Opinies over rekenen met afrondingen

A. Treffers & J. Menne
Freudenthal instituut, Universiteit Utrecht

1 inleiding

In een lezing op de Panama najaarsconferentie 1994 is voor het eerst de kwestie van het (precies) rekenen met afgeronde getallen aan de orde gesteld.
'Afronden op verschillende manieren hoort tot het basisschoolprogramma', zo werd toen gesteld. Maar behoort ook het rekenen met afgeronde getallen daartoe? 'Over deze kwestie zullen we deskundigen raadplegen', luidde de slotsom.
Deze raadpleging gebeurde op de Panama najaarsconferentie van 1995.
In totaal zestig deelnemers woonden de twee workshops bij over 'Meten, metriek en rekenen met meetgetallen'. Over het laatstgenoemde onderdeel gaat dit verslag. De volgende zes opgaven werden eerst door de deelnemers zelf gemaakt, voorzover de tijd dit toeliet. Enkele ervan werden kort plenair besproken. Daarna kreeg men de gelegenheid om aan te geven of dergelijke problemen tot de leerstof van de basisschool gerekend zouden moeten worden. Dit gebeurde via een oordeel per opgave: ja / ? /nee.
Tevens was er ruimte om de omcirkelde keuze toe te lichten.
In het volgende worden de betreffende vraagstukken met bijbehorende scores gegeven, soms gevolgd door enig commentaar.

1

> 'Gids van een archeologisch museum merkt bij het geraamte van een dinosaurus op dat dit 90 miljoen en zes jaar oud is.
> Een toeschouwer vraagt waarom hij dat zo nauwkeurig weet.
> Antwoord: Toen ik hier zes jaar geleden kwam vertelde men mij dat het fosiel 90 miljoen jaar was. Vandaar dus nu 90.000.006 jaar.'

figuur 1: A. Paulos tijdens Freudenthal symposium, 1995

ja	?	nee
58	–	2

Commentaar
'Past bij gevoel voor relatieve grootte van getallen.'
'Hoort onder afdeling humor.'
'Is tegenpool van schattend rekenen.'

2

25.999 Kippen geroosterd

Van onze correspondent

Bij een brand op de boerderij van de familie K. in Hellendoorn zijn 25.999 kippen omgekomen. In de loods waarin de brand woedde, bevonden zich 26.000 kippen. Eén kuiken kon aan de vlammen ontsnappen.

De brand ontstond in een leegstaande schuur, vermoedelijk ten gevolge van kortsluiting en sloeg door de harde wind over naar de loodsen, waarin zich de kippen bevonden. De schade bedraagt ruim een half miljoen gulden.

figuur 2 (uit: 'Proeve II')

ja	?	nee
57	2	1

Commentaar
'Antistof tegen het automatische precieze rekenen (cijferen).'
'Context niet overtuigend, zouden er best precies 26.000 kunnen zijn.'

3

Onverwachte tegenvaller in begroting van 18 miljard

Door een onzer redacteuren

DEN HAAG, 20 SEPT. In het voorwoord van zijn eerste Miljoenennota meldt minister Zalm een belastingmeevaller. Door het 'gunstiger conjunctuurbeeld' komt het financieringstekort van het rijk volgend jaar bijna twee miljard lager uit dan bij het opstellen van het regeerakkoord nog werd gedacht.

Maar minister Zalm wordt ook geconfronteerd met een - kleine - tegenvaller. De persen die de Miljoenennota drukken, moesten worden gestopt omdat in het kleurendiagram van de uitgaven van het Rijk een fout was geslopen.

Het financieringstekort zou volgend jaar uitkomen op 18,6 miljoen gulden. Dat is 18.581.400.000 gulden te laag, want het tekort van het rijk bedraagt volgend jaar 18,6 miljard gulden.

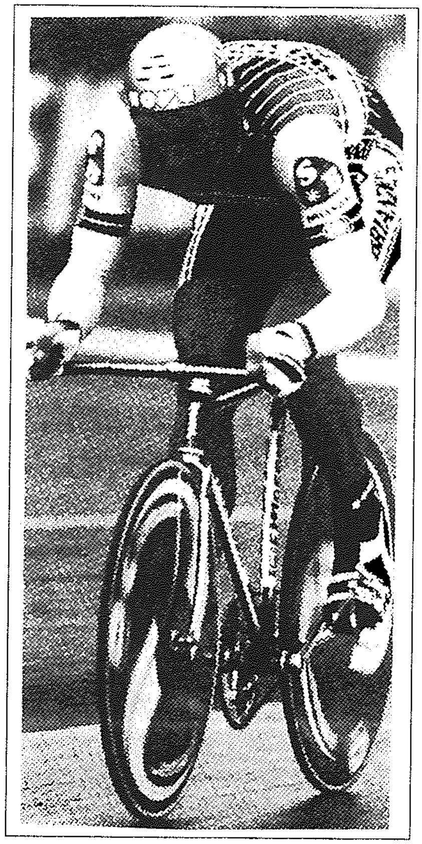
figuur 3

ja	?	nee
18	10	32

Commentaar
'Belang in het licht van algemene doelstellingen.'
'Mooie verbinding tussen grote getallen en kommagetallen.'
'Geen kommagetallen erbij betrekken.'
'Wel kommagetallen maar dan niet zo, maar wel via meten.'
'Een miljard is niet voorstelbaar.'
'Context is niet geschikt voor kinderen.'

4

Dit is de wielrenner Francesco Moser op zijn speciale fiets. Op 19 januari 1980 verbeterde hij op deze fiets het wereld-uurrecord.
Dat record stond sinds 1972 op naam van de Belg Eddy Merckx.
Merckx reed toen 49,43195 kilometer.
Moser doorbrak de magische grens van 50 kilometer en reed 50,809 kilometer.



Merckx: 4 9 , 4 3 1 9 5

Moser: 5 0 , 8 0 9 ☐ ☐

Hoeveel is het verschil

figuur 4: (uit 'Reken & Wiskunde' Opdrachtenboek 5b, pag.24)

Nadere toelichting

De betreffende records kunnen kritisch bekeken worden. Is een precisie in centimeters reëel?

Hoe zou dat gemeten moeten worden? (Men berekent het record door de wielrenner na één uur rijden de laatste ronde te laten voltooien. Dan gaat men het veelvoud van ronden (van driehonderd meter, vierhonderd meter of vijfhonderd meter) en de precieze tijd die daarvoor nodig was, terugrekenen naar precies één uur). Hoe precies is één ronde gemeten? (Meestal wordt die opgegeven in centimeters nauwkeurig.)

Wat gebeurt er met de meetfout indien, bij een vierhonderd meterbaan, zo'n 125 ronden worden afgelegd?
En ten slotte: hoe groot is het verschil?
Een van de antwoorden (maar er zijn meer correcte antwoorden mogelijk) luidt bij *afronden*:

$$\begin{array}{r} 50{,}809 \text{ km} \\ 49{,}432 \text{ km} \\ \hline 1{,}377 \text{ km} \end{array} -$$

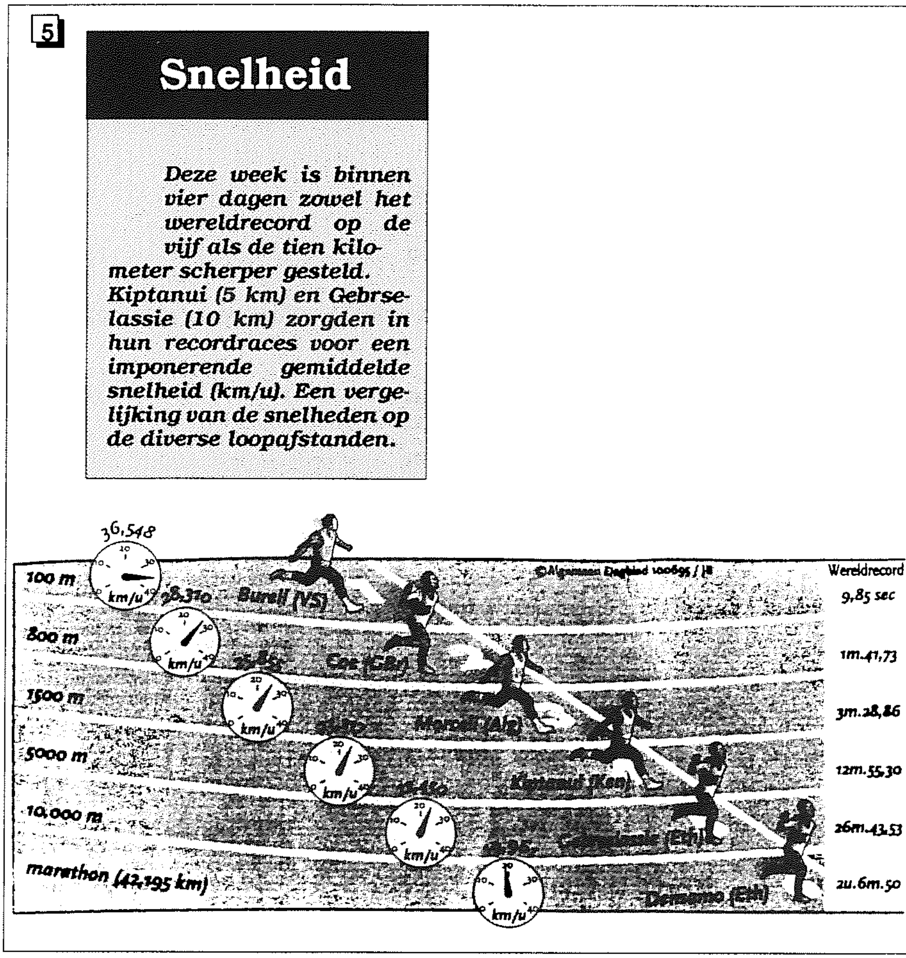
Maar de betreffende antwoorden zouden ook via *afkappen* gevonden kunnen zijn. Dan krijgen we:

$$\begin{array}{r} 50.809 \text{ km} \\ 49{,}431 \text{ km} \\ \hline 1{,}378 \text{ km} \end{array} -$$

En men zou ook anders te werk kunnen gaan en tot antwoorden kunnen komen waarin foutenmarges worden aangegeven (maar daar zijn we ook op de conferentie niet verder op ingegaan).
De bovenstaande oplossingen via afronden dan wel afkappen, geven een plausibel antwoord en zijn desgewenst het meest geschikt voor de basisschool, althans indien men dit aftrekken van (afgeronde) meetgetallen tot de basisstof zou willen rekenen.
Hoe oordeelt men daarover?

ja	?	nee
25	6	29

Commentaar
'Kritisch beschouwen van meetresultaten past bij gecijferdheid.'
'Belangrijk in verband met algemene doelstellingen.'
'Via interactief onderwijs.'
'Kommagetallen verbinden met meten is heel goed.'
'Context is belangrijk, en die is hier te ingewikkeld.'
'Dit is te ingewikkeld voor onderwijsgevenden, daar komen brokken van.'
'Wel voor Pabo, niet voor basisschool.'
'Verrijkingsstof, geen communaal doel, wel een differentieel doel.'



figuur 5

Nadere toelichting

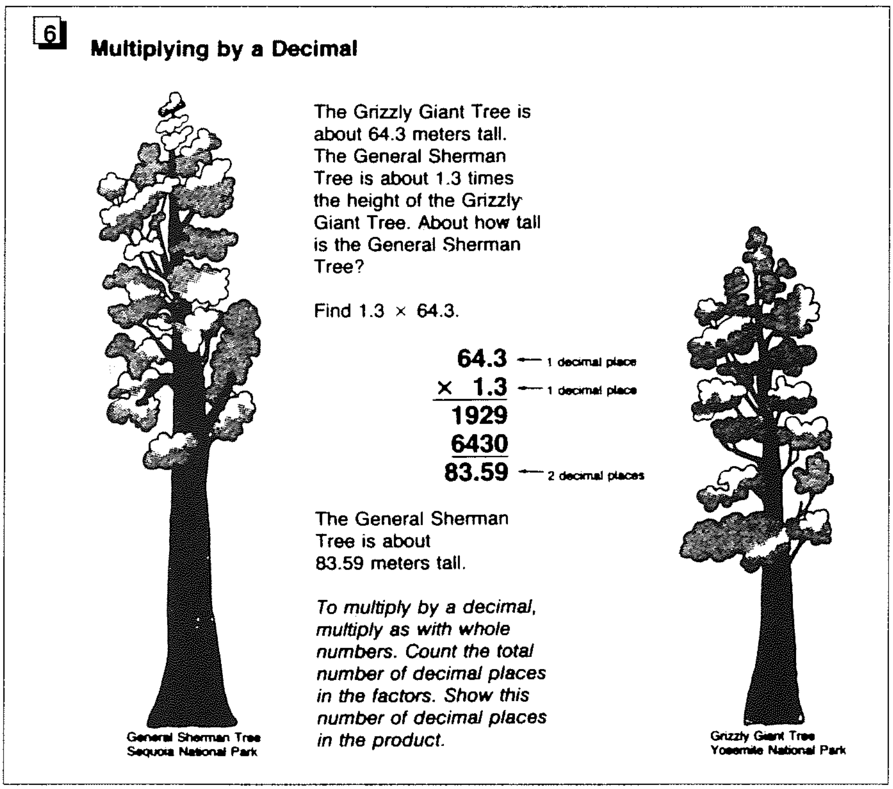
De snelheid van 9,85 seconden over honderd meter wordt omgerekend tot 36,548 kilometer per uur.

De nauwkeurigheid van de tijdmeting is nauwkeurig tot op honderdsten van seconden. Of anders gezegd: de onnauwkeurigheid is éénhonderdste seconde (via afronden of afkappen zit in de tijd van 9,85 seconden een marge van die grootte). In afstand omgerekend, is dat een onnauwkeurigheid van ongeveer één decimeter (want in één seconde legt Burell ongeveer tien meter af, dus in 0,01 seconden één decimeter). Deze (maximale) fout wordt vervolgens opgeblazen met een factor 360 (360 × 10 seconden = 1 uur). Dus wordt de marge maximaal 360 decimeter oftewel 36 meter (36 meter meer bij afkappen, of plus of min achttien meter bij afronden).

Conclusie: de afronding op meter nauwkeurig in 36,548 kilometer is ongepast. Beter zou zijn om in dit geval als antwoord 36,55 of 36,6 kilometer per uur te geven.
Moet dit 'opblazen' van relatieve fouten in de basisschool aan de orde worden gesteld?

ja	?	nee
14	10	36

Commentaar
'We weten niet of dit wel haalbaar is; eerst maar eens onderzoeken.'
'Ik vind juist dit opblazen van fouten heel belangrijk.'
'Alleen iets voor hoogbegaafde leerlingen.'


6 **Multiplying by a Decimal**

The Grizzly Giant Tree is about 64.3 meters tall. The General Sherman Tree is about 1.3 times the height of the Grizzly Giant Tree. About how tall is the General Sherman Tree?

Find 1.3 × 64.3.

$$\begin{array}{r l} 64.3 & \leftarrow \text{1 decimal place} \\ \times\ 1.3 & \leftarrow \text{1 decimal place} \\ \hline 1929 & \\ 6430 & \\ \hline 83.59 & \leftarrow \text{2 decimal places} \end{array}$$

The General Sherman Tree is about 83.59 meters tall.

To multiply by a decimal, multiply as with whole numbers. Count the total number of decimal places in the factors. Show this number of decimal places in the product.

figuur 6

Nadere toelichting
Wat is de hoogte van de 'Grizzly Giant Tree' precies aangegeven! Tot in decimeters nauwkeurig. Hoe is men in dit Amerikaanse rekenboek aan deze hoogte gekomen?

Dat kan in dit geval slechts worden gegist natuurlijk. Maar wellicht is de reden dat de oorspronkelijke maat van een van de bomen in voet is gegeven - vermoedelijk 275 voet - en dat deze omgerekend is in meters.
Neemt men voor één voet 30,4 centimeter, dan komt men zo uit op $275 \times 30,4$ centimeter is 83,6 meter voor de 'Sherman Tree'. En op $83,6 \div 1,3 \approx 64,30$ meter voor de 'Grizzly Tree'! De hoogte-opgave via 275 voet is een passende maat van nauwkeurigheid. Omrekening ervan in meters levert een niet-passende quasi-nauwkeurigheid op.
Voorts valt op dat eerst over ongeveer 1,3 keer zo groot wordt gesproken (met een marge van een tiende) maar dat vervolgens met die factor precies wordt gerekend. Dit levert een hoogte op van de 'General Sherman Tree' tot in centimeters nauwkeurig! Men kan zich vervolgens afvragen wat wel een passend antwoord van 'ongeveer 1,3 keer 64,3 m' in deze context zou zijn. De rek die in dit product zit kan op verschillende manieren worden onderzocht.
Ten eerste kan dat met behulp van de rekenmachine. Maximaal kan het product van deze afgeronde getallen zijn:
$1,35 \times 64,35 = 86,8725$
En de ondergrens is:
$1,25 \times 64,25 = 80,3125$
Dat is een marge van krap vijf meter, terwijl het antwoord een nauwkeurigheid in centimeter suggereert.
Ten tweede kan de spreiding ook globaal via hoofdrekenen worden bepaald - een meer inzichtelijke aanpak.
De marge van een tiende in de factor (ongeveer) 1,3 levert, vermenigvuldigd met ruim 64 een rek op van zes meter (drie meter boven die 83,5 en drie meter beneden ervan).
Een passend antwoord (op dit op zich onzinnige probleem) zou 84 meter zijn...

ja	?	nee
10	6	44

Commentaar
'Wel zoiets doen, maar dan meer als activiteit, opdat de leerlingen iets van deze problematiek ervaren.'
'Voor hoogbegaafden.'
'Een differentieel doel.'
'Zelfs niet haalbaar voor onderwijsgevenden.'
'Wel afronden in verband met meten, misschien ook wel optellen en aftrekken van meetgetallen, maar niet vermenigvuldigen en delen.'

2 Slotsom

Optellen en aftrekken van afgeronde gehele getallen die relatief veel verschillen, of dezelfde operaties met afgeronde en precieze getallen - zie de vraagstukken 1 en 2 - in aansprekende dan wel grappige contexten wordt door de geraadpleegde zestig deskundigen vrijweleenstemmig tot het basisschoolprogramma gerekend. De motivering wordt vooral gezocht in de algemene doelstelling van 'gecijferdheid'.
Indien daarbij kommagetallen worden betrokken gaan de opvattingen uiteenlopen - het minst bij optellen en aftrekken, het meest bij vermenigvuldigen.
Afgeronde meetgetallen blijken meer geschikt geacht te worden dan grote getallen als miljoen en miljard en met ook een komma erin.
De kwestie van het 'opblazen' van meetfouten wordt door velen te moeilijk geacht voor de basisschool en door sommigen zelfs te lastig voor leraren en Pabo-studenten.
We zullen in Proeve III B over 'kommagetallen' tamelijk terughoudend moeten zijn over het rekenen met afgeronde getallen en de aanbevelingen daaromtrent uiterst verantwoord moeten onderbouwen - zoveel is uit het voorgaande wel duidelijk geworden.
De kwestie van het afronden bij meten wordt algemeen belangrijk geacht - ook als daar kommagetallen bij betrokken zijn - maar ten aanzien van het opereren met meetgetallen is men veel voorzichtiger.
We danken de respondenten hartelijk voor hun beredeneerde opinies.