en 72 graden.
De gelijke benen van beide driehoeken hebben dezelfde lengte, die we g noemen. De basis van de gele driehoek noemen we k. De basis van de groene driehoek is dan $g + k$. Het zijn driehoeken waarvan de zijden zich verhouden als de gulden snede (fig.8).



figuur 8

De regels voor het aanelkaar passen worden nu verruimd; aan een zijde met lengte $g + k$ van de groene driehoek mogen twee zijden respectievelijk met lengte g en k gelegd worden. Met de groene en gele driehoeken kan men proberen nieuwe driehoeken te leggen, die gelijkvormig zijn met de stukjes. Voor de hand ligt de vraag naar een met de gele driehoek gelijkvormige driehoek met zijden g, $g + k$ en $g + k$ en een met de groene driehoek gelijkvormige driehoek met twee benen $g + k$.
Aardig is de opgave om met de stukjes een regelmatige vijfhoek te leggen. Voor een vijfhoek met zijde g hebben we drie groene en één geel stukje nodig. Ook een vijfhoek met zijde $g + k$ kan gelegd worden met zeven groene en vier gele driehoeken.[3]

De vraag waar wiskunde begint en waar gezond verstand eindigt, hebben we uiteindelijk niet beantwoord. Maar misschien is die vraag helemaal niet zo belangrijk. We waren, ieder op eigen niveau bezig, en ik durf vele van onze activiteiten toch wiskundige activiteiten te noemen.

noten

1 Ik gaf er de voorkeur aan geen input commando's te geven om iedere keer het hele programma te laten zien. Voor de erg nieuwsgierige lezer: Het commando 'line $(u, v) - (x, y)$, k, BF' tekent een hokje met kleur k met linker-onderhoek (u, v) en rechterbovenhoek (x, y). Het modulo rekenen moest wat gecompliceerd uitgevoerd worden.

2 Natuurlijk kan hetzelfde materiaal ook gebruikt worden, zoals trouwens al heel vaak gedaan is, bij de invoering van gewone breuken. In plaats van een hoek 1 moeten we dan spreken over een hoek $\frac{1}{24}$.

3 Even een echt wiskundig uitstapje.
Voor een regelmatige vijfhoek met zijde $n * k + m * g$ hebben we in ieder geval $2n + 2nm + 3m$ groene en $m + 4nm - n$ gele driehoeken nodig. Maar kun je wel altijd zo'n vijfhoek leggen? En als het kan, op hoeveel manieren kan het dan? Hoe kan je aan twee getallen x en y zien of je met x groene en y gele driehoeken een regelmatige vijfhoek kan leggen? Zouden Fibonacci-getallen hierbij een rol spelen? Al deze vragen zijn niet zo eenvoudig te beantwoorden!