Formeel rekenen met breuken

R. Keijzer
Hogeschool van Amsterdam

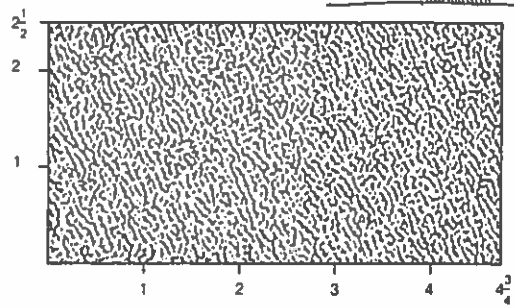
1 inleiding

Reeds lang wordt er bij het vormgeven van leergangen in de traditie van de realistische didactiek, gezocht naar een bevredigende oplossing voor het laten verwerven van het formele rekenen met breuken door kinderen. Het probleem daarbij lijkt enerzijds gelegen in de schijnbare tegenstelling tussen dit formele rekenen en de uitgangspunten van de reconstructiedidactiek (vergelijk Treffers e.a., 1989). Het formeel rekenen met breuken mikt overduidelijk niet op een brede (maatschappelijke) toepasbaarheid van de wiskunde. Verder lijkt het moeilijk om hierbij een rol te creëren voor levensechte contexten om het mathematiseringsproces verder aan te zetten. Van tijd tot tijd worden deze argumenten aangegrepen om te pleiten voor het vrijwel volledig schrappen van breuken uit het programma van het basis- en voortgezet onderwijs (Goddijn, 1992). Daarbij komt dat het opereren met breuken, in relatief eenvoudige contexten waarbij de onderliggende structuur een vermenigvuldigingsstructuur is, voor veel kinderen aan het eind van de basisschool leidt tot grote problemen. Dit werd bijvoorbeeld zichtbaar in de uitkomsten van het PPON-onderzoek (Bokhove & Janssen, 1989).
Bij het formeel rekenen met breuken lijkt het alleszins redelijk de bewerking vermenigvuldigen te beschouwen. De rekenregel voor deze bewerking vraagt eenvoudige handelingen, terwijl het doorzien ervan voor veel kinderen in de basisschool niet haalbaar lijkt. In de methode 'Rekenen & Wiskunde' (Gravemeijer e.a., 1989) wordt voor het (redelijk algemeen) betekenis geven aan het vermenigvuldigen van breuken gekozen voor het rechthoekmodel. Deze aanpak ligt in het verlengde van het werk van Streefland (1988), waarbij de lengten van de zijden de te vermenigvuldigen breuken zijn. Het construeren van de eenheidsrechthoek, maakt de uitkomst van de vermenigvuldiging zichtbaar als deel-geheel (fig.1).
Ook in het buitenland wordt deze didactische weg aangegeven. Padberg (1989) en Bezuk & Armstrong (1993) kiezen (onder meer) deze ingang om het vermenigvuldigen van breuken betekenis te geven en om het bepalen van een uitkomst van het vermenigvuldigen te ondersteunen. Bezuk en

Armstrong geven een voorbeeld hoe kinderen door middel van situaties in een rechthoeksmodel meer inzicht krijgen in het vermenigvuldigen van breuken.

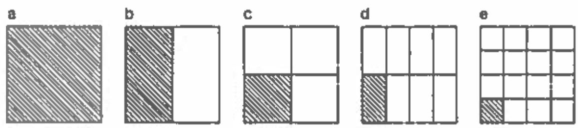
Tegels op het terras

Marga heeft een nieuwe tuinindeling gemaakt. Achterin de tuin wil ze een klein terras maken. Dat moet betegeld worden. Voor Marga tegels gaat kopen moet ze uitrekenen hoeveel tegels ze nodig heeft.
In de schuur heeft ze één grote vierkante tegel gevonden die $2\frac{1}{2}$ keer op de breedte en $4\frac{3}{4}$ keer op de lengte past:



1. Aan hoeveel tegels heeft Marga zeker genoeg?
2. Hoeveel tegels zijn er precies nodig?

In het tuincentrum blijken ze verschillende formaten kleinere tegels te hebben!



3. Welk type tegel zou het handigst zijn?
4. Hoeveel tegels heeft Marga dan nodig?

figuur 1: uit 'Rekenen & Wiskunde'

Padberg (ibid) geeft aan dat als je vermenigvuldigen interpreteert als *deel van deel*, dit een mogelijk andere didactische ingang is voor het vermenigvuldigen van breuken.
Deze benadering wordt ook aangeven als mogelijkheid in 'Proeve... 3A' (Treffers e.a., 1994). Bij deze aanpak wordt bijvoorbeeld $\frac{2}{3} \times \frac{2}{5}$ geïnterpreteerd als het nemen van $\frac{2}{3}$ deel van $\frac{2}{5}$ reep. Door deze interpretatie wordt het verschil in rol van de twee breuken verhelderd. De tweede breuk beschrijft een deel-geheel-relatie, namelijk een stuk van een reep, waar de

eerste breuk vervolgens op opereert. De eerste breuk geeft als het ware de opdracht van het stuk van de reep een deel af te breken.
De meest recente Nederlandse leergang breuken is neergelegd in 'De Breukenbode' (Buys e.a., 1996). In 'Proeve... 3B' (Treffers e.a, 1996) wordt een overzicht gegeven van de leerlijn die hier is uitgezet. Deze uitlijning wordt vervolgens aangegrepen om een voorzet te geven voor een nieuwe mogelijke didactische ingang voor het formeel vermenigvuldigen van breuken. De 'Proeve'-didactiek wijst op het laten over- en doordenken van een aantal rekenregels voor het rekenen met breuken door die kinderen in de basisschool, die dit relatief eenvoudig kunnen verwerven. Hierbij wordt gewezen op een gouden trio aan regels (Treffers e.a, ibid., pag.221):

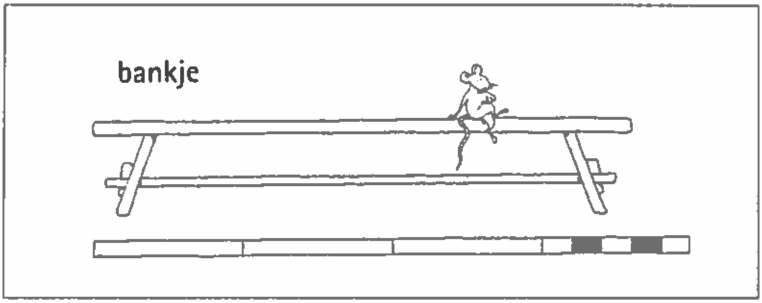
- de equivalentieregel: als de teller en de noemer van een breuk met een getal worden vermenigvuldigd, verandert de waarde van de breuk niet;
- de tellerregel: als de teller van een breuk met een getal wordt vermenigvuldigd, wordt de waarde van de breuk met deze factor vergroot;
- de noemerregel: als de noemer met een getal wordt vermenigvuldigd, wordt de waarde van de breuk met deze factor verkleind.

In dit artikel wordt verslag gedaan van een eerste fase van ontwikkelingsonderzoek naar het formaliseren van breuken. Daarbij zijn de ideeën, zoals die zijn neergelegd in 'De Breukenbode' en in 'Proeve... 3B', aangegrepen om verder uit te werken. Gravemeijer (1993, 1994) typeert een dergelijk ontwikkelingsonderzoek als theoriegeleide bricollage. De ontwikkelaar probeert hierbij conscientieus greep te krijgen op de (eigen) theoretische en praktische overwegingen bij het maken van onderwijs(producten), om vervolgens nauwgezet vast te leggen hoe het uitproberen (van het materiaal) in de schoolpraktijk verlopen is.
Deze vastlegging vormt op zijn beurt enerzijds een verantwoording voor het ontwikkelwerk en anderzijds een basis voor een volgende fase in het ontwikkelwerk. Van dit cyclische proces van beproeven en bijstellen wordt hier de eerste explorerende fase beschreven.

2 een nieuwe leerlijn breuken

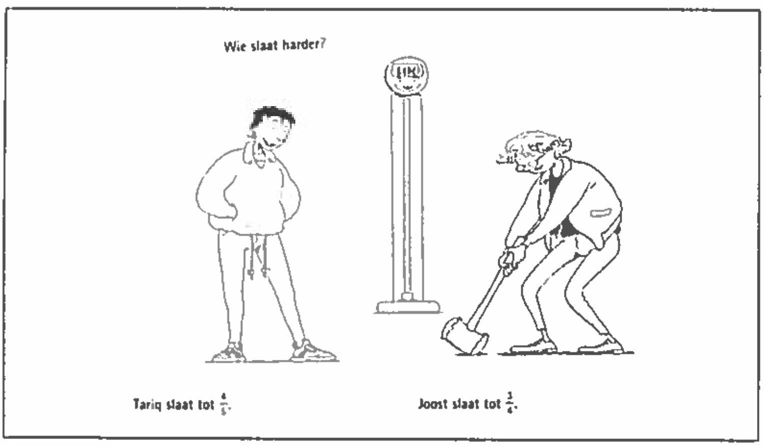
De leergang breuken zoals die werd vastgelegd in 'De Breukenbode', vormde een belangrijke basis voor het beoogde ontwikkelwerk. Twee aspecten werden daarbij in het bijzonder aangegrepen, namelijk het ontwikkelen van de strook en de getallenlijn als modellen voor breuken en het ontwikkelen van een aantal belangrijke aanpakken om breuken te vergelijken. Een aantal voorbeelden uit 'De Breukenbode' maken zichtbaar welke noties en aanpakken bij kinderen worden aangezet.[1]

Het bankje wordt opgemeten met meetstroken met een lengte van een Amsterdamse Voet (*av*) (fig.2). Van de leerlingen wordt gevraagd het meetresultaat te benoemen in breuken. Deze opdracht is dan ook in eerste instantie gericht op het verder verwerven van de breukentaal. Het bankje is drie hele *av*'s lang en dan nog drie stukjes van een in vijven gedeelde *av*-strook. Of korter: het bankje is $3\frac{3}{5}$ *av* lang.



figuur 2: de 'Amsterdamse Voet'

Al met al een meetresultaat dat zich met enig gemak op een getallenlijn laat plaatsen en dat ook mogelijkheden biedt om op intuïtieve wijze te vergelijken met andere meetresultaten. Je ziet bijvoorbeeld zo dat een bankje van $3\frac{4}{5}$ *av* of $4\frac{1}{5}$ *av* langer is. Wanneer het maken van de meetstrookjes iets verder wordt overdacht, is ook duidelijk dat een bankje dat $3\frac{3}{4}$ *av* lang is, langer is dan het getekende bankje, want de stukjes van een in vieren gedeeld strookje zijn uiteraard langer dan de stukjes van een in vijven gedeeld strookje. Zo kan er ook worden vergeleken met $\frac{1}{2}$. Een bankje dat $3\frac{3}{5}$ *av* lang is, is duidelijk langer dan een bankje van $3\frac{1}{3}$ av, daartussen zit namelijk een bankje met een lengte van $3\frac{1}{2}$ *av*.

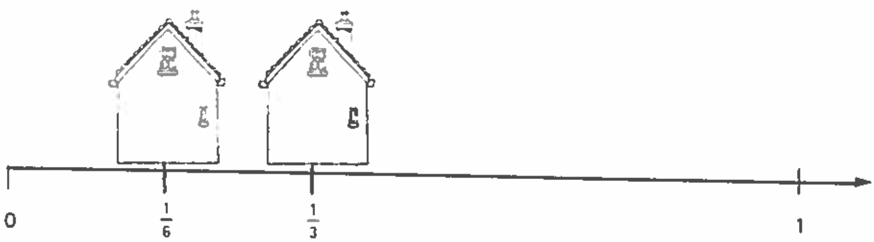


figuur 3: de 'Kop van Jut'

Bij het vergelijken van de slagkracht bij de 'Kop van Jut' van Tariq en Joost ligt de situatie iets moeilijker (fig.3). De grootte van de stukjes en het aantal stukjes beschouwen biedt hier, aanvankelijk, weinig soelaas. Het vergelijken gaat ineens wel een stuk makkelijker als de bovenkant van de 'Jutlijn' in de beschouwing wordt meegenomen. Tariq en Joost slaan respectievelijk tot $\frac{1}{5}$ en $\frac{1}{4}$ van de bovenkant, hetgeen Tariq tot overduidelijke winnaar maakt. Maar het kan nog anders. Aan iedere slag op de 'Kop van Jut' worden punten toegekend. Wie tot boven komt, krijgt honderd punten. Wie dit niet haalt krijgt naar verhouding minder punten. Op deze manier wordt het getal honderd een ondermaat voor het vergelijken van de breuken $\frac{4}{5}$ en $\frac{3}{4}$. De strookachtige structuur van de 'Kop van Jut' geeft aan hoe hier te werk kan worden gegaan. Bij $\frac{1}{5}$ krijg je twintig punten, dus krijgt Tariq tachtig punten. Evenzo krijgt Joost 75 punten. En zo blijkt weer dat de getoonde slagkracht van Tariq groter is dan die van Joost.

Ongeveer een half onderwijsjaar later zijn de strookachtige contexten in 'De Breukenbode' verder verschraald tot een getallenlijn. Op de getallenlijn staan huizen, die woonplaatsen zijn van breuken. Gelijkwaardige breuken wonen in hetzelfde huis en heten daarom huisgenoten. Breuken die bij elkaar in de buurt wonen heten, in het verlengde van deze naamgeving, buurtgenoten (fig.4).

Weer een stukje getallenlijn. Bedenk huisgenoten van $\frac{1}{3}$ en $\frac{1}{6}$.



Bedenk weer breuken die in de buurt wonen.

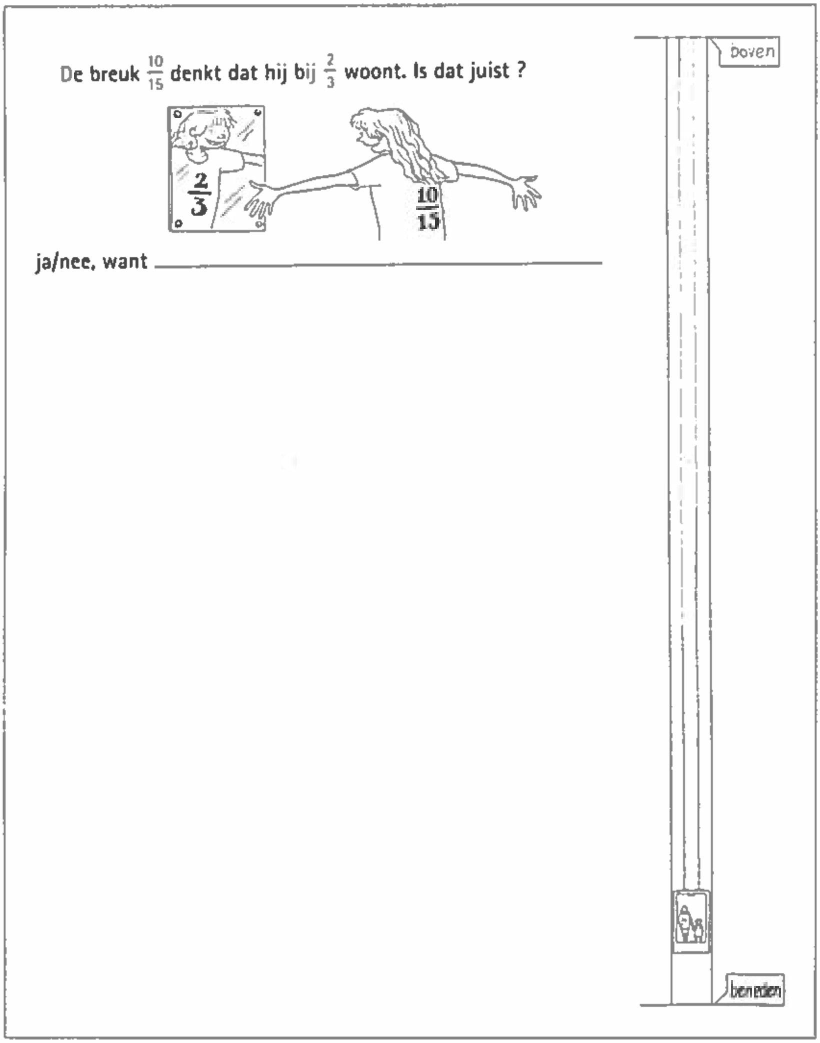
Tussen 0 en $\frac{1}{6}$ ______ ______ ______

Tussen $\frac{1}{6}$ en $\frac{1}{3}$ ______ ______ ______

figuur 4: buurtgenoten

Aan de kinderen wordt gevraagd op zoek te gaan naar dergelijke buurtgenoten. Om deze klus te klaren ligt het voor de hand gebruik te maken van de eerder geïntroduceerde huisgenoten.

Bijvoorbeeld van het zoeken van buurtgenoten tussen de breuken $\frac{1}{6}$ en $\frac{1}{3}$ is het handig te weten dat $\frac{2}{12}$ en $\frac{4}{24}$ huisgenoten zijn van $\frac{1}{6}$ en dat $\frac{4}{12}$ en $\frac{8}{24}$ huisgenoten zijn van $\frac{1}{3}$. Je ziet dan bijvoorbeeld zo dat $\frac{5}{24}$, $\frac{6}{24}$ en $\frac{7}{24}$ wonen tussen $\frac{1}{6}$ en $\frac{1}{3}$.[2]
Weer een paar maanden later wordt de breukenlift bij de leerlingen geïntroduceerd (fig.5). De liften in een breukengebouw hebben alle een ander nummer. Dit nummer bepaalt het aantal stops dat de lift maakt. Zo maakt de $\overline{6}$-lift zes stops bij het naar boven gaan. Deze lift stopt daarom bij de breuken $\frac{1}{6}$, $\frac{2}{6}$, $\frac{3}{6}$, $\frac{4}{6}$, $\frac{5}{6}$ en $\frac{6}{6}$ (helemaal boven).



figuur 5: de breukenlift

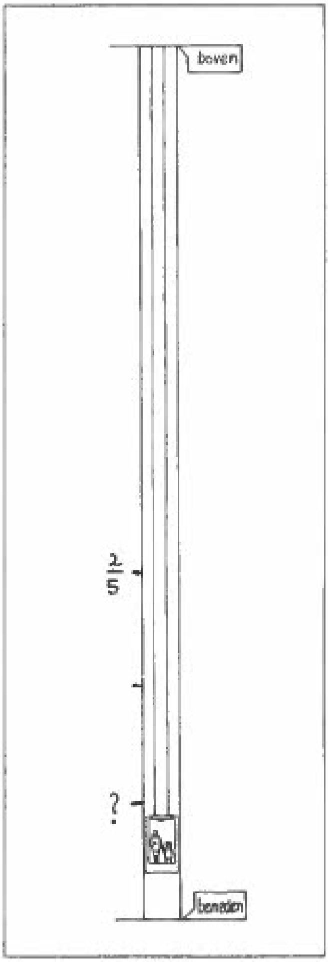
Natuurlijk kan ook de breuk $\frac{1}{3}$ deze lift nemen om naar de juiste verdieping te gaan. $\frac{1}{3}$ reist dan twee verdiepingen mee. Met de leerlingen worden de mogelijkheden van meereizen besproken. In het verlengde hiervan wordt ook gekeken naar breuken die op dezelfde verdieping wonen en dus huisgenoten zijn. Het reizen met de liften wordt aangegrepen om hier zekerheid over te krijgen.
Op deze manier vindt er uiteindelijk door de leerlingen een nadere doordenking plaats van gelijkwaardigheid van breuken. Juist dit aspect, het doordenken van gelijkwaardigheid vanuit een getallenlijnstructuur, wilden we aangrijpen voor het geven van een aanzet om te komen tot een volgende stap in het formeel opereren met breuken. Ik vermeldde eerder dat daarbij ook werd gezocht naar een uitwerking, waarbij de leerlingen zouden worden aangezet tot het doordenken van min of meer formele rekenregels voor breuken.

3 ontwikkelen en beproeven

eerste kernles - het vraagteken

Met de uitlijning van 'De Breukenbode' in het achterhoofd probeerden we[3] een vervolg te bedenken in de richting van het vermenigvuldigen van breuken. Wanneer we voor een deel van de leerlingen het formeel vermenigvuldigen bereikbaar willen maken, zullen we eerst een van de kernproblemen moeten aanpakken. Het delen van een breuk door een geheel getal, bijvoorbeeld $\frac{3}{5}$: 4, plaatst leerlingen voor grote problemen (Treffers e.a., 1994). We zochten een didactische oplossing voor dit probleem in het verlengde van de leergang zoals die in 'De Breukenbode' is uitgezet. Dit bracht ons tot het gebruiken van de getallenlijnstructuur binnen de structuurcontext van het breukengebouw met z'n breukenliften. We kwamen op deze manier tot een kernprobleem voor de leerlingen (fig.6).
Voor de les waar dit probleem centraal zou komen te staan, verwachtten we dat de leerlingen aanvankelijk zouden kiezen voor een aanpak vanuit het controleren van het antwoord. Als je bijvoorbeeld verwacht dat de breuk $\frac{1}{6}$ woont bij het vraagteken, dan kun je dit eenvoudig controleren door te tellen met sprongen van $\frac{1}{6}$. Zo kan worden vastgesteld dat een gevolg van de keuze voor $\frac{1}{6}$ bij het vraagteken zou zijn dat de breuk $\frac{3}{6}$ een huisgenoot wordt van $\frac{2}{5}$.
We verwachtten dat de meeste leerlingen dit laatste kunnen ontzenuwen. Het controleren van meer gegadigden van breuken die bij het vraagteken passen, leidt op een analoge manier tot het steeds weer controleren of een bepaalde breuk huisgenoot is van $\frac{2}{5}$. Dit nu, zo verwachtten we, zou een aantal leerlingen wel eens op het idee kunnen brengen om vooraf naar de

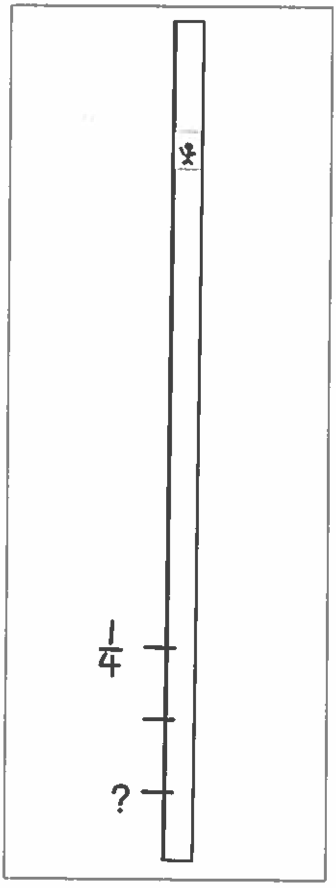
huisgenoten van $\frac{2}{5}$ te kijken, om zo feitelijk vast te stellen welke kandidaat in drieën gedeeld kan worden.



figuur 6: welke breuk pas bij het vraagteken?

In de les begint de leerkracht, Michiel Janssens[4], met een ietwat eenvoudiger probleem. Hij tekent een (breuken)liftlijn op het bord (fig.7), beschrijft de getekende situatie en wijst de leerlingen op het vraagteken: 'Welke breuk hoort er bij het vraagteken?' Hij geeft aan dat de leerlingen dit voor zichzelf mogen uitzoeken en benadrukt verder dat het de bedoeling is dat alle kinderen met een antwoord komen, ook als ze niet (helemaal) zeker zijn van hun zaak.

Na enige tijd worden de gevonden kandidaten geïnventariseerd. De kinderen vonden de breuken: $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{1}{14}$, $\frac{1}{12}$ en $\frac{4}{8}$. Michiel stelt de leerlingen voor om de gegeven antwoorden te controleren. Hij pakt de eerste kandidaat, $\frac{1}{6}$, bij de kop: 'Stel je voor dat $\frac{1}{6}$ bij het vraagteken woont, welke breuk woont dan bij de volgende halte?' Een van de leerlingen maakt de redenering af: 'Dan woont $\frac{2}{6}$ bij de volgende halte en $\frac{3}{6}$ bij de daarop volgende.' Michiel wijst op de implicaties van deze redenering: 'Klopt het dan dat de breuk $\frac{1}{6}$ bij het vraagteken woont?' De leerling maakt de redenering af: 'Nee, want $\frac{3}{6}$ is een half.' Zo lijkt voor iedereen duidelijk: een $\frac{1}{2}$ en $\frac{1}{4}$ wonen niet bij elkaar.



figuur 7

Ook de andere breuken worden gecontroleerd. De breuk $\frac{1}{12}$ is als laatste aan de beurt. Deze is raak, want $\frac{3}{12}$ is een huisgenoot van $\frac{1}{4}$. Voordat overgegaan wordt naar een volgende opgave wijst Michiel nogmaals op het vinden van het zojuist gevonden antwoord: 'Als er $\frac{3}{12}$ had gestaan in plaats van $\frac{1}{4}$, dan is die een stuk makkelijker.'

De volgende opgave voor de leerlingen is analoog aan de eerste. Nu is de breuk $\frac{3}{5}$ op de liftlijn aangegeven. Het lijnstuk onder deze breuk is in vieren gedeeld. De meeste leerlingen kiezen ook hier voor het controleren-als-aanpak. De impliciete verwijzing naar het gebruiken van gelijkwaardige breuken wordt door een van de leerlingen overgenomen.
Remko verklaart waarom hij denkt dat de breuk $\frac{3}{20}$ bij het vraagteken woont: 'Ik heb naar $\frac{3}{5}$ gekeken en dat vier keer gedaan. Dat wordt $\frac{12}{20}$.
En toen deed ik $\frac{3}{20}$, $\frac{6}{20}$, $\frac{9}{20}$ en $\frac{12}{20}$.'
Alle leerlingen zijn er direct van overtuigd dat dit een goede oplossing is. Michiel wijst daarom nogmaals op de aanpak die Remko koos: 'Als hier in plaats van $\frac{3}{5}$ de breuk $\frac{12}{20}$ had gestaan, dan is het veel makkelijker!'

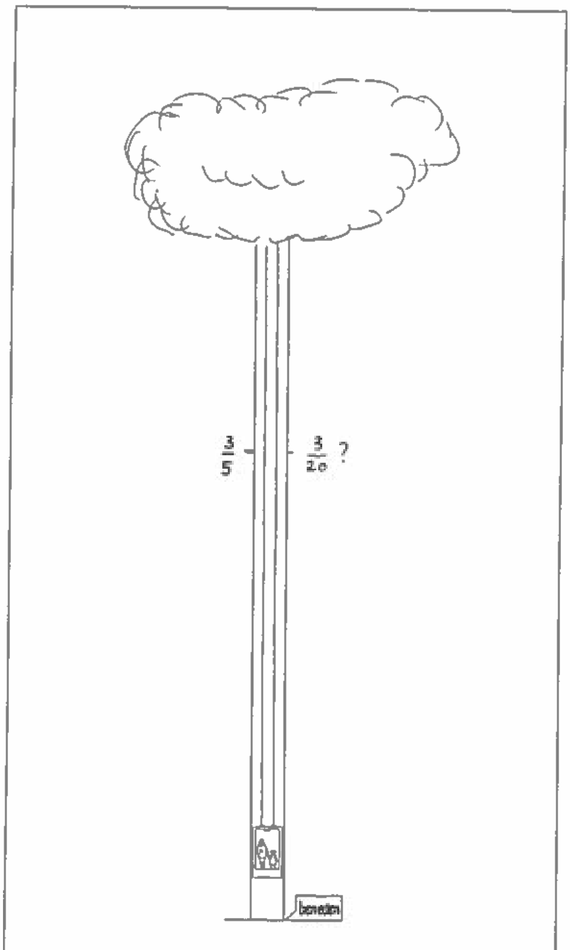
De derde opgave was het oorspronkelijke kernprobleem. De liftlijn tussen 0 en $\frac{2}{5}$ is in drieën gedeeld. Bij het onderste streepje staat een vraagteken. Voordat Michiel de leerlingen aan het werk zet, wijst hij ze nogmaals op de aanpak die Remko zojuist liet zien.
Bij het bespreken van deze derde opgave blijken er nog steeds leerlingen te zijn die handig controleren door herhaald op te tellen. De aanpak van een van de leerlingen, Anouk, leunt erg aan tegen het gebruiken van gelijkwaardige breuken. Zij vermoedt dat het antwoord iets met vijftienden te maken heeft en probeert de breuk $\frac{1}{15}$. Als dit niet goed gaat doet ze nog een poging: $\frac{2}{15}$. Die is wel raak. Budd zocht huisgenoten van $\frac{2}{5}$. Hij vertelt hoe hij de breuk $\frac{2}{15}$ vond: 'Je neemt huisgenoten van $\frac{2}{5}$, dan krijg je $\frac{6}{15}$. En je moet drie stapjes hebben en dus wordt het $\frac{2}{15}$.'

tweede kernles – de wolkenkrabber

We zijn niet ontevreden met het resultaat van deze eerste kernles. De leerlingen bleken goed in staat om hun kennis en vaardigheden met betrekking tot breuken in te zetten om de gestelde problemen op te lossen. Juist de verschillende strategieën om breuken te vergelijken, waar eerder uitgebreid aandacht aan werd besteed, vielen goed op hun plaats. De tweede kernles willen we veel meer richten op het getalsmatig multiplicatief vergelijken van breuken.
We stellen echter vast dat er, voor dit gebeurt, meer aandacht nodig is voor expliciteren van de zogenoemde tellerregel. De leerlingen moeten hierbij achterhalen wat er gebeurt, wanneer bij de breuk $\frac{2}{5}$ de teller met drie wordt vermenigvuldigd. Waar komt de nieuwe breuk, $\frac{6}{5}$, terecht op de getallenlijn? Verder zou in het intermezzo tussen de twee kernlessen de zogenoemde noemerregel naast de tellerregel aan de orde gesteld moeten worden; bij de breuk $\frac{6}{5}$ zou vervolgens ook de noemer met drie vermenigvuldigd worden.
De leerlingen wordt weer gevraagd waar de breuk die zo ontstaat, $\frac{6}{15}$, op

de getallenlijn thuishoort. We verwachtten dat veel leerlingen zouden kunnen beredeneren dat deze laatste breuk weer een huisgenoot is van $\frac{2}{5}$. En dat is precies wat we zagen gebeuren. De leerlingen pasten het vermenigvuldigen als herhaald optellen adequaat toe en zagen in het vervolgens vermenigvuldigen van de noemer een breuk ontstaan, die gelijkwaardig is aan de breuk waarvan werd uitgegaan. Dit nu achtten we een goede uitgangspositie om het multiplicatief vergelijken een meer getalsmatige invulling te geven.
We bedachten voor de tweede kernles het volgende centrale probleem:

> De breuk $\frac{3}{20}$ is op de verkeerde verdieping terechtgekomen.
> Waar hoort de breuk $\frac{3}{20}$ wel? (fig.8)



figuur 8: breukenlift met de breuken $\frac{3}{20}$ en $\frac{3}{5}$ op dezelfde hoogte

Door het dak van het breukengebouw in de wolken te hangen verwachtten we dat de leerlingen de positie van de breuk $\frac{3}{5}$ zouden aangrijpen om $\frac{3}{20}$ te positioneren. Dat, zo veronderstelden we, kon op verschillende manieren gebeuren, bijvoorbeeld:

- via het globaal inschatten van de hoogte van $\frac{3}{20}$: in ieder geval een flink eind onder $\frac{3}{5}$;
- via het herhaald halveren: de helft van $\frac{3}{5}$ is $\frac{3}{10}$ en daar weer de helft van is $\frac{3}{20}$;
- via gelijkwaardige breuken: $\frac{12}{20}$ is een huisgenoot van $\frac{3}{5}$ en $\frac{12}{20}$ is vier keer zo groot als $\frac{3}{20}$.

Ook bij het beantwoorden van de centrale vraag in deze les is de aanpak van het controleren mogelijk. Daarmee is het ook in deze situatie voor iedere leerling mogelijk een zinvolle bijdrage te leveren aan het eigen leren en aan het leren van de groep.

In de les die volgt, reageren de leerlingen zoals we dat verwacht hadden. Michiel introduceert het breukengebouw, waarvan het dak in de wolken is verdwenen als wolkenkrabber. Vervolgens legt hij de leerlingen het probleem van het positioneren van $\frac{3}{20}$ vanuit $\frac{3}{5}$ voor: '$\frac{3}{20}$ is op de verkeerde verdieping terechtgekomen.' Hij wijst de leerlingen op de $\frac{3}{20}$, die op de verdieping van $\frac{3}{5}$ terecht is gekomen. De leerlingen krijgen de opdracht om $\frac{3}{20}$ naar de goede verdieping te brengen.
Drie minuten later heeft iedere leerling een antwoord. De leerkracht vraagt in de bespreking eerst naar de globale positie van $\frac{3}{20}$: 'Woont $\frac{3}{20}$ nu beneden of boven $\frac{3}{5}$?'
Noavel weet het antwoord: 'Hij woont er beneden.' De leerkracht gaat nu meer gericht op zoek naar aanpakken van leerlingen om $\frac{3}{20}$ te plaatsen: 'Wie weet zeker dat hij of zij $\frac{3}{20}$ op de goed plaats heeft gezet?'
Lionel is zeker van z'n zaak: 'Je moet in vier stukken delen.' De leerkracht laat dit antwoord even voor wat het is en gaat verder met Budd. Die verwoordt zijn antwoord aldus: 'Je moet eerst kijken naar $\frac{1}{5}$. De breuk $\frac{3}{20}$ zit daar iets onder.' De leerkracht wil echter meer informatie: 'Hoe weet je waar $\frac{1}{5}$ ligt?' Budd zegt dat hij dat gegokt heeft, maar heeft de breuk anderszins zodanig gepositioneerd dat er van een gokje eigenlijk geen sprake kan zijn. Zij bespreken de situatie iets verder: $\frac{4}{20}$ is een huisgenoot van $\frac{1}{5}$ en $\frac{3}{20}$ ligt daar $\frac{1}{20}$ onder.
Raymond geeft op verzoek van de leerkracht ook nog zijn aanpak voor het plaatsen van $\frac{3}{20}$. Hij gebruikt huisgenoten: 'De breuk $\frac{12}{20}$ is een huisgenoot van $\frac{3}{5}$. De helft is $\frac{6}{20}$ en daar weer de helft van is $\frac{3}{20}$.'
Pauline sluit de rij oplossingen af. Zij geeft een verklaring waarom $\frac{6}{20}$ nooit boven $\frac{3}{5}$ kan liggen: '... want $\frac{10}{20}$ is de helft en $\frac{3}{5}$ ligt boven de helft en $\frac{3}{20}$ eronder.'

Bij een tweede en derde analoog probleem gaan er steeds meer leerlingen toe over om de aanpak van Raymond te volgen. Daarbij wordt de gebruikte bewerking ook steeds duidelijker verwoord: 'als je van de breuk $\frac{3}{5}$ de breuk $\frac{3}{20}$ wil maken, dan deel je $\frac{3}{5}$ eigenlijk door vier.'
De les wordt afgesloten met het vragen van een eigen productie aan de leerlingen: 'Bedenk nu een dergelijke opgave voor je buurman. De bedachte opgave mag moeilijk zijn, maar je moet hem wel zelf kunnen maken.' Ruim de helft van de leerlingen kiest hier een opgave die veel lijkt op de opgaven die eerder in de les aan de orde waren. Een aantal kinderen gaat duidelijk een stap verder in het zoeken en vinden van getalsmatige relaties. Een zo'n leerling is Remko. Hij plaatst de breuk $\frac{3}{4}$ naast de liftlijn en vraagt naar de positie van $\frac{6}{16}$.

Eigen producties als deze geven aanleiding om het springen over de liftlijn nog verder te onderzoeken. Daarbij kan het bereiken van $\frac{3}{16}$ vanuit $\frac{3}{4}$ een tussenstap zijn bij het bereiken van $\frac{6}{16}$. Nagegaan kan dan worden wat er feitelijk gebeurde: $\frac{3}{4}$ is eerst gedeeld door vier en vervolgens vermenigvuldigd met twee. Het is dan nog een heel eind voordat deze situatie formeel geïnterpreteerd gaat worden als $\frac{2}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{6}{16}$. En wellicht is dat niet eens nodig, want hier staat toch gewoon dat de helft van $\frac{3}{4}$ bepaald moet worden. Maar als we de som in de gegeven vorm willen verklaren, moet eerst het 'delen door' vertaald worden in 'deel nemen van'. Delen door vier komt dan neer op het nemen van $\frac{1}{4}$ deel; $\frac{1}{4}$ deel van $\frac{3}{4}$ is $\frac{3}{16}$. En als we dit twee keer doen dan nemen we eigenlijk $\frac{2}{4}$ deel.[5]

En daarmee is ook een mogelijk vervolg geschetst:
- het formaliseren van het delen door een heel getal, bijvoorbeeld $\frac{2}{5}$: 3;
- het verwoorden van het delen als 'deel nemen van', $\frac{1}{3}$ deel van $\frac{2}{5}$;
- het uitbreiden naar niet-stambreuken, vanuit deze stambreukbenadering, $\frac{2}{3}$ deel van $\frac{2}{5}$;
- om dit vervolgens te vertalen in $\frac{2}{3} \times \frac{2}{5}$, door dit als restprobleem te laten verschijnen van bijvoorbeeld $2\frac{2}{3} \times \frac{2}{5}$.

4 voortgang in onderzoek

In de inleiding gaf ik al aan dat het beschreven ontwikkelingsonderzoek een explorerend onderzoek betreft ten aanzien van het scheppen van voorwaarden voor het (semi)formeel vermenigvuldigen van breuken. In een volgende fase van het ontwikkelingsonderzoek zal hetgeen hier gevonden is beter en duidelijker worden uitgelijnd.
Daarnaast zal een aantal zaken dat in dit explorerende onderzoek naar vo-

ren kwam nader worden onderzocht. Daarbij kan gedacht worden aan meer algemene uitspraken ten aanzien van de invulling van de realistische didactiek, daar waar het gaat om het verwerven van formele wiskunde. Hoe gaat daarbij de wiskunde als het ware zelf als context fungeren om de wiskunde verder te doorgronden?[6] Welke specifieke vorm krijgt hierin bijvoorbeeld het uitleggen en het oefenen van vaardigheden? Welke keuzen lijken, in het verlengde van deze vernieuwingen in de didactiek, op zijn plaats bij het al dan niet het verschuiven van dergelijke formele leerstof van het vroegere programma van de basisschool naar het voortgezet onderwijs?

Op grond van het explorerend onderzoek lijken een aantal voorlopige conclusies op z'n plaats:

- het formele rekenen met breuken kan waarschijnlijk zo onderwezen worden dat er (aanvankelijk) voor nagenoeg iedere leerling mogelijkheden liggen om een zinvolle bijdrage te leveren aan het eigen leren en het leren van de hele groep;
- daar waar bij het formele rekenen met breuken de wiskunde - als context om wiskunde te leren - de context niet overmatig stuurt in wat van de leerlingen verwacht wordt, zal de leerlingen (meer) duidelijkheid gegeven dienen te worden ten aanzien van wat er van hen verwacht wordt;
- het realistische karakter van het onderwijs komt met name naar voren in het zelf vormen van de wiskunde door de leerlingen;
- dit construeren van formele wiskunde vormt daarmee de basis voor de interactie tussen leerlingen onderling en tussen leerlingen en leerkracht, en is een reden om hier met enige regelmaat eigen producties van leerlingen te vragen;
- het controleren-als-aanpak, waarbij de aanpak bij het controleren van een antwoord, de basis gaat vormen om een directe aanpak te verwerven, is een sterk didactisch middel, dat juist bij het leren van formele(re) wiskunde een belangrijke rol kan spelen.

En daarmee overstijgt de opbrengst van dit ontwikkelingsonderzoek het weloverwogen product van ontwikkeling, een deelleergang vermenigvuldigen van breuken. Het levert, zo is de verwachting, nieuwe argumenten voor het verder vormgeven van de reconstructiedidactiek en vormt op die manier een mogelijke basis voor verder ontwikkelingsonderzoek.

noten

1 Zie voor een meer precieze beschrijving van deze aspecten van de leergang: Keijzer en Buys, 1996. *De Breukenbode.*
2 Er zijn overigens veel minder formele manieren mogelijk om het hier gestelde probleem op te lossen. Bijvoorbeeld door te denken aan de grootte van de stukjes is duidelijk dat $\frac{1}{4}$ en $\frac{1}{5}$ wonen tussen $\frac{1}{6}$ en $\frac{1}{3}$.
3 Bij het ontwikkelwerk waren betrokken A. Treffers, M. Janssens en R. Keijzer.
4 M. Janssens is leerkracht van groep 8B van de OBS 'e Schakel' in Deventer. Hij werkte in het kader van zijn doctoraalstudie onderwijskunde mee aan dit ontwikkelingsonderzoek. Hij voerde verder de lessen met zijn leerlingen uit. De leerlingen in deze groep hebben overigens een 'mechanistisch' rekenverleden. Een deel van de leerlingen is ook al in mechanistische stijl aan de slag geweest met het formele rekenen met breuken. Er zijn echter nogal wat aanwijzingen dat dit formele rekenen weinig betekenisvol verliep. In de aanloop naar de hier beschreven lessen, is in een aantal lessen aandacht besteed aan het positioneren van breuken op de getallenlijn en verschillende strategieën om breuken te vergelijken in het verlengde van dit positioneren.
5 Hiermee blijft het probleem liggen dat 'deel-van' vertaald moet worden in 'keer". Dit is echter een heel anderssoortig probleem. Een mogelijke aanpak hier is gelegen in het interpreteren van vermenigvuldigen met een breuk groter dan één1, zoals $2\frac{3}{4} \times \frac{2}{5}$. De vermenigvuldiging met $\frac{3}{4}$ is hier een restprobleem en wordt haast als vanzelf beschouwd als het nemen van $\frac{3}{4}$ deel.
6 J. de Lange (1996) wees bijvoorbeeld in zijn slotrede van ICME-8 op de mogelijkheid om binnen realistisch reken-wiskundeonderwijs de wiskunde zelf als context te gebruiken.

literatuur

Bezuk, N.S. & B.E. Armstrong (1993). Understanding Fraction Multiplication. *Mathematic Teacher* 9(*85*), 729-732.

Bokhove, J. & J. Janssen (1989). Periodiek peilingsonderzoek in het basisonderwijs (6). Resultaten peiling einde basisonderwijs deel 3. *Tijdschrift voor nascholing en onderzoek van het reken-wiskundeonderwijs* 8(2), 3-32.

Buys, K. (red.), J. Bokhove, R. Keijzer, A. Noteboom & A. Treffers (1996). *De breukenbode. Een leergang voor de basisschool.* Enschede: SLO/Fi/Cito.

Goddijn, A.J. (1992). De oudste en de nieuwste breuken. *Tijdschrift voor nascholing en onderzoek van het reken-wiskundeonderwijs,* 11(2), 18-31.

Gravemeijer, K. (eindredactie), F. van Galen, J.M. Kraemer, T. Meeuwissen & W. Vermeulen (1989). *Rekenen & Wiskunde.* Baarn: Bekadidact.

Gravemeijer, K. (1993). Ontwikkelingsonderzoek als basis voor theorievorming. In: R. de Jong en M. Wijers (red.). *Ontwikkelingsonderzoek. Theorie en praktijk.* Utrecht: NVORWO, 17-34.

Gravemeijer, K.P.E. (1994). *Developing realistic mathematics education.* Utrecht: CD-beta Press/Freudenthal instituut (dissertatie).

Keijzer, R. & K. Buys (1996). Groter of kleiner. Een doorkijkje door een nieuwe leergang breuken. *Willem Bartjens,* 15(3), 10-17.

Lange, J. de (1996). Echte problemen met realistische didactiek. *Nieuwe Wiskrant,* 16(*1*), 4-11.

Padberg, F. (1989). *Didaktik der Bruchrechnung: Gemeine Brüche - Dezimalbrüche.* Zürich: BI Wissenschaftsverlag.

Streefland, L. (1988). *Realistisch breukenonderwijs.* Utrecht: OW&OC (dissertatie).
Treffers, A., E. de Moor & E. Feijs (1989). *Proeve van een nationaal programma voor het reken-wiskundeonderwijs op de basisschool. Deel 1 Overzicht einddoelen.* Tilburg: Zwijsen.
Treffers, A., L. Streefland & E. de Moor (1994). *Proeve van een nationaal programma voor het reken-wiskundeonderwijs op de basisschool. Deel 3A Breuken.* Tilburg: Zwijsen.
Treffers, A., L. Streefland & E. de Moor (1996). *Proeve van een nationaal programma voor het reken-wiskundeonderwijs op de basisschool. Deel 3B Kommagetallen.* Tilburg: Zwijsen.