

---

# Bolmeetkunde in het basisonderwijs - een onderzoek

J. van den Brink  
Freudenthal instituut, Universiteit Utrecht

## 1 inleiding

### de ene meetkunde is de andere niet

Waarom zouden we bolmeetkunde op de basisschool geven? Is vlakke en ruimtemeetkunde al niet mooi genoeg? Onze ervaringen (Van den Brink, 1991, 1994a) duiden erop dat als het over 'de wereld' gaat, leerlingen in het basis- en voortgezet onderwijs allereerst aan een platte wereldkaart denken. Niet aan een globe. In groep 7 gaf een leerling op de wereldkaart de juiste richting noord aan ('Naar boven'), maar op de globe kon hij de Noordpool niet vinden. Bolmeetkunde houdt zich onder andere bezig met deze verschillen tussen kaart en globe, tussen plat en bol.

Zoals u weet bestaan er verschillende soorten meetkunde: ruimtemeetkunde, kijkmeetkunde, differentiaalmeetkunde, boldriehoeksmeting, vlakke meetkunde en bolmeetkunde (Van den Brink, 1994b). Elk legt accenten op specifieke verschijnselen uit de realiteit. Die verschijnselen zijn soms met elkaar in strijd. Bijvoorbeeld, de aarde is bol, maar ook plat. Het ligt er maar aan hoe je ernaar kijkt volgens de bol- of volgens de vlakke meetkunde. Prikkelende kwesties zijn daar het gevolg van: 'Waarom gaat een vliegtuig van Amsterdam naar Vancouver bijna over de Noordpool?' 'Waarom is de grootcirkel de kortste afstand over de bol, maar lijkt deze op de wereldkaart gewoonlijk een omweg?' 'Waarom geeft de grootcirkel de startrichting aan, maar moet je op een grootcirkelkoers toch steeds bijsturen?'

### gedachtentrajecten

De waarde van de bolmeetkunde ligt onder andere in de verschillende *series* gedachteconstructies die je vragenderwijs aan leerlingen kunt ontlokken. Ze geven een logisch verband tussen eigenschappen weer. Deze 'treinen van gedachten' zijn vaak verrassend, maar toch goed oproepbaar. Ik noem er één.

'Als je de twee evenwijdige randen van je tafel elk verlengt tot grootcirkels om de aarde heen, dan snijden ze elkaar - en zijn ze dus niet evenwijdig'. 'Een grootcirkel is een lijn-recht-vooruit-over-de-aarde. Links en rechts van die lijn is immers evenveel aarde. Een parallelcirkel heeft links en rechts niet evenveel aarde. Een parallelcirkel is dus een rondje. Dat rondje is echter wel parallel aan een lijn-recht-vooruit, namelijk de evenaar'. 'Twee evenwijdige spoorrails zijn geen lijnen-recht-vooruit, want dan zouden ze grootcirkels zijn en elkaar snijden, zoals de tafelranden van daarnet. Ze zijn net als twee parallelcirkels twee rondjes aan weerszijden van een grootcirkel'.

Verrassend, niet?, zo'n gedachtentraject rondom 'evenwijdigheid', hét hete hangijzer in de meetkunde. Allerlei problemen, van 'dagelijkse' verschijnselen tot meetkundige gedachtenconstructies kunnen u tot verslaving toe bezighouden om steeds meer trajecten te zoeken.

### **verschillende gedachtentrajecten**

De grootcirkel als 'lijn-recht-vooruit' over het aardoppervlak met links en rechts evenveel aarde, maakte een eerste gedachtentraject mogelijk. Een tweede gedachtentraject in meer metrische zin met lengte- en hoekmeting krijg je als je de grootcirkel als de 'kortste afstand' of als de 'startrichting' tussen twee punten op aarde neemt. Bijvoorbeeld met metingen en berekeningen (schaal) op een globe. Grootcirkels van de globe vormden een derde gedachtentraject.

'De evenaar als model voor grootcirkel.'

'Elke andere grootcirkel ligt zowel op het noordelijk- als op het zuidelijk halfrond.'

'Elke grootcirkel snijdt dus de evenaar.'

'Elke grootcirkel snijdt dus elke andere grootcirkel (want de evenaar stond model voor grootcirkel).'

'Dus ook: twee lijnen-recht-vooruit snijden elkaar altijd.'

In de chaotische mengeling van intuïtieve ideeën van de leerlingen werd getracht een netwerk van verbanden te leggen (een gedachtentraject). Er zijn natuurlijk verschillende manieren om verschijnselen met elkaar in verband te brengen en deze uiteindelijk te formaliseren.

Wiskundigen dichten zichzelf graag de mogelijkheid toe om eerst wat te grasduinen alvorens te formaliseren. Maar dat moet ook voor kinderen gelden, schrijft Freudenthal.<sup>1</sup>

Je kunt bijvoorbeeld verschillen tussen soorten meetkunde ontdekken. Een vierde gedachtentraject werd gevonden in het vergelijken van bol- en vlakke meetkunde (fig. 1).

Je kunt zeggen dat zònder eigen constructies geen echte formalisering in de meetkunde door leerlingen mogelijk is omdat hetgeen dat geformaliseerd zou moeten worden eenvoudigweg ontbreekt. Nieuw was ook het in-

zicht dat meetkundige formaliseringen tot de eigen produkties behoren en dus, ofschoon ze over hetzelfde domein gaan, sterk kunnen verschillen.

<p><i>vlakke meetkunde</i>  punt in het vlak  rechte lijn  1 één rechte lijn door twee punten</p> <p>2 twee rechte lijnen zijn of evenwijdig of snijden elkaar.</p>	<p><i>bolmeetkunde</i>  punt op de bol  grootcirkel  1 er kunnen oneindig veel grootcirkels door twee punten gaan (als die elkaars polen zijn)  2 twee grootcirkels snijden elkaar altijd. Als ze elkaar niet snijden is tenminste één van de twee geen grootcirkel. Enzovoort</p>
---	--

figuur 1

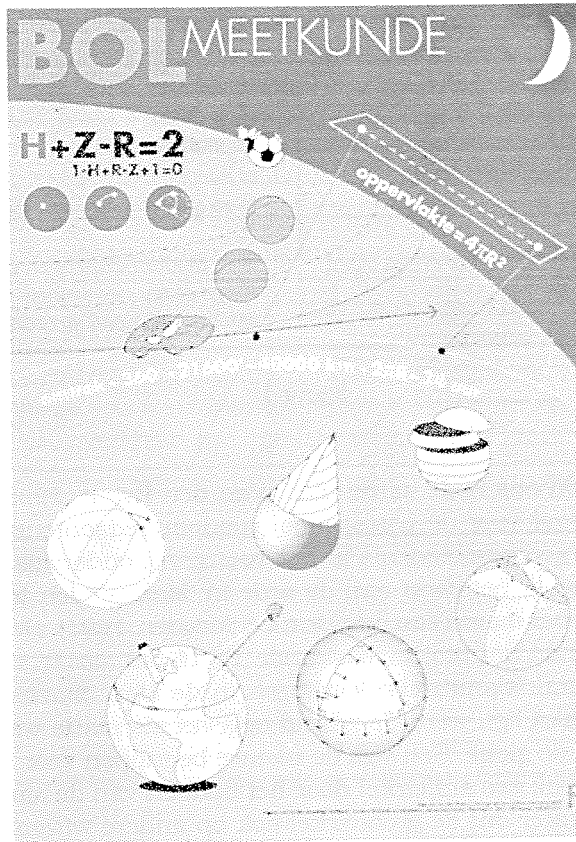
### een leesboek

Het leesboek 'Bij ons is de aarde plat' (Van den Brink, 1995c) bevat een spannend verhaal voor de basisschool rondom gedachtrajecten. Het boek heeft een voorgeschiedenis in het voortgezet onderwijs. Daar kwam bolmeetkunde voor het eerst aan de orde in 'Mekka', een leerlingpakket voor klas 3 van het mavo (Van den Brink & Meeder, 1991). Het pakket was ontwikkeld binnen het project Wiskunde 12-16 om aan te sluiten bij het toenemend aantal Islamitische leerlingen in de klas. Startend vanuit de vraag waar Mekka ligt, werd de wereld opgevat als platte wereldkaart en vergeleken met de globe. Eén van de nieuwe begrippen voor de leerlingen was de grootcirkel, een snijcirkel door het midden van de aarde. In 'zoeklessen' bleek echter dat de grootcirkel ook op andere wijzen kon worden omschreven die aanleiding gaven tot de eerder genoemde gedachtrajecten.

### een poster

Na dit ontwikkelingswerk voor het voortgezet onderwijs verzamelde en bedacht ik bolmeetkundige modellen en vraagstukken. Dit mondde uit in een poster (fig.2), een leesboek en een aantal experimenten voor het meetkundeonderwijs. Op de poster staan figuren: een bol in plakken gesneden, een auto die niet kan sturen, een bol-draaideur, een ballon boven de horizon, een glazen bol om doorheen te kijken en andere figuren die modellen uit de bolmeetkunde representeren.<sup>2</sup>

Ook het leesboek 'Bij ons is de aarde plat' doet dat, maar dan op een heel eigen wijze.



figuur 2: poster

## 2 een meetkunde-leesboek

Vier kinderen - Willemien, Kikkie, Noortje en Frans - zijn hoofdpersonen in het verhaal 'Bij ons is de aarde plat'. Ze bouwen een hut in de duinen en beleven allerlei avonturen.

Een geheimzinnige professor X zorgt ervoor dat de emoties hoog opplaaian als hun kleine hut blijkt te kunnen vliegen. Problemen, ruzietjes en vondsten wisselen elkaar af: hoe sturen we de vliegende hut? Waar gaat de reis heen? Is dat te zien op de globe of op een kaart? Is de wereld rond of plat of beide tegelijk? Het eerste hoofdstuk eindigt met een waarlijke vondst van Noortje op deze laatste vraag.

### ***'de mensen zijn gewoon te kort'***

Het stond ook echt in de krant. In grote letters: DUS TOCH! DE WERELD IS ROND EN PLAT. 'Leugens', vond Frans. 'Neem nou mijn ballon, die is echt bol, net als de aarde.' 'Ik weet het', riep Noor opeens, 'Ik weet het.' 'De aarde is plat en bol tegelijk. Als Frans die ballon nog verder opblaast, zo groot als de hele aarde, dan wordt hij niet alleen groter, maar ook platter!' 'Platter?', riepen ze door elkaar. 'Platter?' 'Hoe zo, platter?' 'Boller, zal je bedoelen.' 'Door blazen wordt ie boller.' 'Nee, hoor,' riep Noor met hoge trillende stem, 'hoe groter de ballon, hoe platter.'

Ondanks deze oplossing van Noortje bleef het probleem 'hangen' tussen de hoofdpersonen van het verhaal. De aarde plat? De aarde bol? 'De mensen zijn daarvoor gewoon te kort', meende een leerling toen de klas tot taak kreeg het verhaal voort te zetten.

### ***een bal gehakt***

Een ander moment uit het leesboek:

'Wat heb jij op je brood', vroeg Noor. 'Een bal gehakt.' 'Rolt die er dan niet vanaf?' 'Nee, hij is in plakjes.' 'Lekker zeg. Mag ik er één? Dan krijg jij straks een schijfje sinaasappel.' Frans twijfelde of hij het wel zou doen. Langzaam deed hij zijn boterhammen van elkaar. Daar lagen de plakken gehakt. 'Goed', zei hij. 'Maar dan moet je niet meteen de grootste nemen.' 'De grootste? De grootste? Ik zie helemaal geen grootste plak', plaagde Noor. 'Waar ligt die dan?' Maar Frans riep boos: 'Nou, wat je nu pakt, is toch de grootste. Dat zie je toch.' Kikkie en Willemien schoten in de lach. 'Frans, dan moet je straks ook niet de grootste sinaasappelschijf nemen, hoor.'

Dergelijke ruzietjes zijn herkenbaar en daarmee konden we de kinderen op begrippen (bijvoorbeeld op grootcirkels) attent maken. In het leesboek worden door de hoofdpersonen ook experimenten met de globe en bol uitgevoerd. De leerlingen in de klas kunnen die controleren. Zo kon het leesboek de speciele vormen tussen verschillende activiteiten, te weten: lezen, experimenteren en de poster bekijken.

## **3 ontwikkelingsonderzoek op school**

Leesboek, poster en experimenten op de globe zijn onderwerp van onderzoek geweest op een basisschool. 25 leerlingen van groep 7 van de openbare basisschool 'De Saffier' in Purmerend werkten er aan mee. Ik stelde me twee vragen. Ten eerste: 'Is bolmeetkunde nodig of wenselijk in het basisonderwijs?' Gezien de ervaring met leerlingen uit het voortgezet onderwijs leek het wenselijk om toch wat meer aandacht te besteden aan de glo-

be als model voor de wereld naast de platte wereldkaart. Maar gold dat ook op de basisschool? Mijn tweede vraag luidde: 'In welke vorm is bolmeetkunde haalbaar in het basisonderwijs?' Ik wilde de drie 'middelen' die ik ontworpen had (het leesboek, de poster en enkele experimenten) onderzoeken. En ik had daarvoor een geschikte presentatie op het oog: het feuilleton.

### **het feuilleton**

Drie lessen zijn door mij verzorgd en gegeven. De taak die ik de klas stelde was om gezamenlijk een leesboek te ontwerpen. Het leesboek was overigens al geschreven, maar werd, als een feuilleton, een hoofdstuk per les, aangeboden.

Na elk hoofdstuk (drie in totaal) werd de leerlingen gevraagd een vervolg te bedenken. Het originele verhaal heeft later enkele veranderingen ondergaan naar aanleiding van de tekeningen en teksten die de leerlingen bijdroegen.

### **werkbladen**

Na de eerste les stelde de onderwijzer vast dat de tekst bij zijn leerlingen veel vragen oproep. Maar waar bleven de antwoorden? 'Wat leren ze eigenlijk?', vroeg hij zich af en stelde voor om de ontbrekende antwoorden in de tekst op te nemen. Ik vond dat niet passen in een leesboek dat je voor je plezier leest. Bovendien waren de open vragen ook zo bedoeld: de leerlingen moesten zelf hun oplossingen zien uit te vissen.

Uiteindelijk vonden we elkaar in mijn suggestie om na elk hoofdstuk bepaalde kernproblemen opnieuw te laten bekijken met behulp van werkbladen. In de tweede les werden daarom door de leerlingen eerst drie werkbladen over de eerste aflevering gemaakt. In circa tien minuten waren ze klaar. Daarna lazen ze aflevering 2 en 3 en begonnen na 25 minuten op eigen kracht een slotverhaal te bedenken. Alle werkbladen begonnen met een stukje uit het verhaal ter herinnering:

Frans twijfelde of hij het wel zou doen. Langzaam deed hij zijn boterhammen van elkaar. Daar lagen de plakken gehakt... (fig.3).

Dan volgen de vragen:

Nummer de plakken zodat je in die volgorde weer de hele gehaktbal van Frans krijgt.

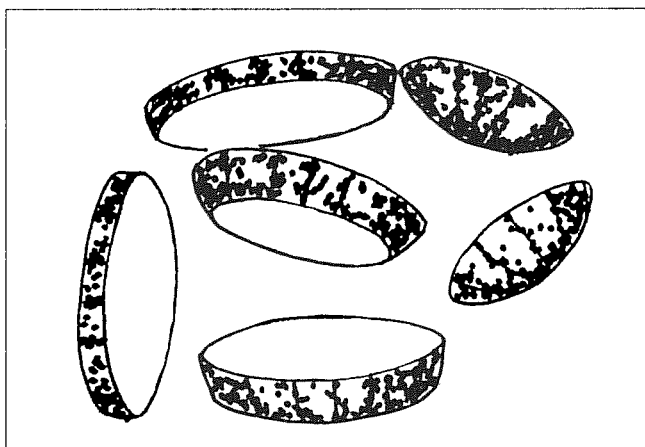
De bedoeling was dat de leerlingen naar aanleiding van de grootte van elke plak de plaats van de plak zouden aangeven. Achttien leerlingen (72 procent) deden dat goed, zeven (28 procent) deden het fout.

Onderweg naar huis, vliegend in hun hut, maakten de kinderen een quiz voor professor X. Ze bedachten zelf allerlei vragen en antwoorden.

De leerlingen in de klas werd gevraagd zelf een vraag voor de professor X-quiz te bedenken. Enkele voorbeelden:

- 'Als je met een autootje rechtdoor rijdt, kom je dan bij Vancouver? Hoe? Kun je (niet) beter naar het noordwesten gaan?' (Mirjam).
- 'Wat is het verschil tussen rijden over een globe en rijden over de wereldkaart van de *gps* (*gps* is een plaatsbepalingsapparaat van professor X)?' (Jeroen, Frank).
- 'Hoe komt het dat de aarde rond is en dat je er dan toch op kunt lopen?' (Suzanne).
- 'Hoe komt het dat als je aan de onderkant staat dat je er dan niet van afvalt?' (Jakko, Sharon).

In het heelal is blijkbaar geen 'beneden'. Je valt niet 'naar beneden', maar altijd 'naar elkaar toe' (door de zwaartekracht). Bolmeetkundig gezien betekent *beneden*: 'In de richting van het middelpunt' (verticaal). Blijkbaar zijn de leerlingen al met dit probleem bezig.



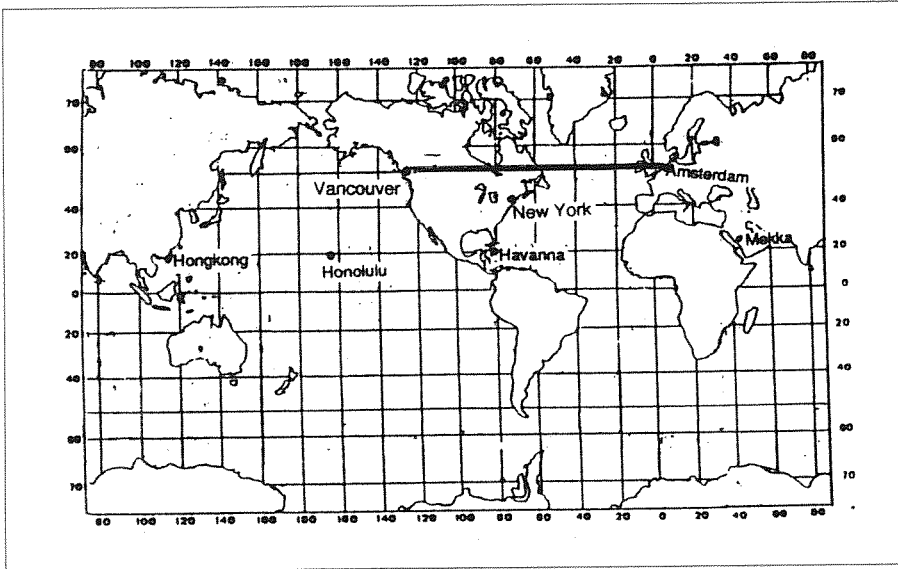
figuur 3: plakken gehakt

### experimenteren is 'verrassingen organiseren'

Met enkele groepjes leerlingen - niet met alle - heb ik bolmeetkundige experimenten uitgevoerd (bijvoorbeeld door een autootje over een globe te laten rijden) om later in een vergelijking met de andere leerlingen het belang van deze experimenten voor de begripsvorming te kunnen vaststellen. De globe werd in de klas gehaald en afgestoft. De wereldkaart werd getoond: Amsterdam - Vancouver (fig.4).

Amsterdam en Vancouver werden door Esther en Jessica al snel op de globe gevonden. Daarna wilde ik dat ze met een speelgoedautootje over de parallelcirkel van Amsterdam naar Vancouver reden. Steeds richting west. 'Moet je dan sturen?', vroeg ik. Ze wisten het niet. Ik deed het voor. Ik moest sturen, maar deed net of dat niet hoefde. De meisjes keken toe. Esther deed het na: 'Je moet steeds rondsturen. Je rijdt een rondje. Je voelt

het.' De verrassing om steeds in dezelfde richting (west) te rijden en toch te moeten sturen, bleef echter uit. Ik had de proef niet meteen voor moeten doen, maar eerst goed moeten laten voorstellen! Op mijn vraag: 'Wat gebeurt er als je niet stuurt?', antwoordde Esther: 'Dan duikt hij naar beneden', terwijl ze het vrijwel gelijktijdig uitvoerde.



figuur 4: wereldkaart Amsterdam - Vancouver

### een gelukkige vondst: de richtproef

Toen deed ik een vondst: ik liet het autootje door de leerling 'richten'. 'Kun je het autootje in Amsterdam zo richten dat je niet hoeft te sturen om in Vancouver te komen?' Jessica en Esther zochten zo geanimeerd naar de geschikte richting, dat dit ook een 'klapper' in een klassikale les moest kunnen zijn, dacht ik. Dus deed ik in de laatste les deze proef met de hele klas als gehoor.

Aanleiding was het autootje op de poster (zie figuur 1). Ik liet de kinderen nu eerst uitvoerig voorspellen hoe het autootje zou gaan, deed het voor, maar stuurde het karretje weer moedwillig over de parallelcirkel. Dat werd echter direct ontdekt: 'Niet sturen!' De auto dook omlaag. 'Hoe moeten we nu vanuit Amsterdam in Vancouver komen?', riep ik quasi wanhopig. 'Zonder te sturen? Hoe moet je hem richten?' De leerlingen deden suggesties. 'Ietsje hoger'. Weer misten we Vancouver. 'Nog hoger, langs de Noordpool.' Toen zagen ze hoe Vancouver werd getroffen - een hoeraatje ging op.

Deze richtproef werkte zeer verhelderend. Ook op de Panama najaarsconferentie conferentie was men er zeer over te spreken. Maar hij moet wel in



stapjes worden voorbereid, anders gaat het indrukwekkende ervan af. Je moet goed op je woorden passen. 'Rechte lijn' of 'lijn recht vooruit' of 'kortste afstand' kunnen helpen, maar kunnen het experiment ook doen mislukken. Je moet de verrassingen organiseren. En dat alles vraagt om enige ervaring met het experimenteren en om een precieze uitlijning van activiteiten.<sup>3</sup>

Het grote voordeel van deze experimenten is dat de leerlingen aan den lijve ervaren, dat een noordelijke route moet worden gereden, dat die route 'recht vooruit is' en de kortste. Het verrassende is dat de experimentenwereld (van de auto, maar ook van het bekende elastiekje gespannen over de bol, en dergelijke) en de denkwereld van de modellen op de poster (de 'bol-draaideur' en de ballon boven de horizon) met elkaar zijn te koppelen; de 'kortste afstand', is de 'weg zonder te sturen', is de 'richting'. Het zijn allemaal verschillende verschijnselen in een gedachtentraject rond hetzelfde begrip 'grootcirkel'.

#### **poster zien: feest der herkenning en een start voor experimenten**

Ten slotte werd in de laatste les klassikaal de poster bekeken. Ik hing hem op. Veel kinderen herkenden direct de voorwerpen - vanuit het verhaal. Priscilla: 'Dat is de bal gehakt van Frans.' Ik: 'Hoe ging dat ook alweer?' Priscilla: 'Noor plaagde Frans. Die wilde niet hebben dat ze de grootste plak nam. En toen deed ze net of ze die plak niet zag...'

Het leesboek was een basis geworden om de poster begripend te bekijken. Vrijwel alle poster-figuren komen op de één of andere wijze in het verhaal voor. Degenen die niet in het leesboek voorkomen, lokten in de klas vragen uit: 'Wat is dat, die bol met muts?' De onbekende figuren kunnen misschien nog in het leesboek worden opgenomen en, net als het poster-autootje, tot experimenten leiden.

## **4 reflectie**

Ik onderzocht niet alleen wat haalbaar was op het gebied van de bolmeetkunde in de basisschool, maar ook op welke manieren onderwijs daarin was te geven en waarop we moeten letten. In dit kader trokken zeven verschijnselen sterk mijn aandacht.

#### *- vereenzelviging*

De leerlingen vereenzelvigden zich met de hoofdpersonen van het verhaal. De discussiepunten uit het verhaal werden opnieuw in de klas door de leerlingen zelf opgerakeld. 'Wordt de ballon platter als hij groter wordt?' We kunnen de leerlingen blijkbaar aan het denken zetten door

de hoofdpersonen aan het denken te zetten over bolmeetkundige kwesties of experimenten. Ook de wensen van de leerlingen waren op een sterke betrokkenheid bij de hoofdpersonen. Velen lieten in hun vervolgverhaal de hoofdpersonen professor *X* ontmoeten. Anderen wilden hem zelfs op hun eigen school in Purmerend uitnodigen. Veel tekeningen werden van *X* gemaakt. Het leesboek (lezen, schrijven of vervolgen) is dus een geschikte verpakking om de bolmeetkunde tot eigendom van de leerlingen te maken.

– *het leesboek als zinvolle basis*

Het leesboek kon aanleiding zijn tot experimenten (autootje rijden, ballon opblazen) en tot de introductie van bepaalde begrippen (grootcirkel, pool). Het verhaal blijkt aan posterfiguren een betekenis te kunnen geven: de leerlingen zagen in 'de gesneden bol' de gehaktbal van Frans, bij de 'bol-draaideur' op de poster werd een hele muzikale toedracht uit het leesboek gememoreerd. Omgekeerd gaven posterfiguren die niet in het verhaal voorkwamen, aanleiding tot mogelijke uitbreidingen van het leesboek. Kortom: het meetkunde-leesboek vormt de specie om losse meetkunde-onderdelen met elkaar te verbinden, zowel in de vorm, als naar de inhoud.

– *kaart en globe*

De leerlingen zagen, tot mijn verbazing, de wereld allereerst als platte kaart, niet als bol. Verschillende van hun reacties waren daarop: 'Waar is de Noordpool op de globe?', 'Er zijn twee kortste afstanden: één op de kaart en één op de bol'. 'De kortste afstand op de kaart wordt op de bol ook als kortste afstand gekozen'. Kortom: voor de leerlingen is de kaart een beter model van de wereld dan de globe. En dat vraagt om correctie. Bolmeetkunde op de basisschool is niet alleen wenselijk, maar ook nodig.

– *plaatsbepalings-voorkeur*

De wereldkaart en de globe hebben twee structuren om plaatsen te bepalen: enerzijds de natuurlijke vormen van landen en zeeën en anderzijds het kunstmatige coördinatennet van parallelcirkels en meridianen. De leerlingen kozen voor de landen en zeeën. Die zijn 'echt'. Maar het vaststellen van plaatsen werd daarmee tamelijk grof en onnauwkeurig. Voor verbetering vatbaar.

– *bolmeetkundige ideeën en alledaagse ideeën*

Ik wilde nagaan of ideeën van leerlingen konden bijdragen tot het verhaal. Mijn belangstelling ging daarbij vooral uit naar die ideeën die een bolmeetkundige zin of betekenis hadden. Bijvoorbeeld een gesneden bal gehakt als model voor een globe met parallelcirkels. Maar soms stonden bolmeetkundige ideeën tegenover de ideeën van leerlingen die een verschijnsel even goed konden verklaren. Bijvoorbeeld, 'de hoge

golven' aan zee konden net zo goed als 'de ronding van de aarde' verklaren waarom je een schip niet zag. Ideeën van leerlingen konden ook storend werken. Professor X als schurk of boef bijvoorbeeld, belemmerde de aandacht voor meetkundige vraagstukken, terwijl een sympathieke samenwerking tussen de geheimzinnige X en de andere hoofdpersonen die interesse juist wekte. De gehaktbal, de muzikale bol-draaideur of de ruzie tussen de hoofdpersonen over het feit dat de aarde bol èn plat is, zijn emotionerende situaties met bolmeetkundige inhoud die door de leerlingen goed werden onthouden. Hier ligt een duidelijke taak voor de ontwerper/onderzoeker om bolmeetkundige problemen hun sociale of hun emotionele pedant in het leesboek te geven.

- *verrassende en verhelderende experimenten*

Bolmeetkundige experimenten (bijvoorbeeld autoritjes over de globe) maakten de afwijkende meetkunde op de bol duidelijk voor de leerlingen. Het experiment moest echter niet los staan van voorspellingen waardoor verrassende momenten werden georganiseerd. Het moest nauwgezet worden uitgevoerd, met aandacht voor termen als 'kortste afstand', 'recht vooruit', en dergelijke. In het realistische reken-wiskundeonderwijs moet het doen van proefjes dus niet blijven steken in het louter uitvoeren. De proefjes zijn niet vrijblijvend. De leerlingen moeten voorspellen en daarmee verplicht worden om verbanden te leggen. E. de Moor sprak op de conferentie over het 'begrijpen' van de ruimte - in verschillende betekenissen van dat woord.

- *begripsvorming sturen*

De inhoud van het leesboek, de poster en de experimenten droegen elke op eigen wijze de verschillende verschijningsvormen aan waarin een bolmeetkundig begrip kan voorkomen. Het belangrijkste begrip, de grootcirkel, dook in allerlei gedaanten op: als de kortste snijrand van de draaideur in een bol, het richten en rechtdoor laten rijden van het autootje over de globe tussen twee punten op de bol, als kortste afstand, als lijn-recht-vooruit, bij het opwinden van een kluwen wol, ... Met het leesboek kun je, als ontwerper, de aandacht van de leerlingen op dit scala van mogelijkheden vestigen. Het leesboek functioneerde als een organisatiecentrum voor de begripsvorming tussen al die verschijnselen.

**tot slot**

Het onderzoek 'Bolmeetkunde op de basisschool' heeft eerder meer vragen opgeworpen, dan beantwoord. Hoe zijn gebruikers vertrouwd te raken met de soms bizarre wereld van de bolmeetkunde? Kan iedereen het onderwijzen? Welke onderwerpen moeten zeker aan de orde komen en welke zeker niet? Past het vak binnen de kerndoelen? Hoe kunnen de verschillende le-

rarenopleidingen zich erop oriënteren? Is nader onderzoek nodig naar de rol van bolmeetkundige experimenten in de klas? Hoe moeten de toetsen in dit gebied eruit zien? Hoe kunnen computersimulaties bijdragen? Op de Najaarsconferentie spraken alle 28 deelnemers aan de werkgroep Bolmeetkunde zich uit vóór bolmeetkunde op de basisschool. Hoe? Velen vonden de experimenten op en met de globe zeer inzichtgevend, anderen waren gecharmeerd door de poster en het meetkunde-leesboek als nieuwe didactische werkvormen in de het reken-wiskundeonderwijs. Maar waren zij slechts een kleine enthousiaste minderheid? Ik weet het niet.

### noten

- 1 'Definitions are not preconceived to derive something from them, but more often they are just the last element of analysis, the finishing touch of organizing a subject. Children should be granted the same opportunities as the grown-up mathematician claims for himself, aldus Freudenthal (1971) en hij waarschuwt: 'Geometrical axiomatics cannot be meaningful as a teaching subject unless the student is allowed to perform these activities himself'.
- 2 Bij de poster behoort een informatieboek dat nader ingaat op de vraagstukken en modellen achter de figuren. Het boek bevat lijsten met vragen en antwoorden, toelichtingen en suggesties voor het gebruik van de poster in de klas (in het basisonderwijs of als GWA-onderwerp in het voortgezet onderwijs).
- 3 Een geschikte uitlijning is de volgende:
  - Kaartje zien met Amsterdam en Vancouver .
  - Amsterdam opzoeken op de globe.
  - Vancouver opzoeken op de globe (hint: Vancouver ligt op dezelfde parallelcirkel).
  - De rechte kaartlijn Amsterdam-Vancouver op de globe aangeven (dat is een parallelcirkel). Een lijn oost-west.
  - 'Nu gaan we dit autootje (beter: een vliegtuigje) over de parallel laten rijden ('vliegen') van Amsterdam naar Vancouver. Maar allereerst voorspellen: 'Moet je wel of niet sturen? Wat denk je?'
  - Opmerking:  
Over de parallelcirkel moet je altijd sturen. Links en rechts van de parallelcirkel is niet evenveel aarde, dus maak je een rondje. Maar geef eerst een misleidende opvatting: 'Je gaat steeds naar het westen. Dus niet sturen'. Kijk maar op de kaart.
  - Doe het zelf voor, maar fout: doe alsof je niet stuurt van Amsterdam naar Vancouver.
  - Laat een leerling dit herhalen. Hij of zij voelt dat je wél moet sturen.
  - Vraag: zoek een route Amsterdam-Vancouver over de globe zonder te moeten sturen. Het autootje moet vanaf Amsterdam op Vancouver worden gericht.
  - Teken die kortste route op de bol, nu ook op de kaart (die gaat noordelijk ten opzichte van de parallelcirkel)

## **literatuur**

- Brink, F. J. van den (1991). Mekka. *Nieuwe Wiskrant* 11(1), 80-84.
- Brink, F. J. van den (1994a). Bolmeetkundelessen. *Nieuwe Wiskrant*. 13(3), 28-34.
- Brink, F. J. van den (1994b). Meetkundeonderwijs te midden van theorieën. *Tijdschrift voor Didactiek der  $\beta$ -wetenschappen* 12(2), 130-149.
- Brink, F. J. van den & M. Meeder (1991). *Mekka*. Utrecht: Freudenthal instituut (leerlingenboek en docenten handleiding).
- Brink, F. J. van den (1995a). *Bolmeetkunde*. Utrecht: Freudenthal instituut (poster).
- Brink, F. J. van den (1995b). *Informatieboek bij de poster (experimenteel)*. Utrecht: Freudenthal instituut.
- Brink, F. J. van den (1995c). 'Bij ons is de aarde plat'. Utrecht: Freudenthal instituut (leesboek en werkbladen; in druk).
- Freudenthal, H. (1971). Geometry between the devil and the deep sea. *Educational Studies in Mathematics* 3, 413-435.