
Implementatie van realistische meetkunde op de basisschool

E. de Moor
Freudenthal instituut, Universiteit Utrecht

1 inleiding

Onder de titel 'Meetkunde, moet dat?' heb ik tijdens de Panama najaarsconferentie van 1995 een voordracht gehouden over inhoud, doel en programmatische invulling van het vak meetkunde op de basisschool binnen het huidige realistische reken-wiskundeonderwijs. Een artikel, waarin een aantal praktische vragen over het realistische meetkundeonderwijs aan de orde gesteld zijn, wordt gepubliceerd in het tijdschrift 'Willem Bartjens'.¹ Tijdens dezelfde conferentie hebben J. Janssen (Cito) en ik een werkgroep geleid over het zogenoemde 'PIMBO'-project, dat staat voor Project Innovatie Meetkunde Basis Onderwijs.

Over dit laatste project worden in het 'Tijdschrift voor nascholing en onderzoek van het reken-wiskundeonderwijs' artikelen gepubliceerd.² Om een goed beeld te krijgen van de huidige situatie is het aan te bevelen genoemde artikelen in samenhang met het onderhavige stuk te beschouwen. Voor degenen die ook in de historie van het meetkundeonderwijs in Nederland geïnteresseerd zijn, verwijs ik naar eerdere publikaties.³ In dit artikel wil ik enkele kwesties betreffende de leerplanontwikkeling en de implementatie zowel in historisch opzicht als met het oog op de toekomst aan de orde stellen.

2 leerplanontwikkeling sinds 1970

In Nederland werd in 1889 de vormleer afgeschaft als vak voor de lagere school ten faveure van het tekenen, dat toen overigens een sterk geometrisch karakter had. Toen eind jaren zestig het 'Wiskobas'-project van start ging, werd ook meetkunde als onderwerp weer opgepakt. Het diende opnieuw ontwikkeld te worden.

Er zijn twee belangrijke vragen waarvoor men gesteld wordt bij het ontwerpen van een inleidend meetkundeprogramma:

1 Leid je de stof af uit de wetenschappelijke meetkunde?

2 Begin je met het verkennen van de ruimte?

Het eerste leidt onherroepelijk tot een structuralistisch programma, zoals verschillende uitwerkingen van de 'New Math'-periode hebben laten zien. Het tweede uitgangspunt biedt de mogelijkheid tot een meer natuurlijke, genetische aanpak, waarbij overigens weer twee mogelijkheden zijn: men kiest voor een meer empirische aanpak (veel plakken, knippen, experimenteren) of men maakt 'het begrijpen van de ruimte' tot de kern van het onderwerp.

Zowel de structurele als de empirische aanpak hadden hun invloed op de eerste 'Wiskobas'-ontwerpen, maar ook de ideeën van Ehrenfest uit het begin van deze eeuw dienden vaak als uitgangspunt.⁴ Tegelijkertijd begon binnen de 'Wiskobas'-groep een rijke bron te werken, die overborrelde van originele ontwerpen en die later tot het realistische reken-wiskundeonderwijs met meetkunde zou leiden. Aanvankelijke invloeden van de structurele richting waren onder meer: roostermeetkunde, topologische onderwerpen (doorloopbaarheidsproblemen), transformatie-aspecten van de meetkunde (symmetrieën, translaties, enzovoort), tangram en veelvlakken. Uit de empirische richting waren het experimenten en meetactiviteiten (oppervlakte, inhoud, en dergelijke), spijkerbord en grafieken die opgeld deden. Maar de toen ontstane ontwerpen waren toch het meest min of meer oorspronkelijke ideeën, die aan de omringende wereld en de fysische realiteit ontleend waren. Deze waren in te delen naar losse activiteiten, thema's en projecten.

activiteiten, projecten en thema's

Van de projecten en thema's noem ik: 'Het papieren tovenaarsfeest', 'Waterland', 'Gulliver', 'Zon zien', 'Tijd, afstand en snelheid op aarde', 'Met de groeten van de reus', 'Een mooie rode bus', 'Een blokje om', 'Vierkubers', 'Schip Ahoy', 'Kavelland' en zo meer, alle te vinden in de leerplandelen van het 'Wiskobasbulletin'.⁵

Voor activiteiten verwijs ik naar de publikaties over meten, bussen en blokken, de fiets, afstanden bepalen, grafieken, blokkenbouwsels, aanzichten, schaduwen, vergrotingen, verkleiningen, transformaties, spiegelen, foto-opnamen, vouwen, bouwplaten en uitslagen, oriënteren, richting en hoek. Deze zijn ook te vinden in genoemde leerplanpublicaties, maar tevens in de in de jaren zeventig ontworpen boeken voor de 'Pedagogische Academie', de Kleuteropleidingsscholen en in de boeken bestemd voor de 'Heroriënteringcursus voor onderwijzers'. Een enorme ideeën-voorraad, een bron die naar mijn idee nog steeds aan te boren is of opnieuw als uitgangspunt voor ontwikkeling van nieuwe materialen bruikbaar is.

eerste model voor een schoolwerkplan

Toen in 1975 leerplandeel 2 van het 'Wiskobasbulletin' gepubliceerd werd, had meetkunde daarin een tamelijk prominente plaats. In de onderbouw werd gesproken van een 'reken-meet-kundige verkenning'. Zelfs was in dit tamelijk utopistische 'model voor een schoolwerkplan' al een aanzet tot een aparte leerlijn meetkunde beschreven. Net zoals voor verhoudingen. De praktische uitwerkingen van de grote problemen, zoals het cijferen en de breuken, moesten grotendeels nog aangepakt worden. Het was voor die tijd een spectaculair plan, maar voor de praktijk van alledag nog in statu nascendi. Er waren nog geen nieuwe methoden op de markt. En in de voorlopende vernieuwings-experimenten had meetkunde bepaald nog weinig prioriteit. Wel werden in dit boek al enkele aspecten van de meetkunde genoemd, waarmee een zekere systematisering van dit domein beoogd werd. Ik meen dat ze voor het eerst door Wijdeveld geformuleerd zijn: allereerst het 'oriënteren en lokaliseren' naar aanleiding van de door Van den Brink bedachte term 'wiskundige wereldoriëntatie'. Ook gebruikten Wijdeveld en De Jong toen al de term 'construeren' in een ruimere betekenis dan de Euclidische (passer en liniaal). En het 'redeneer'-aspect stond toen al in de meetkundige activiteiten centraal. De kernvraag van de echt meetkundige activiteiten was toen reeds en is in de opvatting van de realistische meetkunde nog steeds *waarom?* En dat op die vraag ook op een elementair niveau ingegaan kan worden, maakten de toen naar voren gebrachte ideeën omtrent basale meetkundige activiteiten al duidelijk, waarvan nu enkele voorbeelden.

waarom?

- Waarom is de vouwlijn van een stuk papier een rechte lijn?
- Waarom loopt de maan met je mee, als je op een rechte weg loopt?
- Waarom worden je schaduwen groter als je van een lantaarnpaal wegloopt?
- Hoe kaatst een lichtstraal tegen een spiegel en waarom zo?
- Hoe rolt een plastic bekertje en waarom zo?
- Hoe bepaal je van een perspectief tekening van een rechthoek het midden en waarom zo?
- Waarom zitten er aan de verschillende bouwplaatjes van een kubus altijd evenveel plakrandjes?
- Hoeveel verschillende huisjes kun je met vier kubussen bouwen en waarom?
-

Het verschil van de realistische meetkunde met een louter empirische aanpak van de meetkunde zijn nu precies die waarom- en denkvragen die er bij gesteld dienen te worden. Dit punt - namelijk dat meetkunde vooral te

maken heeft met denken en redeneren en met het verklaren van de verschijnselen van de ruimte – dat is wat bedoeld wordt met het *begrijpen van de ruimte*. Dit roept de vraag op of dat niet te moeilijk zou zijn voor de kinderen van de basisschool. Vereist dat niet een hoge mate van taalvaardigheid? Freudenthal was indertijd voor het laagste niveau tevreden met de uitspraak: 'Ik zie het zo.' Het naar waarde schatten en accepteren van een dergelijk antwoord vereist enige didactische gevoeligheid. In veel gevallen is de evidentie zo duidelijk dat men inderdaad op het aanschouwelijke 'bewijs' kan afgaan, maar op welke gronden accepteer je als onderwijsgevende dit antwoord? Neem bijvoorbeeld het volgende: een mier zit op een feesthoedje (kegel) en wil de kortste weg van A naar B kiezen. Wie zal iets in kunnen brengen tegen het uitvouwen van het hoedje en het gebruik van een liniaal om de kortste weg te tekenen? Maar dan moet dat uitvouwen als omgekeerde bewerking van het construeren van het hoedje wel als argumentatie gebruikt worden.

Een ander voorbeeld dat uit de aanschouwing duidelijk mag worden, is het zogenaamde stok-schaduw model. Hierbij wordt gebruik gemaakt van de visuele eigenschap dat de schaduwen van de zon lengten geven, die evenredig zijn met de objecten. Dit is een gevolg van de paralleliteit van de zonnestralen. Maar ook hier geldt weer dat door concrete ervaringen dit aanschouwelijke model van de 'gelijkvormigheid' post gevat moet hebben. Hoe zie je dat het 'dat zie je zo' ook werkelijk begrepen is door de kinderen?

visualiseren

Het meetkundige stok-schaduw model, dat door Streefland werd geïntroduceerd, ging al in een vroeg stadium van de leerplanontwikkeling een rol spelen en werd een van de visualiseringsmiddelen bij verhoudingen. Maar er werden steeds meer meetkundige modellen ontwikkeld, waardoor het meetkundige element een bindend middel leek te worden voor het totale reken-wiskundeprogramma. Er ontstond een gedachte, mede door Freudenthal verdedigd, dat de meetkunde vooral ten behoeve van het rekenen gebruikt zou dienen te worden als een mogelijkheid tot visualiseren. Alles wat maar een visueel karakter had werd daarmee onder het kopje meetkunde geplaatst: getallenlijnen, getallenconfiguraties, stroken, sectordiagrammen, boomdiagrammen, grafieken, schema's, plattegronden, schetsmatige tekeningen, enzovoort. Het valt niet te ontkennen dat al deze visualiseringsmiddelen een meetkundig karakter hebben. Echter, in de meeste gevallen wordt hierbij een meetkundige structuur in dienst van een toepassing gesteld. Zeer terecht en didactisch van grote betekenis. Maar indien men meetkunde in het basisonderwijs alleen aan de functie van het visualiseren zou willen koppelen, zou men de meetkundige structuren zelf, die voor het verklaren van de ruimte zo belangrijk zijn, uit het oog kunnen verlie-

zen. In de moderne realistische reken-wiskundemethoden wordt in ruime mate van visualiseringsmiddelen gebruik gemaakt. Visualiseren is dus mijns inziens een didactisch hulpmiddel en niet een doel op zich van de meetkunde.

meetkunde als bindend element

Een andere reden om meetkunde te motiveren aan het eind van de jaren zeventig en in de jaren tachtig was, dat meetkunde genoemd werd als middel om grotere gehelen van het reken-wiskundeonderwijs aan te onderwijzen. Hierdoor kon de samenhang van verschillende onderdelen (rekenen, verhoudingen, meten en meetkunde) beter tot zijn recht komen. Daarbij kan gedacht worden aan projecten, zoals 'Het papieren tovenaarsfeest', 'Waterland', 'Met de groeten van de reus', 'Schip Ahoy', maar ook aan meer thematische onderwerpen als de verkenning van de kubus, verdeling van het Noordzeeplat, het vouwen van verschillende kokers uit een A-4 blad en zo meer.

Voor de schoolboekenschrijvers is het een probleem om goede beschrijvingen te geven voor een dergelijke meer projectmatige aanpak. Ook voor de praktijk van alledag is het organiseren en de didactische vormgeving van een dergelijk onderwijsleerproces geen sinecure. Vooral omdat de feitelijke meetkundige doelstellingen impliciet zijn, is het voor de modale leraar lastig de onderliggende meetkundige begrippen en relaties en de bijbehorende doelen tot hun recht te laten komen. Het meetkundeonderwijs van nu blijft dan ook vaak beperkt tot wat losse opgaven op papier, waarbij de zo noodzakelijke concrete verkenning veelal achterwege blijft. Niet zelden stuurt men daarbij helaas op vaste oplossingsprocedures en eenduidige antwoorden aan, zo is althans mijn indruk uit de verslaggeving uit de praktijk.

vraag naar een leerlijn

Als eerste en overigens enige deelleerlijn is indertijd oppervlakte, inhoud en omtrek door Ter Heege en De Moor uitgewerkt.⁶ De vraag bleef bestaan of iets dergelijks ook voor het gehele domein meetkunde mogelijk was. De eersten die daartoe een poging hebben ondernomen, waren de leden van het team van 'Onderwijs en Sociaal Milieu' (OSM) te Rotterdam, die in hun methode 'Rekenen & Wiskunde' zo'n tien à vijftien jaar geleden de meetkunde een volwaardige en unieke plaats hadden toegedacht. Later hebben Gravemeijer en Kraemer, respectievelijk coördinator en mede-auteur van de methode, hun opvattingen over het belang, inhoud, structuur en didactiek van de meetkunde op de basisschool neergelegd in het boek 'Met het oog op ruimte'.⁷ Weer later heeft Kraemer als het ware een vervolg hierop geschreven, waarin hij behalve de motieven van de meetkunde ook een

theoretische verantwoording van het ontwikkelingswerk neergelegd heeft.⁸ Met name in dit laatste boek wordt grote nadruk op het bindende en toepasbare karakter van de meetkunde gelegd. Zeer interessant is, dat Kraemer meent dat meetkunde ook mogelijkheden biedt voor de 'kansarmen onder onze leerlingen'.

Waren er geen voorbeelden van leerlijnen meetkunde? Natuurlijk bestonden die, met name kenden de buitenlandse structuralistische programma's zulke schema's. Deze onderscheidden meestal de meetkunde naar de onderwerpen: Shape, Size en Measurement, waarbij met name het domein Shape het meest meetkundig was. Dit betrof echter hoofdzakelijk: vormen en figuren, transformaties, constructies met passer en liniaal, patronen, krommen, projecties en topologie. Het meeste was echter weer afgeleid uit de wiskunde en niet uit de realiteit en de wereld van het kind.

Ook De Moor en Treffers hadden in 1974 al een poging gedaan voor het opstellen van een globaal meetkundeprogramma voor de basisschool.⁹ Reeds toen werden verschillende aspecten (het waren er destijds tien) aan de meetkunde onderscheiden. Een aantal daarvan vertoonde nog duidelijk de kenmerken van het structuralisme. Nu onderscheiden we er nog maar vijf: 'oriënteren en lokaliseren', 'viseren en projecteren', 'ruimtelijk redeneren', 'transformeren' en 'construeren en meten'.¹⁰

We mogen echter niet vergeten dat vanaf het midden van de jaren zeventig ook door 'Wiskivon', de afdeling wiskunde in het voortgezet onderwijs van het toenmalige 'Instituut Ontwikkeling Wiskunde Onderwijs' (IOWO) een grote impuls aan de nieuwe opvattingen over meetkunde is gegeven. Hieruit is de zogenoemde 'kijkmeetkunde', die thans in de brugperiode van het voortgezet onderwijs centraal staat, voortgekomen.¹¹

langzame groei naar consensus

Zoals bekend wordt het onderwijs sterk bepaald door tradities. Dit betekende dat het in de jaren zeventig, maar ook toen er in de jaren tachtig realistische methoden met meetkunde op de markt verschenen, moeilijk was om aandacht voor dit nieuwe vak te wekken. Voor de kleuterschool bestond er tot het midden van de jaren tachtig een vanzelfsprekende belangstelling voor de ruimtelijke ontwikkeling van de kinderen. Het zag er naar uit dat voor de totale basisschool, die in 1985 van start ging, slechts door de leerboeken en het officiële programma een volwaardige plaats voor meetkunde bepaald kon worden.

In 1984 vond in Noordwijkerhout, op initiatief van de 'Nederlandse Vereniging tot Ontwikkeling van het Reken-WiskundeOnderwijs' (NVORWO) de belangrijke conferentie '10 voor de basisvorming' plaats. Toen werden bijna driehonderd betrokkenen, waaronder tachtig basisschoolleraars, geraadpleegd over inhoud en vorm van een 'nationaal plan voor het reken-

wiskundeonderwijs op de basisschool'. Er werd onder meer het oordeel van de aanwezigen gevraagd over meetkunde als vak van onderwijs op de basisschool. Hoewel over dit onderdeel de consensus het minst was, was toch ongeveer 70 procent het eens met de toen geformuleerde omschrijving voor meetkunde:

'Meetkunde is een rijke bron voor wiskundige activiteiten. Het gebied bevat zoveel aspecten dat er zeer verschillend tegenaan gekeken kan worden. Voorkeur verdient een niet-formele, niet-structuralistische aanpak. Positief gesteld: context-rijk, realiteitsgebonden, ruimteverkenkend meetkundeonderwijs dat aansluit bij de geëigende leerstofgebieden van rekenen en meten, dient een volwaardige plaats in het reken-wiskundeonderwijs te krijgen.'¹²

Aldus Treffers en De Moor in 1984 en ik meen dat we wat de intentie betreft daar nog steeds achter kunnen staan. We kregen dan ook het 'nihil obstat', en het resulteerde in een omschrijving van de doelen zoals neergelegd in het eerste deel van de 'Proeve'. Overigens de omvang van meetkunde in de 'Proeve' is relatief gering in vergelijking met de aandacht die er in de jaren zeventig aan besteed werd in het eerdergenoemde leerplan-deel 2.

doelbeschrijvingen

De toelichting in 'Proeve I' werd echter helderder doordat nu een aantal aspecten onderscheiden worden, die een betere basis bieden om de doelstellingen te beschrijven. De latere omschrijving van de kerndoelen van de Commissie Herziening Eindtermen kan zo geïnterpreteerd worden dat ze in overeenstemming zijn met de oorspronkelijke doelen uit de 'Proeve'.¹³ Maar het woord 'kan' maakt direct duidelijk dat ook andere interpretaties mogelijk zijn. Het is geenszins duidelijk dat het om de realistische meetkunde gaat, zoals hiervoor beschreven. Dergelijke doelen zijn te algemeen geformuleerd om het meetkunde-onderwijs naar de geest waarin bedoeld weer te geven. Daarvoor zijn op de allereerste plaats goede onderwijsleermaterialen nodig, maar ook beschrijvingen van het feitelijke onderwijs waaruit het proces van het leren van meetkunde afgelezen kan worden. Om echter een zekere eenheid in het totale onderwijsaanbod te bewerkstelligen, zijn deze doelbeschrijvingen toch nodig. Ik spreek hier van een zekere eenheid, omdat de feitelijke uitwerking natuurlijk in handen blijft van de leraar voor de klas. Men kan zich voorstellen dat sommigen voor meetkunde een projectmatige aanpak prefereren boven een thematische of een incidentele aanpak via korte lesactiviteiten. Maar toch is het nodig daarbij een aantal algemene leerstofdoelen na te streven, wil men niet in een al te vrijblijvende situatie geraken.

In een artikel in 'Jeugd in School en Wereld' hebben Treffers en De Moor de officiële kerndoelen voor meetkunde nader gespecificeerd.¹⁴ De door

hen genoemde doelstellingen luiden thans als volgt:

- 1 De leerlingen beschikken over een begrippenkader om de ruimte meetkundig te ordenen. Tot deze begrippen horen plaats, rechte lijn, richting, hoek, afstand, evenwijdigheid, plattegrond, kaart, coördinaten,...
- 2 De leerlingen kunnen redeneren naar aanleiding van eenvoudige ruimtelijke problemen zoals met bouwsels, foto's, schaduwen en eenvoudige meetkundige figuren.
- 3 De leerlingen kunnen eenvoudige meetkundige constructies maken aan de hand van bouwsels, bouwplaten, vormen,...
- 4 De leerlingen kunnen meten, rekenen en met grafieken werken naar aanleiding van eenvoudige (reële) situaties. In het bijzonder zijn zij in staat schaaltekeningen te maken en te lezen.
- 5 De leerlingen kunnen meetkundige patronen herkennen, analyseren en voortzetten. Ze hebben enige vaardigheid met spiegelen, lijn- en puntsymmetrieën, vergroten en verkleinen van figuren.
- 6 De leerlingen kunnen in eenvoudige gevallen de effecten van vergrotingen en verkleiningen (op omtrek-oppervlakte; oppervlakte-inhoud) verklaren en toepassen.
- 7 De leerlingen kunnen op inzichtelijke wijze, door middel van completeren en omstructureren, de oppervlakte c.q. inhoud van eenvoudige meetkundige figuren bepalen.

In doelstelling 1 staat de kern van de realistische meetkunde. Het is als het ware de gereedschapskist voor de meetkunde. In de doelstellingen 2, 3 en 5 worden de typische meetkundige, niet getal-gebonden activiteiten opgesomd, die de kern van het 'begrijpen van de ruimte' weerspiegelen. In de doelstellingen 4, 6 en 7 zien we de verbinding met het meten en het rekenen, zoals grafieken, schaal en de oppervlakte/inhoud-vragen. Inmiddels is via enquêtes van het PIMBO-project duidelijk geworden dat zowel de basisschoolleraren als de opleiders en begeleiders bijna unaniem achter de opname van meetkunde als nieuw kerndoel staan.

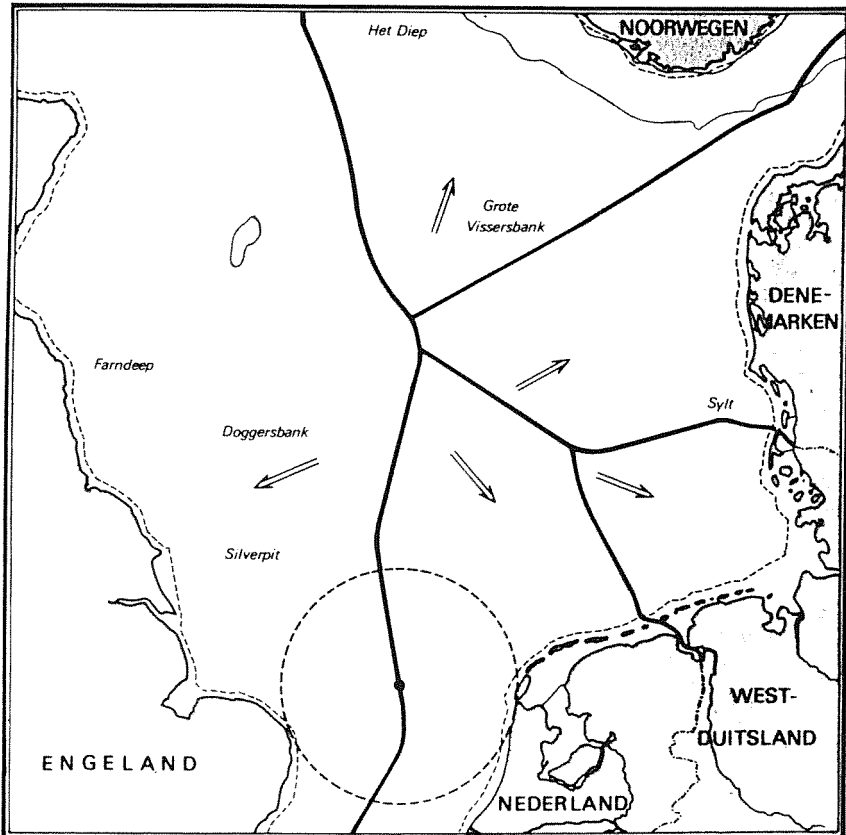
3 belang van basale ervaringen

Teneinde een brede oriënteringsbasis te leggen voor een aantal basale meetkundige concepten wil ik er voor pleiten hieraan in de basisschool regelmatig aandacht te besteden.

Neem zoiets als afstand. Je denkt vanuit je eigen meetkundige verleden meteen aan de Euclidische definitie als 'kortste verbinding van twee punten'. Maar je kunt ook aan afstand denken tussen een punt en een lijn, of van twee of meerdere figuren, zoals afstand in de realiteit zich vaak aan ons voordoet.

- Hoe moest het Noordzeeplat verdeeld worden in verband met de aan-

spraken op gaswinning. Wijs een willekeurig punt aan: bij welk land ligt dat punt het dichtst bij? Kunnen we een methode vinden om precies de grenslijnen te vinden (fig.1)?



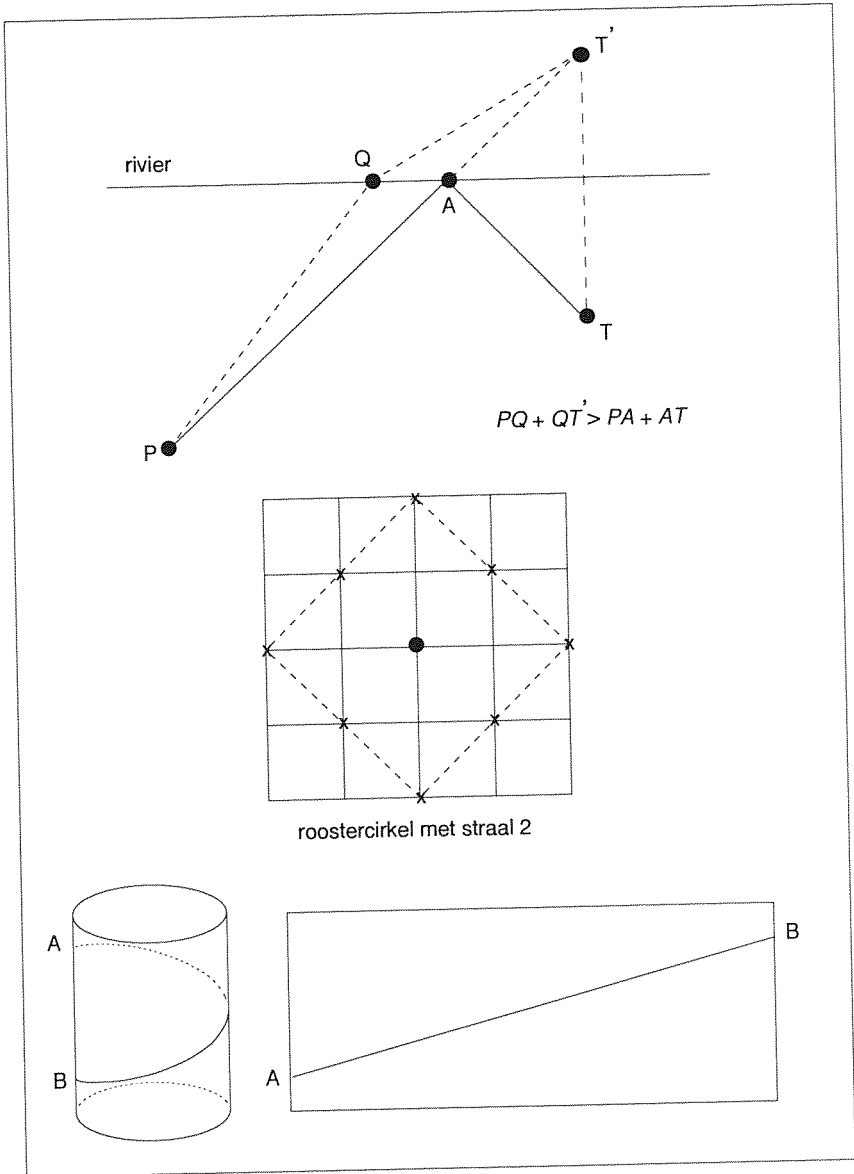
figuur 1: verdeling Noordzeeplat
(bron: 'Pythagoras', jaargang 15, april 1976)

Ik geef dit voorbeeld niet, omdat ik vind dat het in het basisschoolprogramma zou moeten komen, maar om ons bewust te maken dat het begrip afstand meer inhoudt dan de ingewortelde idee van de kortste afstand tussen twee punten.

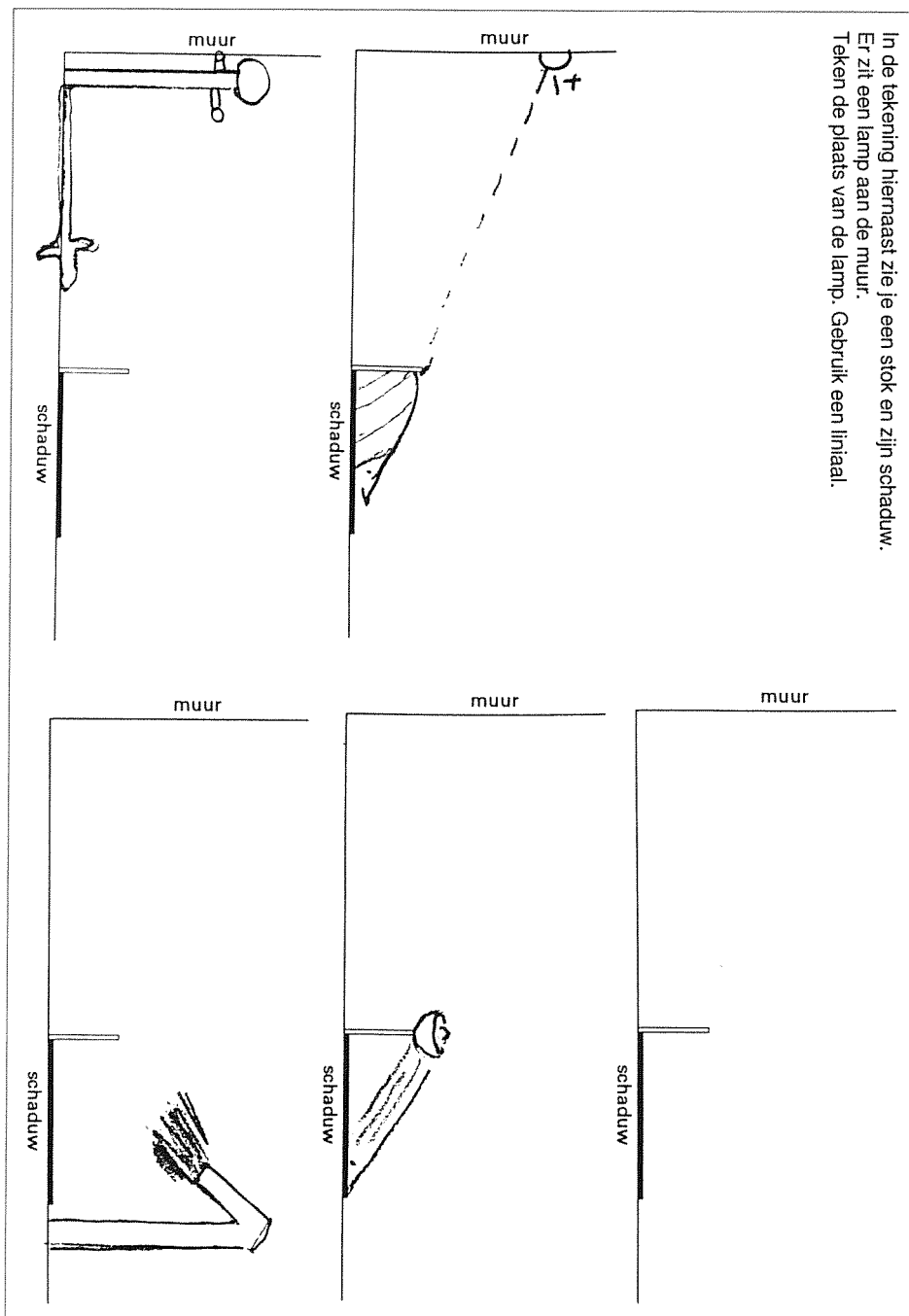
Ook de volgende voorbeelden maken dit duidelijk.

- Een padvinder P loopt naar zijn tent T . Hij moet nog langs de rivier om een emmer met water te vullen. Wat is de kortste weg (fig.2a)?
- Wat is kortste route op een stadsplan? Zoek alle punten op het stadsplan, die op twee straten van een bepaald punt liggen. Vergelijk deze cirkel met een gewone cirkel (fig.2b).

- Een mier zit op een conservenblik. Hij wil van A naar B, maar hij wil ook in één keer het blik rond. Hoe moet de kortste weg geconstrueerd worden (fig.2c)?



figuur 2a, 2b en 2c



figuur 3a b c d e: opgave uit de PIMBO-toets 1995

Men zou bij sommige opgaven nog kunnen twijfelen aan het realiteitsgehalte, maar wat is de kortste route tussen twee punten op aarde? Hoe ziet dat er op een platte kaart uit?¹⁵ Mooi zijn ook de visualiseringen, die bijvoorbeeld door de Nederlandse Spoorwegen gebruikt worden waarbij de afstanden niet in kilometers worden aangegeven, maar in reistijd. Weer zo'n aspect van het begrip afstand, dat mijns inziens ook op de basisschool aan de orde kan komen.

Een ander basaal begrip is de rechte lijn, zoals die modelmatig gebruikt wordt bij het verklaren van schaduwbeelden. In de in 1995 afgenomen PIMBO-toets was een van de opgaven het tekenen van de lichtbron bij een gegeven schaduw. Gezien de gemiddelde goedscore (50 procent) niet zo eenvoudig als het lijkt. Daar bijna alle kinderen de behoefte hadden een echte lamp te tekenen, bestaat kennelijk nog niet het besef dat een schematische aanduiding voldoet. Maar vooral de foute oplossingen doen vermoeden dat leerervaringen, waarbij de waarom-vraag weer centraal stond, niet optimaal zijn geweest (fig.3).

Het gaat bij problemen over schaduwvorming om twee basale begrippen: lichtbron als punt (centrale projectie) en evenwijdige stralen van de zon (parallelprojectie). De essentiële concepten, die hierbij aan de orde komen zijn onder meer:

- lichtstraal als rechte lijn;
- verschil tussen zon- en lamschaduw;
- projecteren van een figuur op een vlak of samenstel van vlakken;
- verhoudingstrouwe en niet-verhoudingstrouwe afbeelding;
- leren schematiseren.

Het zijn typische concepten en vaardigheden, die door ervaring gevormd kunnen worden, maar dan moet daar in het onderwijs af en toe wel aandacht aan besteed worden. Het vereist organisatie om dergelijke experimenten in het onderwijs uit te voeren. In de bestaande methoden heb ik voor dit punt nog weinig aanwijzingen gezien. En dat terwijl er mijns inziens toch met eenvoudige middelen leuke en zinvolle activiteiten zouden zijn te organiseren.

4 programma

Hiervoor schetste ik reeds enige pogingen, die eerder zijn ondernomen om een longitudinale leerlijn voor meetkunde op te zetten. Het gevaar van een te strakke en gedetailleerde leergang is dat men de leerstof gaat atomiseren. En daarmee haal je het hart uit het unieke van de meetkundige ver-

schijnselen, die nu juist in hun totaliteit (als Gestalt) in didactisch opzicht de grootste rijkdom vertonen. Men kan een dergelijk gevaar waarnemen in sommige kleuterprogramma's, waar van het ordenen, seriëren en klassificeren soms gortdroge lesjes gemaakt zijn.

Een en ander ontslaat ons echter niet van de plicht toch een omschrijving voor een programma te geven, al is het alleen al om een zekere eenheid in de methoden en de na te streven einddoelen te bewerkstelligen.

Allereerst zal door de auteurs van de 'Proeve', waartoe ik mijzelf mag rekenen, een globale leerstofomschrijving gegeven moeten worden. Het hiervoor beschreven idee van de basale meetkundige activiteiten schept de verplichting hiervan een opsomming te geven met voorbeelden van didactisch-methodische uitwerkingen. Bij enkele onderwerpen (zoals oppervlakte) kan gebruik gemaakt worden van een meer gestructureerde opbouw. Daarbij kan aan hetgeen nu in de methoden als resultaat van de vroegere ontwikkelingen voorkomt natuurlijk niet voorbij gegaan worden. Een analyse hiervan lijkt mij echter op zijn plaats.

Overigens bieden de realistische methoden thans reeds een ruim arsenaal aan meetkundige opgaven, waar men in de praktijk vooralsnog een redelijk meetkundeprogramma uit kan samen stellen. Waar het vooral om gaat is de didactische component te versterken en het belang nader te onderbouwen. Er wordt wel eens gesuggereerd dat de kinderen de bedoelde noties vanzelf zouden ontwikkelen en dat veel van deze opgaven terug te voeren zijn op het gebruik van het gezonde verstand.

Anderzijds is meermalen gewezen op de negatieve werking van kleuterprogramma's, waarin het ruimtelijke ontwikkelingsaspect ontbreekt, waardoor de cognitieve ontwikkeling van de wiskundefaculteiten van de kinderen achter zou blijven.

Gezien de resultaten op sommige items van de PIMBO-toets, meen ik dat wat meer gericht meetkundeonderwijs wezenlijk kan bijdragen aan:

- het verwerven van meetkundige noties;
- het verwerven van oplossingsmethoden;
- het ontwikkelen van schema's;
- vaardigheden ten aanzien van tekenen en construeren;
- het verwerven van basale kennis en feiten;
- het verwerven van structuren;

maar vooral aan:

- het ontwikkelen van een bepaalde attitude, die nodig is om de ruimte te organiseren en te ordenen om deze te begrijpen;
- het überhaupt ontwikkelen van een wiskundige attitude.

5 motiveringen

Vroeger werd de meetkunde gemotiveerd vanwege de grote vormende waarde die er vanuit zou gaan. Het is nooit bewezen dat er werkelijk algemene transfer van goede denkgewoonten naar andere leergebieden zou bestaan vanuit de wiskunde of de meetkunde in het bijzonder. Anderzijds lijkt het gezonde verstand toch te zeggen dat je van het oplossen van meetkundige problemen zeker niet dommer zult worden. Er zijn zelfs onderzoeken aan te wijzen dat zogenaamde korte transfer, dus binnen een domein, welzeker bestaat.

Het argument van de vormende waarde wordt tegenwoordig, althans officieel, vrijwel niet meer te berde gebracht. Het praktische nut van meetkunde is evident. Niet alleen in algemene zin, dat men meetkundige fenomenen uit de realiteit kan verklaren of tot onderwerp van onderwijs kan maken. Ook in meer specifieke zin heeft de meetkunde nut, namelijk, zoals hiervoor gezegd, voor het leren organiseren en ordenen van de ruimte. Tevens kunnen basisvaardigheden als het hanteren van constructiemiddelen (ik doel onder meer op het maken van behoorlijke constructieteekeningen) tot dit praktische nut gerekend worden.

Verder staat een realistisch meetkundeprogramma in dienst van de latere kijkmeetkunde en de wat meer formele meetkunde in het voortgezet onderwijs. Deze zogenoemde voorbereidende waarde draagt bij tot het ideaal van een longitudinaal meetkunde-curriculum van vier tot veertien jaar. Natuurlijk heeft meetkunde ook een intrinsieke of specifieke waarde. Het is een prachtig vak, dat op zich de moeite waard is om te bestuderen. Ook mogen we, zeker voor de basisschool, het esthetische aspect niet uit het oog verliezen. Het maken van mooie figuren en patronen, het gebruik van symmetrieën, het ontdekken van structuren in de natuur, het oog krijgen voor kunstzinnige geometrische elementen in kunst, vormgeving en architectuur, het zijn aspecten, die kunnen bijdragen aan de algehele culturele ontwikkeling van de basisschoolleerling.

Al met al gaat van het vak, zo blijkt uit de praktijkervaringen, ook een motiverende waarde uit. Zelfs blijken soms zwakke rekenaars hierin op te bloeien. Laten we ten slotte wat de motiveringen betreft besluiten met Freudenthals onvergetelijke woorden dat je 'de kinderen zoveel moois toch niet mag onthouden!'

6 samenvatting

Meetkunde is als nieuw kerndoel weer opgenomen in het programma van

de basisschool. Onderzoek wijst uit dat het veld (leraren, opleiders en begeleiders) vrijwel unaniem het belang erkennen en de doelen onderschrijven. Het Cito zal meetkunde als onderwerp in de eindtoets basisonderwijs betrekken. De ontwikkeling van toetsvragen voor meetkunde zal door het Cito voortgezet worden.

De realistische methoden bieden vooralsnog voor alle leeftijdsgroepen een ruim scala aan meetkundige activiteiten aan. De ontwikkeling van een totale longitudinale, gedetailleerde leerlijn is in het kader van het realistisch reken-wiskundeonderwijs niet aan te bevelen. Er bestaat behoefte aan een algemene programmatische beschrijving ten behoeve van een zekere eenheid van na te streven doelen. De didactische component van meetkunde op de basisschool heeft nog verdere ontwikkeling.

noten

- 1 Moor, E. de (in druk). Meetkunde, een nieuw kerndoel. *Willem Bartjens*, 15(5).
- 2 Er zijn twee artikelen over het PIMBO-project voor het 'Tijdschrift voor nascholing en onderzoek van het reken-wiskundeonderwijs' in voorbereiding. Eén betreft de enquêtes, het andere gaat over de resultaten van de leerlingtoets. De geplande verschijningsdata zijn: vóór en na de zomer van 1996, respectievelijk jaargang 14 nummer 4 en jaargang 15 nummer 1.
- 3 Voor een samenvattend artikel over de vormleer in de negentiende eeuw verwijst ik naar: Moor, E. W.A. de (1995). Vormleer - An innovation that failed. *Paedagogica Historica*, XXXI, 103-123.
Van dit artikel zal een Nederlandse bewerking verschijnen in het juni-nummer van het tijdschrift 'De Negentiende Eeuw'.
- 4 Zie voor de invloed van T. Ehrenfest-Afanassjewa op het Nederlandse meetkundeonderwijs:
Moor, E. de (1993). Het 'gelijk' van Tatiana Ehrenfest-Afanassjewa. *Tijdschrift voor Nederlands Wiskundeonderwijs*, 15-24.
- 5 Het 'Wiskobasbulletin' was een uitgave van het voormalige Instituut Ontwikkeling Wiskunde Onderwijs (later Freudenthal instituut) te Utrecht. Het kent negen jaargangen (1971-1980). Met name de zogenaamde elf leerplandelen (1975-1980) bevatten een rijke bron van praktische ideeën.
- 6 Zie de leerplandelen 7 en 9.
- 7 Gravemeijer, K. & J.M. Kraemer (1984). *Met het oog op ruimte*. Tilburg: Zwijssen.
- 8 Kraemer, J.M. (z.j.). *Meetkunde op de basisschool. Didactiek, inhoud en structuur in de methode 'Rekenen & Wiskunde'*. Rotterdam: School Advies Dienst.
- 9 Moor, E. de & A. Treffers (1974). Het aanvankelijk meetkunde-onderwijs(3), 'Meetkunde op de basisschool'. *Euclides*, 50(3). 81-98.
- 10 Zie: Treffers, A., E. de Moor & E. Feijs (1989). *Proeve van een nationaal programma voor het reken-wiskundeonderwijs op de basisschool. Deel I. Overzicht einddoelen*. Tilburg: Zwijssen.
- 11 *Achtergronden van het nieuwe leerplan Wiskunde 12-16*, band 2 (1992). Utrecht: Freudenthal instituut/Enschede: SLO.
- 12 Cadot, J. & D. Vroegindewij (1986). *10 voor de basisvorming rekenen/wiskunde onderzocht*. Utrecht: OW & OC.
- 13 Zie hiervoor: Treffers, A. & E. de Moor (1994). De stille revolutie in het reken-

- wiskundeonderwijs. *Jeugd in School en Wereld*, 79(3).
14 *ibid.*
15 Brink, F.J. van den (1996). Bolmeetkunde in het basisonderwijs. *Tijdschrift voor nascholing en onderzoek van het reken-wiskundeonderwijs*, 14(2), 39-49.