Mooie getallen, handigheden en beschrijvingsvormen

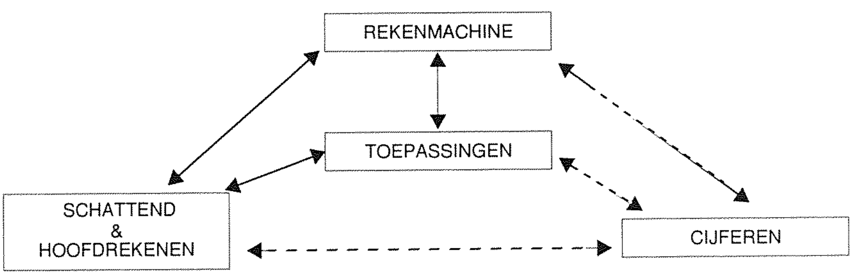
Een reflectie over de kern van adaptief rekenonderwijs

J.M. Kraemer
Instituut voor toetsontwikkeling (Cito), Arnhem

1 inleiding

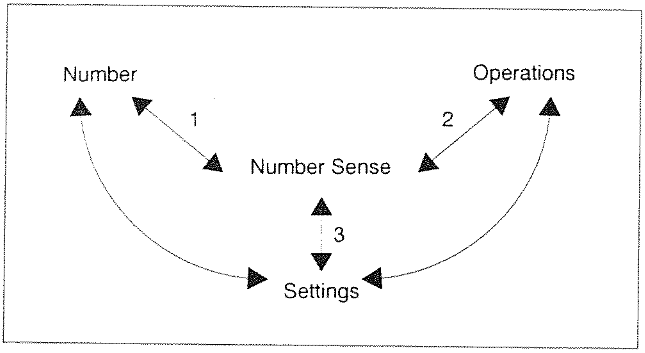
Geheel in overeenstemming met het rekenen van alledag, hebben hoofd- en schattend rekenen een belangrijke plaats in de kerndoelen voor de basisschool gekregen. Wie in deze tijd 'exacte' gegevens precies moet bewerken schakelt de computer en de zakrekenmachine in. We rekenen dagelijks met (afge)ronde getallen, bij benadering en uit het hoofd, wetend hoe er met de bereikte mate van nauwkeurigheid moet worden omgegaan. Hoofd- en schattend rekenen spelen dus de hoofdrol, ook als we de zakrekenmachine als hulpmiddel voor het precies rekenen gebruiken (Treffers & De Moor, 1994).

Deze verschuiving heeft ingrijpende consequenties voor de aanpak en de inrichting van het aanvankelijk rekenen alsmede voor de voortzetting daarvan in de midden en de bovenbouw van de basisschool. Omdat rekenen-wiskunde zo sterk aanwezig is in de realiteit en het handelen van alledag, krijgt het leren mathematiseren van reële contexten en het systematiseren en formaliseren van eigen verworven kennis in de moderne rekenmethoden steeds meer nadruk. De toepassingen staan dan in het onderwijs centraal en wel in directe verbinding met hoofdrekenen, schattend rekenen en in mindere mate met het slim gebruiken van de rekenmachine (fig. 1).



figuur 1

Op de Panama najaarsconferentie van 1993 heeft Treffers het begrip 'basale (on)gecijferdheid' van McIntosch, Reys en Reys (1992) gebruikt om de realistische aanpak van rekenen-wiskunde in het kader van deze modernisering te verduidelijken. Gecijferdheid beschrijft een samenhangend geheel van kwaliteiten, waar we in deze tijd over moeten beschikken om zinvol en effectief met numerieke gegevens om te (kunnen) gaan. Daarom bieden de drie onderscheiden dimensies (fig.2) houvast voor de verfijning en operationalisering van de huidige kerndoelen en voor reflectie op de kern van adaptief reken-wiskundeonderwijs.



figuur 2

Uitgaande van de gecijferdheid wordt de nadruk enerzijds gelegd op een zeker inzicht in de getallen en de (basale) operaties (c.q. gevoeligheid voor getallen en vertrouwdheid met de operaties) en anderzijds op het gebruik daarvan bij de ontwikkeling van breed toepasbare aanpakken en rekenstrategieën. Treffers (1994) verwoordt dit als volgt:

> 'Algemeen geldt als criterium voor basale gecijferdheid in een bepaald gebied (bijvoorbeeld van de kommagetallen) dat men de betreffende getallen kan ordenen, kan plaatsen op de getallenlijn en zodoende een idee heeft van de orde van grootte van die getallen. Ook is een belangrijk criterium dat men inzicht heeft in hoe de (basis)operaties met (komma)getallen uitwerken en dat men de relaties tussen de (basis)operaties doorziet. En een derde criterium is dat men de basisbewerkingen op de geëigende problemen kan toepassen, zowel globaal als precies rekenend, waarbij het resultaat op redelijkheid kan worden ingeschat.' (pag.12-13)

Volgens Treffers zal de realistische aanpak van rekenen-wiskunde vanuit het perspectief van de gecijferdheid tot een grote differentiatie tussen de leerlingen leiden. De vraag is dan, hoe leraren deze differentiatie zo kunnen beheersen, dat effectieve interactie tussen de leerlingen mogelijk blijft. Hierdoor kunnen zoveel mogelijk kinderen hun steentje bijdragen aan de voortgang van het programma en actief meewerken aan de ontwikkeling

van de gewenste gecijferdheid, zoals beschreven in de kerndoelen. Om een indruk te krijgen van deze differentiatie nemen we als voorbeeld de oplossingen van een schattingstaak die aan leerlingen van groep 6 is voorgelegd (fig.3). We houden vervolgens deze oplossingen tegen het licht van de dimensie 'Toepassingen' (settings) van 'Gecijferdheid' en betrekken daarbij de aspecten van het proces die de realistische onderwijsaanpak kenmerken.
Een kort onderwijskundig intermezzo introduceert de differentiatieproblematiek die in het tweede deel van dit artikel wordt behandeld. Daarin wordt een discussie uitgelokt over een drietal thema's die de inhoudelijke kern van adaptief onderwijs kunnen helpen afbakenen. We eindigen met een korte bespreking van organisatorische maatregelen voor de praktijk in de klas. Het geheel werkt suggesties uit die op de Panama najaarsconferentie van 1993 voor de differentiatieproblematiek zijn gemaakt.

figuur 3

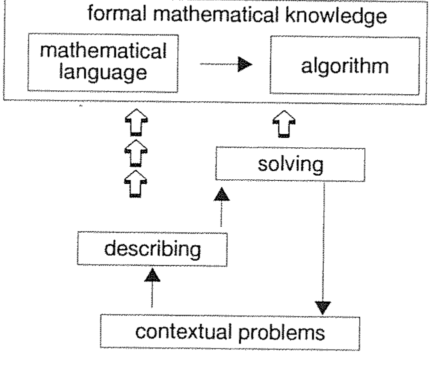
2 verschillen in gecijferdheid

Uitgaande van de dimensie 'Toepassing' uit het model van McIntosch gelden de volgende aspecten als criteria voor gecijferdheid bij de oplossing van bovenstaande opgave:

1 De leerlingen begrijpen waar het in deze rekensituatie omgaat. Dit houdt in dat ze de relatie tussen relevante numerieke gegevens zó leggen, dat de gewenste schatting kan worden gemaakt.

2 Ze realiseren zich daarbij dat precies rekenen niet nodig is. Dit houdt in dat ze zich ervan bewust zijn dat:
   a verschillende meetgetallen in aanmerking komen die in de buurt van hun eigen gewicht liggen;
   b hiermee min of meer geloofwaardige alternatieve schattingen uit de bus kunnen komen;
   c daarom het totale gewicht, binnen zekere grenzen de vijfhonderd kilo kan overschrijden.
3 De leerlingen zijn zich ervan bewust dat ze de schatting op verschillen manieren kunnen beschrijven en oplossen. Ze zijn geneigd die beschrijvingsvorm en strategie te kiezen die, zowel wat de realiteit als wat het rekenen betreft, het meest passend is.
4 De leerlingen moeten, zowel tijdens het oplossingsproces als achteraf, hun gegevens, operaties en uitkomsten op redelijkheid en correctheid controleren.

Om greep te krijgen op de essentiële aspecten van de gevonden differentiatie analyseren we de oplossingen vanuit het gezichtspunt van het mathematiseringsproces. We gebruiken hiervoor het 'Reinventionmodel', zoals door Gravemeijer (1993) beschreven (fig.4).



figuur 4

Dit model visualiseert de fasen van het proces, dat bij realistisch rekenen in gang wordt gebracht met het doel leerlingen te helpen om tijdens interactieve lessen zelf hun eigen ontwikkeling ter hand te nemen. Het oplossen van contextproblemen volgens bovenstaande criteria van gecijferdheid, wordt door realisten beschreven als het mathematiseren van reële situaties.

De dunne pijlen die de drie onderste blokken van het model met elkaar verbinden, visualiseren het proces dat 'horizontaal mathematiseren' wordt genoemd. Het contextgebonden rekenen biedt echter geen garantie dat leerlingen op eigen kracht dit vaak informele niveau van handelen zullen overstijgen. Hiertoe zal de leraar zelf initiatieven moeten nemen. De dikke pijlen visualiseren de overbrugging van het contextgebonden opereren naar het opereren binnen het vaksysteem via progressieve systematisering van de middelen die leerlingen zelf ontwikkelen. Het begrip 'verticaal mathematiseren' beschrijft dit proces alsmede de niveauverhoging die daarbij plaatsvindt wanneer leerlingen feitelijk formelere en breder toepasbare beschrijvingsvormen en rekenstrategieën gaan gebruiken (c.q. van elkaar overnemen), die in samenspraak met elkaar zijn ontwikkeld.

differentiatie bij beschrijven, oplossen en controleren

De meeste leerlingen interpreteren ('Describing') de situatie als een 'uitputtingsprobleem'. Je moet op een of andere manier vijfhonderd kilo zien te bereiken. Een grote meerderheid denkt daarbij aan herhaald optellen. Slecht 5 van de 28 leerlingen koppelen de gegevens aan een vermenigvuldigstructuur. Eén leerling associeert de gegevens met de splitsing van vijfhonderd en denkt als het ware van 'boven' (gewicht van de beer) naar 'beneden' (gewicht van één kind).
De beschrijving maakt de weg vrij voor een rekenkundige oplossing ('Solving'). De variatie in oplossingen is erg groot. Een derde van de leerlingen blijft steken op het informele niveau van herhaald optellen en verkortingen daarvan (fig.5a, b, c). Een derde van de leerlingen bedient zich van formele vermenigvuldigmethoden of flexibele vormen daarvan (fig.5d, e, f, g). De rest van de leerlingen moeten hun werk staken. Zij overzien het probleem niet of beschikken niet over een rekenstrategie die bij hun visie van het probleem past (fig.5h, i).

Op het meest informele niveau werken ronde getallen als magneetjes. Deze getallen lokken gemakkelijke opteloperaties uit in de richting van vijfhonderd. De voorbeelden laten zien dat de aantrekkingskracht van deze 'mooie' getallen soms zo groot is, dat de kinderen de context uit het oog verliezen. Het vlot bereiken van vijfhonderd staat op de voorgrond, het schatten op de achtergrond.
Zo wordt de band met de context afgesneden. De differentiatie die op dit niveau optreedt, hangt samen met de betekenis die de leerlingen aan het afpassen van de maat hechten: 'herhaald optellen' bij het samenstellen van grotere ronde gewichten (veelal honderd kilo) en het 'verhoudingsaspect' bij het systematisch verdubbelen.
Zo worden lange optellingen in de richting van vermenigvuldigen verkort. Slechts voor eenderde deel van deze klas heeft de vermenigvuldiging een eigen status gekregen. Hun oplossing staat los van herhaald optellen èn van de telrij.

Optelmethoden
(a, b, c)

~~30x30= 20+20x40 x300~~

20+20+20=60 +60=120 +80=200 +90=290 +10=300
+200=500

~~5x100=500~~

30+30=60 +20=80 +20=100
30+30=60 +20=80 +20=100
30+30=60+20=80+20=100
30+30=60+20=80+20=100
30+30=60+20=80+20=100

Ik doe steeds 35+35, dat is al 70
dat doe ik weer keer 2
dat is 140 dat doe ik weer keer 2
dat is 210 dan doe ik weer keer 2
dat is 280 en zo steeds verder

Vermenigvuldigmethoden
(d, e, f, g)

Ik heb tien kinderenderen van 50tig kilo
Dus ik heb 50X10 gedaan en dat is 500

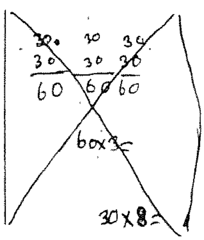
Dus 500 kilo

Ik heb 10x30=30 en dan ga ik 7x30=210
kladpapier

Ik denk aan 25 kilogram per kind 2x25=50 dus 4x25=100 en
5x100=500 dus: 4+4+4+4+4=20 dus ongeveer 20 kinderen

100 ga ik eerst splitsen dat is 50.
Maar dat is te veel dus ga ik 50 splitsen is 25
Dus kan 25 4 keer in honderd.
Maar we hadden geen 100 maar 5 honderd.
4X Dus is dat 20

Restmethoden
(h, i)



Ik deed 5x7=35
het is 35 gewoon uit me hoofd
ik heb gewoon geschat

5X5+5 30
500-400=100

IK weeT heT nieT

figuur 5

De differentiatie binnen deze groep komt voort uit het gebruik van meer vaste en meer flexibele vormen van hoofdrekenen, namelijk het toepassen van de nulregel en het rekenen met de factor tien enerzijds, en het gebruik van passende mooie produkten anderzijds ($4 \times 25 = 100$). Daarom komen andere meetgetallen dan hierboven in aanmerking voor de schatting.

De derde pijl in het model van Gravemeijer verwijst naar de terugkoppeling van de operaties en van de uitkomst naar de oorspronkelijke context. Oplossingen (d) en (g) van figuur 5 illustreren deze controle, die slechts bij 4 van de 28 leerlingen merkbaar is. Het gebrek aan controle bij de meerderheid van de leerlingen verklaart de grote range aan antwoorden en het grote aantal schattingen daarbinnen, die niet bij de context passen.
Drie volgende drie factoren spelen hierbij een rol:
- de hierboven genoemde aantrekkingskracht van het handig rekenen, zowel bij herhaald optellen als bij het rekenen met nullen;
- het gebrekkige inzicht in hoe bepaalde methoden als het verhoudingsgewijs optellen precies werken;
- het gebruik van notatievormen die onvoldoende houvast bieden, zowel voor de uitvoering van de rekenhandelingen als voor de controle daarvan achteraf. Dit geldt met name voor leerlingen die de meest informele optelmethoden gebruiken (herhaald optellen en verhoudingsgewijs optellen).

verschillen in de beschikbare bagage van de leerlingen

In het model van McIntosch (fig.2) visualiseren de pijlen die van de dimensies 'Getallen' en 'Operaties' naar de dimensie 'Toepassingen' gaan de invloed van de beschikbare bagage op de toepassingsvaardigheid van de leerlingen. Er is een zeker inzicht in getallen en operaties nodig om problemen als die van de ijsbeer te kunnen aanpakken en (handig) op te lossen. In de gegeven voorbeelden bedienen leerlingen zich van beschrijvingsvormen en rekenprocedures die ze eerder hebben ontwikkeld en die sterk samenhangen met de bereikte organisatie van de getallenwereld tot duizend (en de getalsgevoeligheid in dit gebied) èn met het verworven inzicht in optellen en vermenigvuldigen (en de vertrouwdheid met deze bewerkingen). Voor alle leerlingen geldt dat ze over 'mooie' getallen beschikken die passen bij de betekenis die ze aan de schatsituatie hechten en die een associatie oproept met vrijwel geautomatiseerde operaties of vertrouwde redeneringen. Zo lokt het 'herhalingsaspect' het gebruik van tientallen kilo's uit (20, 30 en 40). Hiermee kun je, springend in de telrij, gemakkelijk vijfhonderd bereiken. De tussenliggende honderdtallen, maar ook getallen die 'in het midden' liggen (150, 250, 350) dienen daarbij als richtpunt. Het 'verhoudingsaspect' daarentegen lokt getallen uit die zich goed lenen voor verdubbelen, namelijk veelvouden van tien (20, 30, 40, 50) en vijf (35, 50).

Kinderen die de situatie aan 'vermenigvuldigen' koppelen werken daarentegen los van de getallenlijn, louter binnen het systeem van de formele eigenschappen van vermenigvuldigen. Zo te zien staat de dimensie 'Getallen' minder los van die van de 'Operaties' dan het model van McIntosch suggereert. Bij 'favoriete getallen' passen 'favoriete handigheden'. Op het meest informele niveau van schatten hebben deze leerlingen uit groep 6 een sterke voorkeur voor:

- het verdubbelen van het startgetal in combinatie met het aanvullen tot een rond honderdtal;
- het herhalen van een reeks optellingen;
- het systematisch verdubbelen.

Ze doen daarbij een beroep op basale vaardigheden en rekenfeiten die eerder zijn geautomatiseerd en gememoriseerd, en op hun kennis van de analogie met het opereren in het getallengebied tot tien. Denk daarbij aan het gebruik van dubbelen (40 = 20 + 20, afgeleid uit 4 = 2 + 2) en splitsingen van honderd (100 = 60 + 40, afgeleid uit 10 = 6 + 4).

Op het meest formele niveau hebben de leerlingen vanuit de optiek van het vermenigvuldigen een sterke voorkeur voor:

- het 'opblazen' van het startgetal met behulp van de factor tien;
- het samenstellen of afbreken van vijfhonderd op basis van bekende 'mooie' bekende produkten.

Dit veronderstelt dat deze leerlingen een ander kijk op getallen en operaties en andere automatismen hebben ontwikkeld dan de rest van de groep, die daar (nog) niet over beschikt.

mogelijkheden voor niveauverhoging

Ter afsluiting laten we zien hoe de leraar van deze groep 6, vanuit bovenstaande verschillen die tussen de leerlingen bestaan, een poging zou kunnen doen om de leerlingen die op het laagste niveau opereren te helpen om meer vakmatig te opereren (dikke pijlen in figuur 4).

We zagen dat een groot deel van de leerlingen niet tot een passende schatting komt omdat de gebruikte notatievormen onvoldoende houvast bieden. Ze beschikken niet over een model om de getallen en operaties uit de context betekenisvol en effectief te visualiseren.

In figuur 6 ziet u de oplossingen van twee leerlingen uit respectievelijk groep 6 en 7. Deze laten zien hoe - door min of meer verschillende informele notatievormen aan de orde te stellen - leerlingen modellen kunnen ontwikkelen die losser van de gegeven context staan en dus voor meer situaties bruikbaar zijn. In dit geval is de getallenlijn of de strook het model dat het dichtst aansluit bij de stap die meeste leerlingen van groep 6 kunnen maken (fig.6). Deze verbetering van de notatie kan leiden tot een discussie tussen de leerlingen in verschillende richtingen.

van systematisch herhalen

30+30=60 +20=80 +20=100
30+30=60 + 20=80 + 20 = 100
30+30 =60+ 20 = 80+20=100
30+30=60+20 = 80+20=100
30+30=60+20=80+20=100

naar systematisch bijhouden van de tussenuitkomsten

30 +30 60 +30 90 + 30 = 120 + 30 = 150 + 30 = 180 + 30 210 +30 = 240
1 2 3 4 5 6 7 8

+30 = 270 +30 = 300 +30 = 330 +30 = 360 +30 = 390 +30 = 410
9 10 11 12 13 14

+30 = 440 +30 = 470 + 30 = 500
15 16 17

naar noteren op een dubbele getallenlijn

1 2 3 4 5 6 10 11

30 60 90 120 150 180 300 330

figuur 6

Zo suggereert de oplossing van een andere leerling uit groep 7 dat men de grote tafels als aangrijpingspunt kan nemen om zowel de systematische verdubbeling als het gebruik van de factor tien aan de orde te stellen (fig.7). Voor de rekenzwakke leerlingen van deze klas is dit echter een grote stap die niet binnen één les kan worden gerealiseerd.

Van de grote tafel

1x40=40
2x40=80
3x40=120
4x40=160
5x40=200
6x40=240
7x40=280
8x40=320
9x40=360
10x40=400
11x40=440
12x40=480

naar systematisch verdubbelen

1 2 4 6 12

30 60 120 240 480

naar het gebruik van 10 keer

1 10 20

30 300 600

dus meer dan 10 en minder dan 20 kinderen

en gericht bijstellen:

10 x 30 = 300
5 x 30 = 150
1 x 30 = 30 → 16 kinderen
480 kilo

figuur 7

samengevat

De schattingen signaleren verschillen in de rekenwiskundige bagage van de leerlingen en in het gebruik dat ervan gemaakt wordt bij het beschrijven en oplossen van elementaire problemen in het getallengebied tot duizend. We hebben om twee redenen drie aspecten van de differentiatie die optreedt - het verschillend gebruik van mooie getallen, handigheden en beschrijvingsvormen - sterk benadrukt. Ten eerste omdat deze aspecten aangeven, dat leerlingen over een zekere basis moeten beschikken waar leraren veel aandacht aan moeten besteden. Ten tweede omdat deze verschillen tevens het aangrijpingspunt vormen voor activiteiten in het kader van de formalisering van de contextgebonden oplossingen en de mogelijke differentiatie van dit proces.

3 intermezzo

'Adaptief onderwijs is onderwijs dat binnen een gegeven context afgestemd is op de verschillen tussen leerlingen opdat de kans wordt vergroot dat onderwijsdoelen bereikt worden', zo luidt de onderwijskundige beschrijving van het procesmanagement van 'Weer Samen naar School' (1994). Een aantal criteria typeert dit concept. Adaptief onderwijs gaat er vanuit dat de verschillen tussen de leerlingen 'vanzelfsprekend' zijn, dat de leraar verantwoordelijk is voor het leerproces van alle leerlingen en dat hij zich met name op de instrumentele vaardigheden richt. Omdat de leerlingen bij dit concept gestimuleerd worden zelf hun eigen leerproces ter hand te nemen, zullen ze, volgens het procesmanagement, meer geneigd zijn zich actief voor hun werk in te zetten en zo hun kansen op schoolsucces vergroten. De belangrijkste vraag die dan rijst, is hoe leraren de verschillen die in het natuurlijke milieu en tijdens het onderwijs ontstaan zó kunnen beïnvloeden, dat ze beheersbaar blijven. En wel zo dat leerlingen met verschillende kwaliteiten en ontwikkelingsperspectieven met elkaar kunnen blijven communiceren en zoveel mogelijk van elkaar kunnen leren. Naar aanleiding van een drietal lessen die we uit de opgave over de ijsbeer kunnen trekken, wordt in het hierna volgende wordt de discussie over deze problematiek geopend.

4 kern van adaptatief onderwijs ter discussie

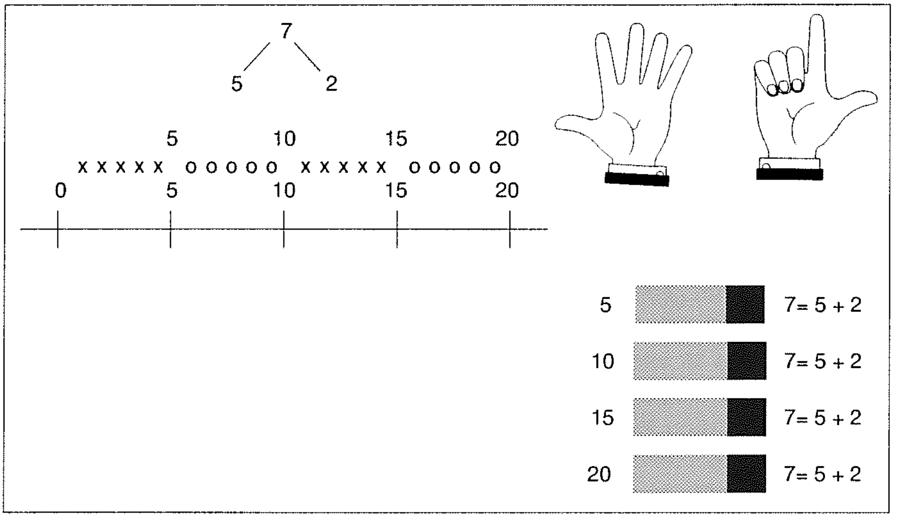
ontwikkeling van een breed stelsel van mooie getallen

De eerste les die we uit de opdracht rond de ijsbeer kunnen trekken is dat

kinderen - ook rekenzwakke leerlingen - in de loop der tijd, vanuit hun eigen kijk op de getallenwereld, een aparte status aan bepaalde getallen geven. *Tien* is per traditie het eerste getal dat als bundel van tien eenheden onder de aandacht van de kinderen wordt gebracht. Dan volgen de 'ronde tientallen' (tien, twintig, dertig, enzovoort) in het getallengebied tot honderd en de 'honderdtallen' (honderd, tweehonderd, driehonderd, enzovoort) in het gebied tot duizend. De nadruk op deze ankergetallen/ordeningsvormen van ons tientallig stelsel komt voort uit de traditionele gerichtheid op formele rekenprocedures: optellen en aftrekken over de tien via de splitsing bij 10 ($8 + 4 = 8 + 2 + 2$ en $12 - 4 = 12 - 2 - 2$), optellen en aftrekken tot honderd via splitsen en cijferen, cijferen als de meest efficiente vorm van precies rekenen.
Lettend op de dimensie 'Getallen' en 'Toepassingen' komt echter een breder en flexibel stelsel van getallen in aanmerking, die we onder de aandacht van de leerlingen moeten brengen om de gewenste gecijferdheid in een bepaald gebied te bevorderen. De getallen die de leerlingen uit groep 6 gebruikten, zijn daar voorbeelden van. Hoe krijgen getallen een eigen status? Op welke getallen moeten we ons richten? En: Hoe kunnen we zoveel mogelijk leerlingen helpen deze getallen zelf uit te vinden en te organiseren? Dit zijn de drie vragen die binnen de context van de inrichting van adaptief rekenonderwijs van belang zijn.
Rekendidactici als Van Hiele en Freudenthal hebben laten zien hoe kinderen de getallenwereld organiseren. Het zijn de contexten die in eerste instantie betekenis geven aan de getallen en aan de operaties ermee. Daarom wordt binnen de realistische aanpak gestart met een brede verkenning van de getallen in modelcontexten die voor jonge kinderen betekenisvol zijn. Zo komen kinderen op het spoor van de verschillende betekenissen die getallen kunnen krijgen, ontdekken ze de eigenschappen ervan en krijgen ze geleidelijke aan meer greep op de systematiek die achter deze getallen schuil gaat. Bekende voorbeelden illustreren waar men in deze fase de nadruk op moet leggen. Winkelsituaties waar een nummer wordt getrokken, richten de aandacht op het volgorde-aspect van de getallen en op de plaats in de telrij, die aanvankelijk ook aangeeft hoe groot de getallen ongeveer zijn. Door de winkelwagens te tellen (en tevens te kijken hoe vol ze zijn!) kun je bepalen in welke rij je in de supermarkt het beste kunt gaan staan.
Een reflectie op de dagen van de week kan op een vergelijkbare manieren in groep 3 en 4 twee aspecten van getallen onder de aandacht brengen:

- de opeenvolging (maandag, dinsdag, ...) wijst naar de lineaire ordening die bijvoorbeeld met de vingers kan worden gevisualiseerd. Vanuit dit oogpunt kunnen 'drie' en 'vier' in relatie tot woensdag en donderdag een bijzondere status krijgen. Op woensdag gaat namelijk de schoolweek 'om' - 1, 2, **3**, 4, 5 - vandaar de vrije middag om weer op krachten te komen. Voor de hele week geldt echter donderdag als 'omslagdag': 1,2,3, **4**, 5,6,7. Op deze manier kunnen getallen in groep 3, lettend op de volgorde met een kralensnoer en op een getallenlijn worden georganiseerd;

- de herhaling van de weken daarentegen kan de aandacht op het kardinale aspect van de getallen richten. Dat je per week vijf schooldagen en twee vrije dagen hebt, kun je op een andere manier met de hand (of door te turven) aangeven: vijf schooldagen (linkerhand; bundel van vijf strepen) en twee vrije dagen (twee vingers rechts; twee streepjes erbij). Zo krijgt 'vijf' de status van 'maat' of 'meetgetal' waarmee kleinere en grotere aantallen kunnen worden gestructureerd, georganiseerd en herkend. En zo ontstaan ook reeksen van 'mooie' getallen als vijf, tien, vijftien en twintig die aan bepaalde structuren zijn gekoppeld (fig.8).



figuur 8

samengevat

Getallen krijgen in eerste instantie voor leerlingen betekenis in zinvolle contexten. Deze getallen moeten echter los geweekt worden van deze specifieke contexten om binnen een georganiseerd geheel een eigen status te kunnen krijgen. Bij de realistische aanpak worden hiervoor visualiseringsmiddelen gebruikt als de lege getallenlijn, de strook, het dozenmodel, en dergelijke. Om de getallen, lettend op hun plaats in de telrij èn op hun structuur, 'op een rijtje te krijgen'. Om ze, zo ordenend, beschikbaar te maken voor flexibel gebruik in toepassingssituaties.

Recent onderzoek bij volwassenen (Jansen, 1995) laat zien welke getallen in schatsituaties en in de dagelijkse omgang(staal) de hoofdrol spelen. In deze situaties gebruiken wij (volwassenen) vrijwel stelselmatig dezelfde reeks 'favoriete getallen' (fig.9).

Hoofdrol bij schattend rekenen
* $\frac{1}{2}$ 1 2
* tienvouden van deze getallen:
  5 10 20
  50 100 200
  enzovoort

Bijrol bij schattend rekenen
* $2\frac{1}{2}$
* tienvouden van $2\frac{1}{2}$: 25 250 enzovoort

Hoofdrol in omgangstaal
* de ronde *tientallen*, maar met name 10

Bijrol in omgangstaal
* de *vijftallen* (helft van de tientallen)
  dus 15, 25, 35, enzovoort
* 50 (de helft van 100)

figuur 9

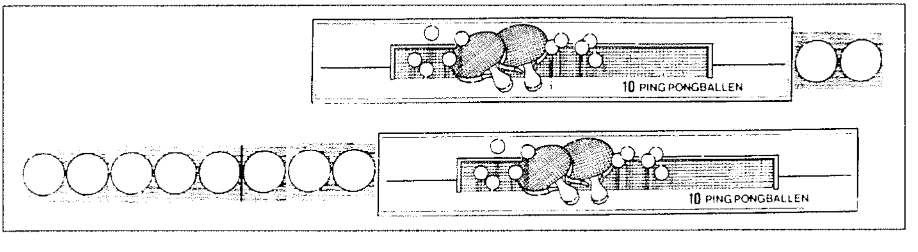
Met de reeks tientallen (tien, twintig, dertig, enzovoort) geven we een zekere orde van grootte aan die we vaak via de 'helft' met de vijftallen verfijnen (15, 25, 35, enzovoorts). Bij globalere schattingen gebruiken we op dezelfde manier vaak vijftig als de helft van honderd, maar ook 25 als de helft van vijftig en tweehonderdvijftig als de helft van vijfhonderd. In het getallengebied tot honderd spelen dus twee reeksen getallen de hoofdrol: de tien- en de vijftallen als verfijning. Daarnaast spelen vijftig als de helft van honderd en 25 als de helft van vijftig een belangrijke bijrol. Voor het getallengebied tot duizend gelden de tienvouden van deze getallen als 'favoriete getallen'. Opvallend genoeg komen veel van deze getallen in de oplossingen van onze leerlingen van groep 6 voor.
Streven naar basale gecijferdheid op het gebied van de getallen houdt dan, vanuit de optiek van de realistische aanpak van rekenen-wiskunde, in dat we met name deze getallen onder de aandacht van de kinderen moeten brengen om zo greep op de realiteit te krijgen. In het verlengde daarvan kunnen we trachten deze getallen binnen een sluitend systeem te organiseren zodat alle willekeurige getallen in relatie tot elkaar (vanuit hun plaats in de telrij èn hun structuur) betekenis hebben. De vraag rijst dan,

hoe we kinderen, vanuit de organisatie van de getallen tot tien, zo consistent mogelijk kunnen helpen bovenstaand stelsel van mooie getallen te ontwikkelen. Gegevens uit het Cito LeerlingVolgSysteem (LVS), (Janssen & Kraemer, 1993) wijzen uit zien dat rekenzwakke leerlingen (èn leerlingen die onder het landelijke gemiddelde opereren) binnen de huidige onderwijscondities niet bij machte zijn het gewenste inzicht in de getallen te krijgen. Een belangrijk struikelblok is juist de betekenisvolle ontwikkeling van bovenstaande anker- en meetgetallen, met name de getallen die als verfijning worden gebruikt (de vijftigtallen en tienvouden daarvan) en de getallen 25 en 250 in relatie tot respectievelijk 50, 75, 500 en 750. Wellicht wordt in groep 3 en 4 te weinig aandacht besteed aan contextgebonden reflectie en organisatie van de getallen en aan de verbinding daarvan met de meer formele organisatie met visualiseringen als de kralenketting, het rekenrek, en dergelijke.
De getallen van alledag zijn met name voor rekenzwakke leerlingen van groot belang, om dat wat ze bij de rekenlessen leren, in toepassingssituaties te gaan gebruiken. Meer nadruk hierop zou kunnen voorkomen dat twee werelden ontstaan: de wereld van de hulpmiddelen enerzijds en de huis-tuin-en-keuken-wereld anderzijds. Vanuit de realistische aanpak zouden deze leerlingen immers zelf 'favoriete getallen' moeten ontwikkelen. Het losweken van de ankergetallen en ordeningsvormen (c.q. meetgetallen) uit specifieke contexten met gebruikmaking van hulpmiddelen als het rekenrek, het kralensnoer, de lege getallenlijn, verpakkingsmaterialen, geld, en dergelijke, en de formele organisatie van de getallenwereld met deze middelen zou dan, wat de dimensie 'Getallen' van gecijferdheid betreft, meer aandacht moeten krijgen (zie wat deze sturing betreft, Gravemeijer, 1995).

ontwikkeling van breed toepasbare handigheden

Wat voor de getallen geldt, geldt ook voor de (basis)operaties (c.q. bewerkingen). In reële contexten ontdekken kinderen heel vroeg welke betekenissen de basis(operaties) kunnen hebben, welk effect deze hebben en op welke manieren zij ze kunnen uitvoeren. Bij de 'ijsbeer' hebben we gezien hoe rekenstrategieën direct samenhangen met de getallen waar de leerlingen over beschikken en met het beschikbare inzicht in de operaties. Op een vergelijkbare manier bepalen de organisatie van de getallen en het inzicht in wat optellen en aftrekken is, in hoge mate de flexibiliteit en het succes van de leerlingen wat optellen en aftrekken betreft. Volgens de PPON-gegevens (Kraemer, 1995/1996; Kraemer e.a., in druk) en de eerder genoemde gegevens van het Cito LVS, is ook op dit gebied de differentiatie tussen leerlingen (met name bij aftrekken) erg groot,

De voortgang op het gebied van optellen-aftrekken en vermenigvuldigen-delen leunt sterk op de vorderingen die leerlingen bij de start van de leergangen maken. In alle methoden worden nu de 'tafels' via de zogenaamde reconstructie-didactiek gememoriseerd. Na de informele verkenning van de operaties in modelcontexten, waarin de verschillende aspecten van optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen zijn vervat, reconstrueren de leerlingen de elementaire rekenfeiten met behulp van visuele hulpmiddelen die het gebruik van handige strategieën uitlokken. Deze strategieën sturen dan de geleidelijke memorisering van de tafels. Een algemeen probleem is dat rekenzwakke leerlingen ook bij deze aanpak minder snel (of niet) de gewenste flexibiliteit en memorisering bereiken. Dit geldt met name voor de aftrektafels en voor de tafels van vermenigvuldigen en delen. Een ander probleem is dat ze bij toepassingen òf terugvallen in omslachtige informele rekenprocedures òf formele rekenmethoden gebruiken, waarvan ze de werking niet begrijpen, bijvoorbeeld splitsen en cijferen in aftreksituaties. De vraag is of men niet te vroeg en te snel een zekere automatisering nastreeft in de periode waarin rekenzwakke leerlingen nog moeten ontdekken wat er achter handigheden die ze uit zichzelf ontdekken schuilgaat en hoe deze handigheden op andere getallen kunnen worden toegepast.
Zoals hierboven voor de getallen is gesuggereerd, zou men deze leerlingen ook voor de operaties een langere aanloop moeten gunnen. Het accent zou daarbij gelegd moeten worden op het leren uitbuiten van elementaire handigheden, die rekenzwakke leerlingen natuurlijkerwijs in vertrouwde contexten en bij kale opgaven met vertrouwde getallen toepassen. Te denken valt aan het doortellend aanvullen in aftreksituaties enerzijds en aan het afleiden van de uitkomst van onbekende kale aftrekkingen uit bekende getalbeelden (c.q. bekende splitsingen en optellingen) anderzijds.
Bijvoorbeeld: $3 - 2 = 1$, want $2 + 1 = 3$ of $3 = 2 + 1$ en $4 - 2 = 2$, want $2 + 2 = 4$ of $4 = 2 + 2$. Visualiseringen die dichter bij de realiteit staan als de pingpongdoos waarin tien ballen in twee vakjes van vijf zijn geordend (fig.10) zouden in deze fase de reflectie van en de discussie tussen de leerlingen kunnen ondersteunen, en wel zonder tussenkomst van een formele rekentaal.



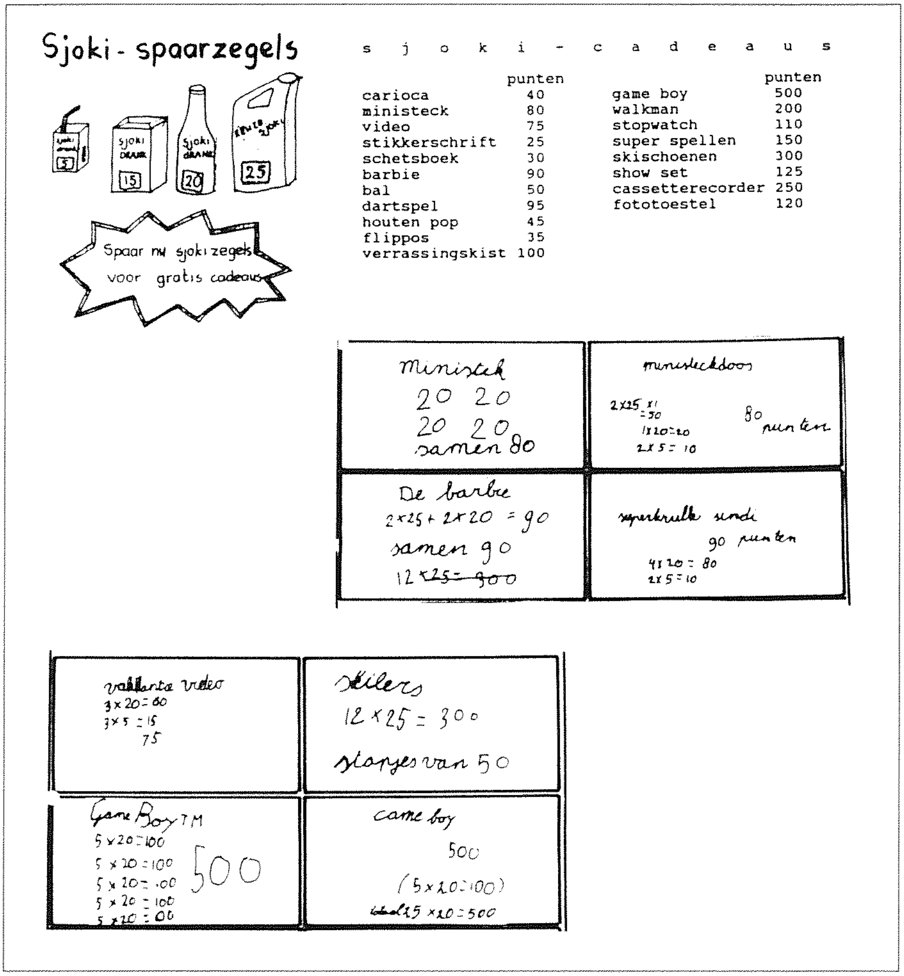
figuur 10

Aansluitend kunnen het rekenrek en de kralenketting worden ingevoerd om de opgedane ervaring op een formeler niveau te organiseren en om de elementaire operaties in te slijpen. Op het tussenniveau van het raadspelletje met de pingpongdoos zoeken de leerlingen uit, hoe ze de ordening van de ballen en de getalrelaties die ze al kennen (de dubbelen en zes, zeven, acht, negen en tien als 'vijf en de rest') kunnen uitbuiten om zo snel mogelijk het aantal niet-zichtbare ballen te bepalen (Kraemer e.a., 1995).
In figuur 10 worden twee situaties getoond. Bij de eerste ligt het terugtellen vanaf tien voor de hand (aftrekken 'van het einde': negen, acht; dus acht), bij de tweede het doortellend aanvullen tot tien (aftrekken 'van het begin': negen, tien; dus twee). Kinderen kunnen echter ook de structurering met vijf gebruiken. Met drie erbij is het vak vol (eerste situatie), want 5 = 2 + 3. Nog vijf erbij (het tweede vak) is acht, want 5 + 3 = 8, dat weet ik! In de tweede situatie moeten er twee ballen onder het schuifje staan, want die heb ik nodig om vijf te krijgen (5 = 3 + 2). Zo gebruikt, kan het doosje als opstapje dienen voor de geleide reconstructie van de splitsingen van tien.

Een dergelijke meer informele verkenning van de operaties richt de aandacht op de orde van grootte van de getallen, op de structuur ervan en op de relatie tussen de operaties. In die zin bevorderen dergelijke activiteiten het begrip van de handigheden die achter de rekenstrategieën van het aanvankelijk rekenen schuilen.

De activiteit 'Sjokispaarzegels' uit het Hulpboek voor groep 5 illustreert een vergelijkbare informele aanpak van handig leren vermenigvuldigen in de fase waarin rekenzwakke leerlingen nog sterk gericht zijn op herhaald optellen en nog niet alle tafelprodukten hebben gememoriseerd (fig.11). De spaarzegels kunnen op verschillende manieren worden samen gesteld om het gekozen artikel te krijgen. Leerlingen hanteren daarbij impliciet belangrijke eigenschappen van vermenigvuldigen en maken expliciet gebruik van getalstructuren die ze al kennen. Dit leidt tot verschillende notatievormen die zelf weer onderwerp van discussie kunnen zijn.

Samengevat is de kernvraag bij de dimensie 'Operatie' hoe we rekenzwakke leerlingen optimaal kunnen helpen zicht te krijgen op basale handigheden, die zowel voor de automatisering van de tafels als voor de voortgang op het gebied van hoofdrekenen en schattend rekenen van belang zijn. Voorafgaande aan de automatisering zou met name meer aandacht moeten worden besteed aan de gerichte verkenning van de eigenschappen van de basisoperaties, aan de relaties tussen de basisoperaties en bewerkingen, en aan het gebruik van getalstructuren. Dit veronderstelt een betere afstemming van de organisatie van de getallenwereld op de verkenning van de operaties en een meer geïntegreerde aanpak van de basisoperaties, met getallen die de leerlingen al goed hebben georganiseerd. Wat dit betreft zouden reken-zwakke leerlingen primair moeten leren opereren met getallen waar ze in de realiteit mee omgaan om te voorkomen dat ze binnen het rekensysteem met getallen opereren die hen niets 'zeggen'.



	punten		punten
carioca	40	game boy	500
ministeck	80	walkman	200
video	75	stopwatch	110
stikkerschrift	25	super spellen	150
schetsboek	30	skischoenen	300
barbie	90	show set	125
bal	50	cassetterecorder	250
dartspel	95	fototoestel	120
houten pop	45		
flippos	35		
verrassingskist	100		

figuur 11

visualiseringen en notatievormen

Het 'probleem van de ijsbeer' leert ten slotte dat leerlingen over visualiseringen en notatievormen moeten beschikken om toepassingsproblemen betekenisvol en succesvol te kunnen oplossen. Bij veel leerlingen is de

aanpak correct. Het is veelal de manier waarop ze hun operaties vastleggen die hen in de problemen brengt. Het leren visualiseren van problemen en overzichtelijk noteren van rekenhandelingen is om twee redenen belangrijk. In eerste instantie voor de leerling zelf, omdat hij hierdoor meer greep op zijn rekenhandelingen krijgt. In tweede instantie voor de hele groep, omdat hetgeen op papier staat onderwerp van discussie kan zijn. Leerlingen kunnen beter verantwoorden wat ze gedaan hebben. Klasgenoten kunnen zich in hun standpunt verplaatsen en op deze manier oplossingen verkennen en overnemen waar ze zelf niet op gekomen zijn. Alleen zo kan de discussie tot de gewenste niveauverhoging leiden.
Een derde discussiepunt is hoe we, vanaf groep 3, leerlingen kunnen helpen overzichtelijke visualiseringen en notatievormen te ontwikkelen die voor iedereen eenduidig en hanteerbaar zijn. Een van de aandachtspunten hierbij is hoe de handelingen en redeneringen, die bij het rekenen tot tien en twintig met de kralenketting en het rekenrek worden uitgelokt, eenduidig in rekentaal kunnen worden vastgelegd om op die manier afstand van deze middelen te kunnen nemen. Hoe visualiseer je het tweezijdig aftrekken met symbolen? En wat leidt in dit verband tot een betekenisvol gebruik van de relatieboog als ondersteuning? (Treffers & Veltman, 1994). Hoe legt je het structureren van getallen en operaties met een eenduidige notatie vast? Bijvoorbeeld 5 + 7 via de splitsing van 7 in 5 + 2? Dit zijn vragen die mijn inziens de aandacht verdienen.
Bij de overgang van optellen naar herhaald optellen en vermenigvuldigen, zou men er verder voor moeten zorgen dat leerlingen vrij vroeg gestileerde notatievormen ontwikkelen. Hiervoor zou men eigen bevindingen van de leerlingen die voor de hele groep perspectieven bieden als uitgangspunt moeten nemen. De oplossingen van figuur 6, 7 en 11 illustreren enkele mogelijkheden.

5 gedifferentieerd en interactief onderwijs

Op verschillen plaatsen in dit artikel wordt de nadruk gelegd op het belang van interacties voor de ontwikkeling van alle leerlingen. Geïndividualiseerd onderwijs leidt niet tot de gewenste gecijferdheid omdat de leerling louter op geprogrammeerde instructies en op zichzelf is aangewezen. Aan de andere kant is interactief onderwijs niet per definitie succesvol. Het hangt er vanaf of de interacties tussen de leraar en de leerlingen en tussen de leerlingen onderling effectief zijn. Leerlingen moeten in een bepaald getalgebied over een zekere basis beschikken om taken betekenisvol aan te kunnen pakken. Ze moeten de kans krijgen hun eigen constructies aan de orde te stellen en om samen met klasgenoten hierover te kunnen reflecteren. Leraren moeten ten slotte de kansen die dan in de discussie liggen, aangrijpen om zoveel mogelijke leerlingen op een hoger niveau te kunnen brengen. Uitgaande van de kernzaken die hierover ter discussie zijn gesteld, zou men de leercondities waarschijnlijk zo kunnen verbeteren dat minder leerlingen in de loop der jaren zoveel achterstand opbouwen dat interacties in de klas in de middenbouw onmogelijk zijn. Dit neemt niet weg dat een zekere differentiatie nodig is, om recht te kunnen doen aan leerlingen die tijdens de lessen voortdurend op hun tenen lopen of juist onder hun capaciteiten worden aangesproken. Schrijvers van methoden zouden in die zin beter kunnen inspelen op verschillen die voorkomen tussen schoolpopulaties en binnen een 'gemiddelde' groep. Men zou bijvoorbeeld onderwijsleeractiviteiten op moeten nemen die nauw aansluiten bij de voortgang van rekenzwakke leerlingen en van voorlopers. Een dergelijke differentiatie 'aan de zijlijn' van het programma heeft als voordeel dat groepen kinderen, in eigen kring en binnen een daarvoor gereserveerde tijd, de kans krijgen de gemeenschappelijk stof op eigen niveau te verwerken, te verdiepen en te oefenen. Het stelt met name rekenzwakke leerlingen in staat die zaken te verdiepen en te oefenen die nodig zin om optimaal van de mathematiseringsactiviteiten in de grote groep te kunnen profiteren.

6 conclusie

Door meer nadruk te leggen op de basale elementen van gecijferdheid kunnen leraren zowel preventief als in het kader van de remediëring extreme verschillen voorkomen, die interactief onderwijs inefficient maken. Hoe interactieve lessen het beste kunnen worden afgewisseld met gedifferentieerde activiteiten in eigen kring is geen kwestie van organisatorische aard, die door de scholen zelf moet worden opgelost. Duidelijke en concrete suggesties in de methoden moeten leraren houvast bieden om hoofd- van bijzaken te kunnen onderschreiden en om de nodige differentiatie, vanuit het standpunt van de leerlingen betekenisvol en effectief in te richten.

literatuur

Janssen, J.J. & J.M. Kraemer (1993). *Leerlingvolgsysteem. Rekengids voor groep 3 en 4*. Arnhem: Cito.

Jansen, C.J.M. & M.M.W. Pollman (1995). Ronde getallen. *Tijdschrift voor nascholing en onderzoek van het rekenwiskundeonderwijs*, 14(2), 31-35.

Gravemeijer, K.P.E. (1994). *Developing Realistic Mathematics Education*. Utrecht: CDB press (dissertatie).

Gravemeijer, K.P.E. (1995). Het belang van social norms en sociomath norms voor realistisch rekenwiskundeonderwijs. *Tijdschrift voor nascholing en onderzoek van het rekenwiskundeonderwijs*, 14(2), 17-25.

Kraemer, J.M. (1995). Aanknopingspunten voor de versterking van het aanvankelijk rekenen in LOM en MLKscholen (1). *Tijdschrift voor nascholing en onderzoek van het rekenwiskundeonderwijs*, 14(2), 3-15.

Kraemer, J.M. (te verschijnen). Aanknopingspunten voor de versterking van het aanvankelijk rekenen in LOM- en MLK-scholen (2). *Tijdschrift voor nascholing en onderzoek van het rekenwiskundeonderwijs.*

Kraemer, J.M., J. Nelissen, A. Noteboom & J.J. Janssen (1995). *Leerlingvolgsysteem. Hulpboek voor groep 3 en 4.* Arnhem: Cito.

Kraemer, J.M., F. van der Schoot & N. Veldhuizen (in druk). *Balans van het rekenonderwijs in LOM- en MLK-scholen. Uitkomsten van de eerste peiling Rekenen/ Wiskunde.* Arnhem: Cito.

Mcintosh, A., B.J. Reys & R.E. Reys (1992). A Proposed Framework for Examining Basis Number Sense. *For the Learning of Mathematics*, 12(3), 28.

Procesmanagement Weer Samen Naar School (1994). *Hoe pakken we het aan?* 's-Hertogenbosch: Procesmanagement WSNS.

Treffers, A. & E. de Moor (1994). De stille revolutie in het rekenwiskundeonderwijs. *Jeugd in school en wereld*, 79(3), 4-10.

Treffers A. & A. Veltman (1994). Relatieboog als brug tussen bewerkingen. *Tijdschrift voor nascholing en onderzoek van het rekenwiskundeonderwijs*, 12(3), 11-14.

Treffers, A. (1994). Basale (on)gecijferdheid. In: M. Dolk, H. van Luit & E. te Woerd. *Speciaal Rekenen.* Utrecht: Panama/HMN & Freudenthal Instituut, 11-28.